CESARE RIMINI

FONDAMENTI
DI
RADIOTECNICA GENERALE

NICOLA ZANICHELLI EDITORE
BOLOGNA 1948

CESARE RIMINI

FONDAMENTI
DI
RADIOTECNICA GENERALE

NICOLA ZANICHELLI EDITORE
BOLOGNA 1948

ALLA MEMORIA

DEI MIEI ADORATI GENITORI

PREFAZIONE ALLA PRIMA EDIZIONE

Sono trascorsi poco più di sette lustri dalla storica scoperta con la quale il genio di Marconi ha consentito la più brillante valorizzazione dei fondamentali risultati teorici e sperimentali conseguiti da Hertz e da Righi, dando così inizio ad una vera e propria nuova èra nel campo scientifico e tecnico.

In tale breve periodo di tempo la scienza radiotecnica si è andata sviluppando con ritmo rapidissimo, determinando il diffondersi di una vasta mole di concetti, per la maggior parte assai delicati, e che certamente non appartengono al novero di quelli la cui giusta essenza si lascia agevolmente afferrare. Non sono mancati, è vero, numerosi tentativi di volgarizzazione, e taluni anzi magistralmente condotti, per quanto è consentito da una materia che per se stessa mal si presta a sensibili semplificazioni. È certo però (e l'esperienza della vita in ambienti culturali e didattici lo conferma ogni giorno più) che una non piccola moltitudine di persone, dotate di innate attitudini specifiche e di congrua preparazione scientifica, è vivamente desiderosa di allargare la cerchia delle nozioni apprese nei libri elementari, e sopratutto di precisarne la portata.

Il presente volume vuole appunto rivolgersi ad una tale classe di lettori, a quella classe cioè che comprende sostanzialmente gli Ingegneri (non specializzati) ed i Tecnici in generale, e non esclude gli Studenti di Scuole medie, segnatamente quelli dei nostri Istituti Tecnici Industriali (sezione radiotecnica).

Chi vuole proficuamente accingersi alla lettura di questo libro deve avere una certa familiarità coi principi di Elettrologia e con la teoria e la tecnica dei circuiti elettrici a correnti alternate, almeno limitatamente a quelli di tipo più semplice, quali si sogliono considerare nella ordinaria Elettrotecnica. Tuttavia, la necessità di allargare il campo di tali nozioni alle più complesse combinazioni che si incontrano nella tecnica radio ha consigliato di raccogliere le nozioni stesse in una prima Parte, dedicando poi la seconda alla Radiotecnica propriamente detta, o meglio a quella parte di essa che riguarda le radiocomunicazioni di carattere telegrafico e telefonico. E, per rendere poi il volume più accessibile agli Studenti di Istituti Tecnici, ho creduto opportuno raccogliere in una Appendice finale quei richiami e complementi di carattere matematico che esulano dal contenuto dei programmi di insegnamento delle Scuole secondarie, ma che sono da ritenersi necessari per chi vuole raggiungere un rapido orientamento senza essere costretto al continuo sforzo di « girare attorno » in modo più o meno artificioso alle difficoltà di indole matematica.

Per quanto è possibile, ho cercato di sfruttare i metodi con i quali si sogliono esaminare le questioni dell'Elettrotecnica ordinaria, ritenendo che ciò faciliti al lettore la comprensione intima dei fatti più salienti e fondamentali, in quanto gli viene consentito di inquadrarli in un campo a lui già noto. Per non rendere troppo ingombrante il volume ed evitare al tempo stesso le sempre dannose digressioni, ho indicato, ovunque ciò appariva utile, i richiami ai miei « Elementi di Elettrotecnica generale » in corso di pubblicazione presso la Casa Editrice Zanichelli.

Allo scopo di rendere più piana e proficua la lettura, ho cercato di ridurre al minimo gli sviluppi di carattere matematico. Di alcuni per altro non si può fare a meno, e per essi, dovunque possibile, ho evitato di esporre i prolissi « passaggi », limitandomi all'indicazione di quelli che involgono qualche artificio non facilmente indovinabile. È invero mia opinione che i passaggi sono inutili per chi li sa fare, e per contro non giovano ad insegnare matematica a chi non la sa, mentre certamente, sia per gli uni che per gli altri, essi servono spesso a far perdere il filo del ragionamento fisico e tecnico.

Le direttive che mi hanno guidato, e che più sopra ho esposto nelle loro linee principali, fanno sì che il libro potrà apparire non scevro di lacune. Al qual proposito tengo a precisare che volutamente mi sono astenuto dall'entrare in talune questioni, segnatamente quelle per le quali la Scienza non si è ancora definitivamente pronunciata, intendendo che questo volume, mediante una esposizione discretamente piana e, per quanto possibile, rigorosa, dei cardini di una scienza la cui precisa comprensione presenta non lievi difficoltà concettuali, debba essenzialmente servire a preparare la mente dello studioso, mettendolo in grado di affrontare successivamente con profitto la lettura di trattati speciali e di memorie originali.

L'opera vuole pertanto essere considerata di carattere essenzialmente didattico. Per quanto specialmente riguarda la sua utilizzazione presso gli Istituti Tecnici Industriali, è doveroso dichiarare che essa contiene ben più di quanto i programmi strettamente richiedono. Ciò però non dovrebbe nuocere, perchè ogni Docente potrà assai facilmente valutare quali siano le questioni che conviene trattare a fondo, e quali quelle su cui è lecito dare soltanto un cenno, se non anche sorvolare del tutto. Inoltre, dato tale carattere del libro, mi sono ritenuto dispensato dal corredarlo di indicazioni bibliografiche.

Desidero qui esprimere la mia viva riconoscenza agli ingg. Edmondo Fiegna e Mario Mariani, che mi hanno efficacemente coadiuvato nella revisione dei calcoli e delle bozze. Un ringraziamento assai sentito voglio poi indirizzare alla Casa Zanichelli che, fedele alle sue tradizioni, ha signorilmente curato l'edizione in ogni particolare.

CESARE RIMINI

Bologna, dicembre 1934.

PREFAZIONE ALLA SECONDA EDIZIONE

Il largo consenso che ha onorato la prima edizione dei miei « Elementi di Radiotecnica generale » ha dimostrato che la mia fatica non era stata vana. L'accoglienza che, superando ogni più rosea previsione, il libro ha avuto specialmente negli strati culturalmente più elevati, mi ha frattanto convinto della opportunità che in esso venissero trattate più diffusamente e con maggiore profondità talune questioni di carattere fondamentale. Seguendo tale ordine di idee, ho completamente rielaborato i capitoli riguardanti gli elementi circuitali, i circuiti a costanti concentrate e distribuite, i tubi elettronici, la propagazione delle onde elettromagnetiche, le antenne, e ritoccato alcuni altri. Naturalmente, ciò mi ha costretto a far ricorso a mezzi analitici non del tutto elementari; d'altra parte è logico ritenere che il lettore desideroso di raggiungere una seria preparazione in materia non può essere sprovvisto di adeguata preparazione matematica. In relazione a tali ampliamenti, ho radicalmente modificato l'Appendice che chiude il volume, riassumendo in essa molte nozioni di carattere matematico e fisico-matematico, in quella misura che mi è parsa strettamente necessaria per evitare al lettore il disturbo di ricercarle in altre opere.

Il titolo del libro vuole in qualche modo ricordare che il suo contenuto mira soltanto ad esporre i principi scientifici che governano le svariate applicazioni della tecnica radio; pertanto gli accenni di carattere tecnico contenuti negli ultimi capitoli non vogliono avere altro scopo che quello di fornire concreti esempi di impostazione delle più essenziali questioni pratiche.

CESARE RIMINI

Bologna, novembre 1938.

AVVERTENZA

Per effetto di deprecabili (e, ad onor del vero, da ogni onesto italiano deprecate) disposizioni legislative, fu a suo tempo impedita la pubblicazione del presente volume, ed ulteriori ritardi furono poi causati dalle gravi difficoltà dell'immediato dopoguerra.

Molti anni sono così trascorsi dall'epoca (1938) in cui il manoscritto è stato elaborato, ma, dato il carattere generale degli argomenti in esso trattati, ritengo che gli studiosi dell'appassionante disciplina non lo troveranno del tutto inutile.

Nella speranza che essi vogliano riserbargli quel favore con cui hanno accolto la precedente edizione, compio il grato dovere di rinnovare il mio più cordiale ringraziamento alla Casa Editrice, che in un momento singolarmente difficile ha posto ogni cura per una decorosa presentazione del volume.

C. R.

Bologna, febbraio 1948.

INDICE DELLE MATERIE

PARTE PRIMA

CAPITOLO QUARTO. – *Reti di impedenze. – Quadripoli.*

CAPITOLO QUINTO. – *Circuiti elettrici a costanti distribuite.*

CAPITOLO SESTO. – *Applicazioni varie. – Trasformatori. – Filtri.*

PARTE SECONDA

CAPITOLO DECIMO. – *Generatori a scintilla e ad arco. – Alternatori ad alta frequenza.*

CAPITOLO DECIMOPRIMO. – *Generatori differenziali (convertitori) a triodi.*

Capitolo Decimoterzo. – *Stazioni radiotrasmittenti e radioriceventi.*

CAPITOLO DECIMOQUARTO. – *Radiocomunicazioni direttive. – Cenni di radiogoniometria.*

APPENDICE

A) Richiami e complementi di matematica.

B) Vettori. – Operatori vettoriali. – Potenziale.

C) Principi della teoria di Maxwell.

PARTE PRIMA

CAPITOLO PRIMO

RICHIAMI DI ELETTROMAGNETISMO E DI ELETTROSTATICA

1. - Energia magnetica. — Come è noto dagli Elementi di Elettrotecnica (El., V, 8), la energia di un campo magnetico è localizzata in tutto lo spazio, ed il suo importo è di $\frac{HB}{2}\,dv$ joule per ogni elemento di volume dv(mc) circostante ad un punto P in cui l'intensità del campo H (amp./m) e l'induzione B (Wb/m²) abbiano la stessa direzione, il che in pratica sempre si verifica quando B è l'induzione prodotta dal campo H.

Ma per maggiore generalità vogliamo ora qui considerare una espressione dello stesso tipo, in cui B possa eventualmente rappresentare l'induzione prodotta da un *altro* campo. A tale considerazione si è necessariamente condotti quando ad es. si studii — come vogliamo ora qui fare — la energia magnetica pertinente ad un sistema di più correnti.

Fig. 1

Per es., nel caso di due correnti i_1 e i_2, si ha che, detti H_1 e H_2 i campi parziali dovuti a ciascuna di esse (fig. 1), in ogni punto P dello spazio si avrà il campo risultante H componendo vettorialmente H_1 con H_2, cosicchè risulta:

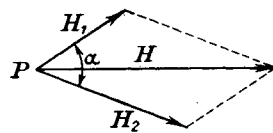
$$H^2 = H_1^2 + H_2^2 + 2H_1H_2 \cos\alpha\,,$$

essendo α l'angolo formato dalle direzioni di H_1 ed H_2. La induzione B in P sarà analogamente data da:

$$B^2 = (\mu H)^2 = B_1^2 + B_2^2 + 2B_1B_2 \cos\alpha\,,$$

essendo $B_1 = \mu H_1$, $B_2 = \mu H_2$ le induzioni pertinenti ad H_1 ed H_2.

Ne segue che, per calcolare l'energia complessiva, dovremo fare la somma (integrale) di termini come:

$$\frac{HB}{2}\,dv = \mu\,\frac{H^2}{2}\,dv\,,$$

cioè valutare i quattro integrali (estesi all'intero spazio):

$$E_{11} = \int \frac{H_1 B_1}{2} dv = \int \mu \frac{H_1^2}{2} dv \,, \quad E_{22} = \int \frac{H_2 B_2}{2} dv = \int \mu \frac{H_2^2}{2} dv \,,$$

$$E_{12} = \int \frac{H_1 B_2}{2} \cos a \, dv = \int \mu \frac{H_1 H_2}{2} \cos a \, dv \,,$$

$$E_{21} = \int \frac{H_2 B_1}{2} \cos a \, dv = \int \mu \frac{H_1 H_2}{2} \cos a \, dv \,.$$

Essi corrispondono rispettivamente alle energie proprie E_{11} ed E_{22} dei campi delle due correnti i_1 ed i_2, ed alla così detta *energia mutua* dei due campi stessi, misurata da:

$$2E_{12} = 2E_{21} = E_{12} + E_{21} \,.$$

Si ha quindi che l'energia totale vale:

$$E = E_{11} + E_{22} + 2E_{12} \,,$$

cioè uguaglia la somma delle energie proprie e della energia mutua.

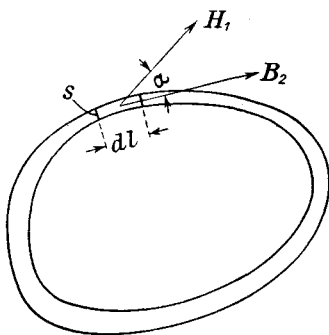



Fig. 2

Il semplice esame delle espressioni scritte mostra:

1º) che l'energia propria si ottiene dalla mutua supponendo che i due campi a questa interessati vengano a coincidere (e dividendo il risultato per 2);

2º) che nella definizione di energia mutua i due campi entrano simmetricamente, poichè, come sopra è stato osservato, si ha $E_{12} = E_{21}$.

Potremo quindi limitare le nostre considerazioni alle espressioni del tipo energia mutua [1].

Innanzi tutto facciamo vedere che alla espressione

$$\int \frac{H_1 B_2}{2} \cos a \, dv$$

può darsi un aspetto assai semplice ed espressivo, eseguendo effettivamente l'integrazione indicata, mediante opportuno raggruppamento degli elementi di volume dv.

A tale scopo, prendiamo a considerare un tubo del vettore B_2 (fig. 2), lungo il quale, come è noto, il flusso attraverso qualunque sezione ha un valore costante, che indicheremo con φ_2. Se scomponiamo il tubo stesso

[1] Si osservi che, mentre l'energia propria è sempre positiva, l'energia mutua può anche essere negativa.

in tronchi assimilabili a prismi retti di base s (in generale variabile da punto a punto dell'asse del tubo) e altezza dl, tenuto presente che $B_2 s$ vale costantemente φ_2, la parte del nostro integrale che si riferisce a tale tubo vale:

$$\frac{\varphi_2}{2} \oint H_1 \cos \alpha \, dl \, .$$

Ora, l'integrale $\oint H_1 \cos \alpha \, dl$ equivale alla circuitazione (App., B, 2) del vettore H_1 lungo l'intero asse; e, poichè questo è necessariamente una curva chiusa, il risultato dell'operazione è $\pm i_1$ o 0 secondo che tale curva è

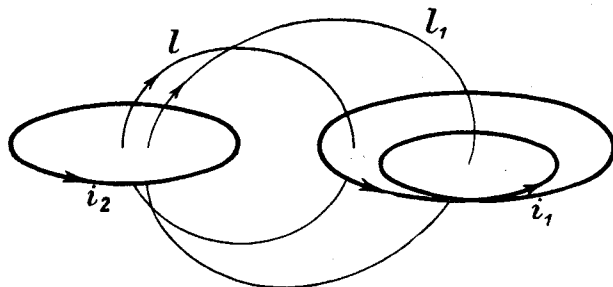



Fig. 3

concatenata (in un senso o nell'altro) con la corrente i_1 oppure no (cfr. El., V, 12).

Ne segue che la intera E_{12} corrisponderà al prodotto di $\frac{i_1}{2}$ per il flusso Φ_{12} dell'induzione B_2 (o numero di linee generate da i_2) che si concatena con la corrente i_1, numero da intendersi positivo o negativo secondo che la direzione prevalente delle linee costituenti Φ_{12} corrisponde ad un flusso concorde o discorde con la corrente i_1 (cioè concorde o discorde col flusso *proprio* della corrente i_1). Naturalmente, nell'effettuare tale computo, ogni tubo magnetico deve computarsi tante volte quanto è il numero dei suoi concatenamenti con i_1. Per es., nel caso della fig. 3, se la linea l rappresenta un flusso elementare φ_2, il contributo all'energia mutua ad essa dovuto sarebbe di $-\frac{1}{2} i_1 \varphi_2$; per una linea come l_1, lo stesso contributo sarebbe $-\frac{1}{2} i_1 2\varphi_2$.

Partendo da E_{21}, si troverebbe che la stessa energia dianzi calcolata è misurata anche da

$$\frac{1}{2} i_2 \Phi_{21} \, ,$$

essendo Φ_{21} valutato in modo analogo relativamente all'induzione B_1 ed alla corrente i_2.

Per tali energie, che riescono senz'altro misurate in joule, essendo i flussi misurati in weber (1 weber = 10^8 gauss-cm²), si avrà in definitiva:

$$(1)\quad E_{11}=\frac{1}{2}i_1\Phi_{11}\,,\quad E_{22}=\frac{1}{2}i_2\Phi_{22}\,,\quad E_{12}=E_{21}=\frac{1}{2}i_1\Phi_{12}=\frac{1}{2}i_2\Phi_{21}\,,$$

avendo indicato con Φ_{11}, Φ_{22} i flussi delle induzioni B_1 e B_2 attraverso i circuiti *1* e *2* rispettivamente; e per l'energia totale E l'espressione:

$$E=\frac{1}{2}[i_1(\Phi_{11}+\Phi_{12})+i_2(\Phi_{21}+\Phi_{22})]=\frac{1}{2}(i_1\Phi_1+i_2\Phi_2)\,,$$

dove Φ_1 e Φ_2 rappresentano i *flussi totali* (dovuti cioè sia ad i_1 che ad i_2) concatenati rispettivamente col circuito *1* e col circuito *2*.

In generale per n circuiti con le correnti $i_1, i_2, \ldots, i_n$, si ha:

$$(2)\qquad E=\frac{1}{2}(i_1\Phi_1+i_2\Phi_2+\ldots+i_n\Phi_n)\,,$$

ed al secondo membro si può dare la forma di somma di un gruppo di n termini del tipo $\frac{1}{2}i_1\Phi_{11}$ rappresentanti le energie proprie dei campi magnetici dovuti alle singole correnti, con un gruppo di altri $\frac{n(n-1)}{2}$ termini del tipo:

$$\frac{1}{2}(i_r\Phi_{rs}+i_s\Phi_{sr})=i_r\Phi_{rs}=i_s\Phi_{sr}\,,$$

corrispondenti alle energie mutue degli stessi campi considerati due a due.

2. - Coefficienti di induzione propria e mutua. — Come è noto (El., V, 27), si definisce il coefficiente d'induzione propria (o induttanza) L_1 di un circuito come *1* quale rapporto del flusso Φ_{11} alla corrente i_1:

$$(3)\qquad L_1=\frac{\Phi_{11}}{i_1}\,,$$

e tale coefficiente risulta misurato in henry (o ohm-sec) per Φ_{11} in weber ed i_1 in amp. Ed analogamente per definire il coefficiente di induzione mutua (o mutua induttanza) M di due circuiti *1* e *2* si assume il rapporto:

$$(4)\qquad M=\frac{\Phi_{12}}{i_2}\,,\quad \text{che è anche}\quad =\frac{\Phi_{21}}{i_1}\,,$$

giacchè, come si rileva dalle precedenti considerazioni, è $i_1\Phi_{12}=i_2\Phi_{21}$.

Di tali coefficienti si possono anche dare definizioni equivalenti, considerando le f. e. m. indotte dalle variazioni dei flussi che entrano nelle definizioni precedenti.

Infatti, pel coefficiente di induzione propria L_1 del circuito *1*, pel quale, come sopra, si ha:

$$\Phi_{11} = i_1 L_1 ,$$

risulta che, variando i_1 di di_1 nel tempo dt, la f. e. m. indotta $\varepsilon_1 \left(= -\frac{d\Phi_{11}}{dt}\right)$ è in valore assoluto uguale ad $L_1 \frac{di_1}{dt}$, da cui discende la ben nota definizione contenuta nella formola:

$$L_1 = -\frac{\varepsilon_1}{\frac{di_1}{dt}}, \tag{5}$$

come pel coefficiente di induzione mutua la analoga:

$$M = -\frac{\varepsilon_{12}}{\frac{di_2}{dt}} \quad \text{oppure} \quad M = -\frac{\varepsilon_{21}}{\frac{di_1}{dt}}, \tag{6}$$

essendo $\varepsilon_{12} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt}$, $\varepsilon_{21} = -\frac{d\Phi_{21}}{dt}$ le f. e. m. indotte nei circuiti *1* e *2* per una variazione di_2, rispettivamente di_1, della corrente i_2, rispett. i_1.

Introducendo poi le (3) e (4) nella (1) si deducono per i coefficienti L_1, L_2, M le definizioni:

$$L_1 = \frac{2E_{11}}{i_1^2}, \quad L_2 = \frac{2E_{22}}{i_2^2}, \quad M = \frac{2E_{12}}{i_1 i_2}, \tag{7}$$

cioè l'induttanza propria (henry) viene a corrispondere al doppio del rapporto dell'energia magnetica propria (joule) al quadrato della corrente (amp.) e l'induttanza mutua al rapporto dell'energia mutua al prodotto delle due correnti interessate.

Facendo uso dei coefficienti di induzione, la espressione della energia di un sistema di due correnti si scrive:

$$2E = L_1 i_1^2 + 2M i_1 i_2 + L_2 i_2^2 .$$

Generalmente, per n correnti, si avrà:

$$2E = M_{11} i_1^2 + M_{22} i_2^2 + \ldots + 2M_{12} i_1 i_2 + 2M_{13} i_1 i_3 + \ldots,$$

avendo indicato con $M_{rs} = M_{sr}$ il coefficiente di induzione mutua dei due circuiti r ed s, e, per simmetria, con M_{rr} il coefficiente d'induzione propria (o di autoinduzione) L_r del circuito r.

Tale espressione può intendersi dedotta dalla (2) introducendo per i flussi totali $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ i loro valori in funzione delle correnti i_1, $i_2, \ldots i_n$, cioè:

$$\left\{\begin{array}{l} \Phi_1 = M_{11}\, i_1 + M_{12}\, i_2 + \ldots + M_{1n}\, i_n , \\ \Phi_2 = M_{21}\, i_1 + M_{22}\, i_2 + \ldots + M_{2n}\, i_n , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Phi_n = M_{n1}\, i_1 + M_{n2}\, i_2 + \ldots + M_{nn}\, i_n . \end{array}\right. \tag{8}$$

Le definizioni (3), (4), (5), (6) e (7) suggeriscono altrettanti mezzi di procedere alla effettiva determinazione dei coefficienti L ed M. Ma quel che è particolarmente interessante si è che da alcune di esse, segnatamente dalle (7), si possono, almeno in via teorica, e limitatamente a casi particolarmente semplici, trarre delle formole atte al *calcolo* degli L ed M in funzione degli elementi geometrici dei circuiti, analoghe a quelle che fanno ad es. conoscere le resistenze dei conduttori filiformi, o le capacità dei condensatori di forme geometriche semplici.

A ciò perveniamo mediante la seguente osservazione fondamentale. La espressione

$$2E_{12} = i_1 \Phi_{12}$$

dell'energia mutua coincide con quella del lavoro meccanico che si deve spendere (o che si può produrre, secondo il segno di Φ_{12}) per annullare Φ_{12} *mentre le correnti* i_1 *e* i_2 *rimangono costanti.*

Si può dunque pensare di pervenire alla espressione di $2E_{12}$ valutando direttamente tale lavoro.

Consideriamo dapprima il caso di due conduttori di lunghezze l_1 e l_2 (m) infinitesime — e che quindi si possono considerare rettilinei — e sedi di correnti i_1 ed i_2 (amp.). Naturalmente, per quanto noi qui consideriamo i soli tratti l_1 ed l_2, si dovrà pensare che essi facciano parte di circuiti completi.

Tuttavia, anche in questo caso semplice, la valutazione che ci interessa non può essere fatta in modo rigoroso per via elementare. Pertanto ci limiteremo qui ad asserire che il risultato cui si perviene è dato dall'espressione:

$$\frac{\mu}{4\pi} i_1 i_2 \frac{l_1 l_2}{r} \cos \varepsilon \quad \text{(joule) (1),}$$

(1) Di questa formola, di cui verrà data in seguito (App., C, 2) una dimostrazione completa, vogliamo qui, limitatamente al caso particolare in cui i due elementi l_1 ed l_2 sono complanari, dare una giustificazione elementare, cui perveniamo ammettendo che, per l'annullamento di Φ_{12}, l'allontanamento indefinito dei due segmenti l_1 ed l_2 debba effettuarsi mediante traslazione in senso normale ad uno di essi.

Siano O_1 ed O_2 le origini dei due segmenti infinitesimi l_1 ed l_2, e poniamo $O_1O_2 = r$, $(\widehat{l_1, r}) = \theta$, $(\widehat{l_1' l_2}) = \varepsilon$, essendo l_1' parallela ad l_1 (vedi fig. a pag. seg.).

Il campo H (amp./m) prodotto in O_2 dall'elemento l_1 percorso dalla corrente i_1 (amp.). vale (El., V, 11):

$$\frac{l_1 i_1 \operatorname{sen} \theta}{4\pi r^2} ;$$

quindi la corrispondente induzione B è data in weber/m² da:

$$B = \mu \frac{l_1 i_1 \operatorname{sen} \theta}{4\pi r^2} ,$$

e la direzione è normale al piano del disegno.

L'azione magnetoelettrica f esercitata da l_1 su l_2 è quindi diretta, nel piano del di-

dove r (m) rappresenta la distanza fra gli elementi l_1 ed l_2.

Da essa si deduce che

$$\frac{\mu}{4\pi}\frac{l_1 l_2}{r}\cos\varepsilon$$

rappresenta la misura in henry del « coefficiente di mutua induzione dei due elementi rettilinei infinitesimi l_1 ed l_2 ». Naturalmente, questa è una locuzione abbreviata per esprimere che la mutua induttanza di due circuiti si calcola eseguendo la sommazione doppia (integrale doppio) di espressioni come quella scritta, dove l_1 successivamente assume i valori pertinenti ai vari tratti elementari costituenti il primo circuito, ed analogamente l_2 pel secondo, cioè è:

$$M = \oint_{L_1}\oint_{L_2}\frac{\mu}{4\pi}\frac{dl_1 dl_2}{r}\cos\varepsilon ,$$

---

segno, normalmente ad l_2 ed il suo valore in joule/m è espresso da (El., V, 18):

$$f = Bl_2 i_2 = \frac{\mu\, l_1 l_2\, i_1\, i_2 \operatorname{sen}\theta}{4\,\pi\, r^2} .$$

Vogliamo ora valutare il lavoro occorrente per spostare l_2 di un tratto ds in direzione normale ad l_1, cioè per portare l'origine di l_2 da O_2 in O_2'. All'uopo basterà moltiplicare ds per la componente di f secondo ds, con che si ottiene:

$$\frac{\mu\, l_1\, l_2\, i_1\, i_2 \operatorname{sen}\theta\cos\varepsilon}{4\,\pi\, r^2}\, ds \text{ (joule)} .$$

Ora, il segmento O_1O_2' corrisponde al valore di r riferito alla posizione l_2' di l_2, cioè ad $r + dr$, essendo dr la variazione di r per effetto dello spostamento predetto. Se da O_2 abbassiamo la normale $O_2\,O_2''$ ad $O_1\,O_2'$, si ha sensibilmente $dr = O_2''\,O_2'$, e quindi dal triangolo rettangolo $O_2O_2O_2''$ si deduce $dr = ds \operatorname{sen}\theta$. Ne segue in definitiva, per il lavoro predetto, il valore:

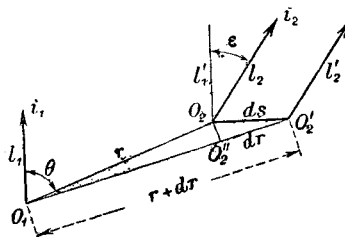
$$\mu\, l_1\, l_2\, i_1\, i_2 \cos\varepsilon\, \frac{dr}{4\,\pi r^2} .$$

Siccome è $-\dfrac{dr}{r^2} = d\left(\dfrac{1}{r}\right)$, tale espressione può scriversi:

$$-\frac{\mu}{4\,\pi} i_2\, i_1\, l_1\, l_2 \cos\varepsilon\, d\left(\frac{1}{r}\right) .$$

Integrando, si deduce che il lavoro occorrente per portare il secondo elemento dalla distanza r_1 alla distanza r_2, sempreché, ben inteso, durante il moto non variino le correnti, vale:

$$\frac{\mu}{4\,\pi}\, i_1\, i_2\, l_1\, l_2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\cos\varepsilon .$$

Supponendo $r_1 = r$, $r_2 \to \infty$, si ha la formola del testo.

essendo il secondo membro un integrale doppio curvilineo, esteso alle linee L_1, L_2 di corrente, il cui integrando è funzione delle coppie di punti dei due circuiti.

Questa è la così detta *formola di Neumann.*

Ricordando la definizione (6) del coefficiente di m. i., si può asserire che, se nel tempo dt la corrente i_1 varia di di_1, la tensione indotta ai capi di l_2 vale:

$$-\mu \frac{l_1 l_2 \cos \varepsilon}{4\pi r} \frac{di_1}{dt} \text{ (volt)} .$$

Al solito, con ciò deve intendersi che la d. d. p. ai capi di l_2 per una variazione di_1 della corrente i_1 in un circuito *1* di cui l_1 è un generico tronco (infinitesimo), si ottiene facendo la somma (integrale) di tutte le d. d. p. analoghe a quella scritta, valutate per i singoli tronchi predetti.

3. - Calcolo di induttanze. — La calcolazione delle mutue induttanze per questa via può essere condotta a termine in non molti casi relativi a forme geometriche semplici dei circuiti interessati, come ora mostreremo. Comunque i principi esposti nel n. prec. sono indispensabili per formarsi una precisa nozione del significato di mutua induttanza.

Per l'induttanza propria, basterà supporre che i due circuiti coincidano, e dimezzare il risultato. Senonchè qui si presenta una difficoltà pel fatto che infiniti elementi dell'integrale da considerarsi divengono infinitamente grandi, in quanto il denominatore r si annulla ogni qual volta capita di considerare una coppia costituita da due elementi dl_1 e dl_2 coincidenti. Tale difficoltà è però soltanto apparente, perchè essa dipende dall'avere implicitamente considerato circuiti aventi forma di fili di sezione nulla (infinitesima), nel qual caso occorre ritenere infinitesima anche la corrente in essi circolante (altrimenti si avrebbe l'assurdo fisico di una densità di corrente infinita), cosicchè in certo qual modo si ha una specie di compensazione fra l'infinitamente piccolo del numeratore con quello del denominatore.

Tuttavia l'eliminazione effettiva di tale difficoltà non riesce agevole per il fatto che a priori non è nota la distribuzione della corrente nei vari filetti in cui ciascun conduttore può considerarsi suddiviso (cfr. in proposito i nn. 2 e segg. del Cap. seg.). Si potrà in ogni caso partire da una determinata ipotesi sulla legge della distribuzione, ma bisognerà poi non dimenticare che i valori di L e di M così trovati sono da intendersi validi subordinatamente all'avveramento della supposta legge.

La più semplice ipotesi che può farsi è quella di ritenere la corrente distribuita uniformemente nella sezione del conduttore, il che, come si vedrà nel Cap. seg., non può avvenire se non nel caso di correnti continue (o almeno, in pratica, assai lentamente variabili). Ciò equivale a ritenere ogni conduttore, che convoglia una certa corrente i, composto

dall'aggregazione (in parallelo) di n conduttori elementari di sezione n volte minore e ciascuno convogliante una corrente $\frac{i}{n}$, e far poi tendere n all'infinito. Se di ciascuna coppia r, s di tali conduttori (filiformi) si sa calcolare l'induttanza mutua M_{rs}, e se di una tale M_{rs} si sa calcolare il limite $M_{rr} = M_{ss}$ per r coincidente con s, si avrà, per l'energia magnetica E pertinente al dato conduttore percorso dalla corrente i:

$$E = \frac{i^2}{2} \lim_{n \to \infty} \frac{M_{11} + M_{12} + \dots + M_{1n} + M_{21} + M_{22} + \dots + M_{2n} + \dots}{n^2},$$

da cui, per l'induttanza L del conduttore stesso, discende il valore

$$L = \frac{2E}{i^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{M_{11} + \dots + M_{1n} + M_{21} + \dots + M_{2n} + \dots}{n^2},$$

mentre per la mutua induttanza di due conduttori si avrà similmente:

$$M = \lim_{\substack{m \to \infty \\ n \to \infty}} \frac{\Sigma\Sigma M_{rs}}{mn},$$

dove M_{rs} è l'induttanza mutua fra l'elemento r^{mo} del primo conduttore e l's^{mo} del secondo, essendo i due conduttori suddivisi l'uno in m, l'altro in n elementi.

È chiaro che, qualora si potesse ritenere nota la effettiva distribuzione della corrente totale nei vari filetti, analogo procedimento consentirebbe di definire l'induttanza propria L (risp. mutua M) corrispondente alla distribuzione stessa. Basterebbe, in luogo della media aritmetica, considerare la media *ponderata*, avendo attribuito a ciascun filetto un coefficiente di peso proporzionale alla densità della corrente in esso. Si mette così in evidenza quanto asserito, che cioè tale L (risp. M) varierà al variare della legge di distribuzione.

Per vedere come si possono condurre i calcoli nei casi concreti, cominciamo col calcolare la mutua induttanza di due fili (infinitamente sottili) paralleli, situati come i lati opposti di un rettangolo di dimensioni l (lunghezza dei fili) e d (distanza fra i fili). Essendo per ogni coppia di elementi $\varepsilon = 0$, si avrà senz'altro:

$$M = \frac{\mu}{4\pi} \int_0^l \int_0^l \frac{dx dy}{\sqrt{d^2 + (x-y)^2}}, \tag{9}$$

essendo x, y ascisse contate da O, O' (fig. 4). Si trova così:

$$M = \frac{\mu}{4\pi} \int_0^l \log \frac{l + \sqrt{(l-y)^2 + d^2} - y}{-y + \sqrt{y^2 + d^2}} dy =$$

$$= \frac{\mu}{4\pi} \left\{ 2l \log \frac{\sqrt{l^2 + d^2} + l}{d} - 2\left(\sqrt{l^2 + d^2} - d\right) \right\},$$

che, per d piccolo in confronto ad l, può semplificarsi in

$$M \cong \frac{\mu}{4\pi} 2l\left(\log\frac{2l}{d} - 1\right).$$

Secondo quanto è stato sopra detto in generale, questa formola potrà utilizzarsi per calcolare la induttanza L di un conduttore rettilineo di lunghezza l, ponendo tale L uguale al lim $\frac{\Sigma M_{rs}}{n^2}$, essendo M_{rs} la mutua induttanza, come sopra calcolata, fra una coppia di fili elementari paralleli, ed n il numero delle coppie considerate. Siccome nella precedente espressione di M l'unico elemento che varia al variare della coppia è la distanza d, che figura in modo additivo sotto il segno di logaritmo, si avrà senz'altro:

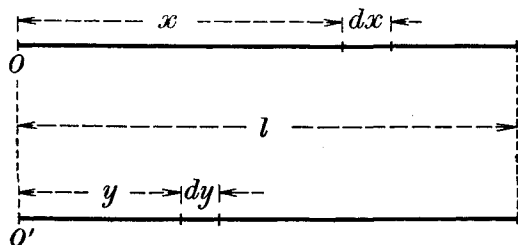



Fig. 4

$$L = \frac{\mu}{4\pi} 2l\left(\log\frac{2l}{d_m} - 1\right),$$

dove con d_m si è indicata la media *geometrica* delle distanze relative alle varie coppie, cioè quella lunghezza il cui logaritmo è la media aritmetica dei logaritmi delle varie distanze d_i, vale a dire definita da:

$$\log d_m = \lim \frac{\log d_1 + \log d_2 + \ \ldots + \log d_{n^2}}{n^2}$$

$$\text{oppure} \quad d_m = \lim \left(d_1 d_2 \ldots d_{n^2}\right)^{\frac{1}{n^2}}.$$

La formola generale così trovata dà luogo a diverse formole particolari, a seconda della forma della sezione del conduttore. Essa può anche prestarsi allo studio del valore di L per diverse leggi di distribuzione di corrente, quando con d_m si intenda una conveniente media geometrica *ponderata*, secondo quanto precedentemente spiegato.

Per distribuzione uniforme, il Calcolo dimostra che, nel caso di sezione circolare di raggio r, si ha

$$\log d_m = \log r - \frac{1}{4}$$

e quindi

$$L = \frac{\mu}{4\pi} 2l\left(\log\frac{2l}{r} - \frac{3}{4}\right);$$

per una sezione rettangolare di lati a e b si trova

$$d_m = 0{,}223(a + b)\ ,$$

e così via.

Nel caso di sezione circolare di raggio r, qualora si ritenga la corrente localizzata alla superficie esterna, con distribuzione uniforme su di essa (il che, come vedremo nel Cap. seg., corrisponde prossimamente al caso di conduttori percorsi da correnti ad altissima frequenza), si trova $d_m = r$, quindi:

$$L = \frac{\mu}{4\pi} 2l \left(\log \frac{2l}{r} - 1 \right).$$

Basta questo esempio per mettere in evidenza il fatto precedentemente indicato, che cioè l'induttanza non può, a rigore, ritenersi un parametro caratteristico del conduttore, ma essenzialmente dipendente dalla legge di distribuzione della corrente (la quale legge alla sua volta è in generale legata a quella della variazione nel tempo della corrente stessa). È però interessante osservare che, nel caso precedentemente trattato, la differenza fra i due valori di L è tanto meno notevole quanto più grande è la lunghezza l del conduttore in confronto alle sue dimensioni trasversali. Per es., nel caso di conduttore a sezione circolare, per $\frac{2l}{r} = 1000$, essendo $\log \frac{2l}{r} = 3 \cdot 2{,}30 = 6{,}9$, la differenza relativa fra le due induttanze calcolate l'una per distribuzione uniforme nella sezione, l'altra per localizzazione superficiale, è $\frac{0{,}25}{6{,}15}$, cioè del 4%. Siccome nel secondo caso è nullo il contributo fornito ad L dalle parti interne del conduttore, si può dire che nel caso della distribuzione uniforme (corrente continua), solo il 4% dell'energia magnetica è localizzata entro il conduttore, ed il rimanente 96% è distribuito nello spazio circostante.

Con procedimenti del tutto analoghi a quelli indicati, si può condurre il calcolo della induttanza di un circuito rettangolare, di un quadrato, di un cerchio. Nell'ipotesi di conduttori a sezione circolare di raggio r e di distribuzione superficiale della corrente, si trova:

pel quadrato di perimetro l: $L = \frac{\mu}{4\pi} 2l \left(\log \frac{2l}{r} - 2{,}853 \right)$;

pel cerchio di perimetro l: $L = \frac{\mu}{4\pi} 2l \left(\log \frac{2l}{r} - 2{,}45 \right)$.

4. - Induttanza di circuiti incompleti. - Induttanze parziali. — Un'altra importante osservazione relativa ai risultati conseguibili con la formola di Neumann, è quella che scaturisce dalle considerazioni seguenti, che occorre aver bene presenti per non cadere in equivoci nella interpretazione dei risultati stessi.

Quando si scrive ad es. una formola come la (9) e si dichiara che essa dà il valore della mutua induttanza di due fili, a tale locuzione bisogna attribuire soltanto questo significato, che se M' è la somma delle mutue

induttanze di tutte le altre coppie di tronchi ricavabili dai due circuiti di cui i due fili fanno parte, la mutua induttanza dei due circuiti vale $M + M'$. E quando, con procedimenti del tipo di quelli indicati nel n. prec., si riesce a calcolare la induttanza di un tratto di circuito — come ad es. sopra si è fatto per un tronco di conduttore rettilineo — è da tenere ben presente che codesta induttanza non è tale che sommata con le analoghe degli altri tronchi costituenti con esso un circuito chiuso dia la induttanza di questo; in altri termini, la induttanza non gode della proprietà additiva.

Invero, per più circuiti connessi in serie e percorsi quindi dalla stessa corrente i, abbiamo veduto che si ha in generale per la energia magnetica l'espressione:

$$E = \frac{i^2}{2}(L_1 + L_2 + \dots + 2M_{12} + 2M_{13} + \dots),$$

e quindi per il coefficiente d'a. i.:

$$L = L_1 + L_2 + \dots + 2M_{12} + 2M_{13} + \dots$$

(*e non* $L = L_1 + L_2 + \dots$).

In definitiva, anche quando, come nei casi considerati, si riesce a dare una definizione — necessariamente convenzionale — della L delle singole parti di circuito, servendosi della formola di Neumann, non si può dire che la L dell'intero circuito sia la somma di quelle relative alle varie parti.

Siccome però avremo in seguito da considerare anche correnti circolanti in circuiti metallicamente *non chiusi*, per questi la induttanza L non potrà intendersi calcolata se non col procedimento indicato precedentemente, il che val quanto dire che il prodotto di tale L per $\frac{i^2}{2}$ rappresenta effettivamente l'energia magnetica associata al conduttore quando esso è percorso dalla corrente i. Un cospicuo esempio è offerto dagli ordinari circuiti, la cui continuità metallica sia interrotta mediante l'inserzione di un condensatore. In tal caso, cioè quando si ha a che fare con un circuito *quasi chiuso*, l'induttanza non può calcolarsi che coi procedimenti indicati; essa però, come facilmente si comprende, corrisponde con grandissima approssimazione a quella che si potrebbe calcolare ritenendo il circuito completamente chiuso (mediante la soppressione del condensatore), ed è per questo che nelle trattazioni elementari ci si riferisce tacitamente a questa. Ma, a rigore, ci si dovrebbe invece riferire a quella.

Indipendentemente da ciò si può, anche per un circuito chiuso, mediante opportune convenzioni, pensare a delle L parziali definite in modo tale che la loro somma coincida con la L dell'intero circuito, e precisa-

mente a ciò si può pervenire pensando alla definizione di L come rapporto del flusso alla corrente.

Invero, se al contorno di un circuito chiuso immaginiamo appoggiata una superficie, e dividiamo questa in striscie (fig. 5), possiamo intendere che il flusso attraversante una striscia come *abcd*, diviso per la corrente, dia la misura dell'induttanza del tratto di circuito costituito *dalla coppia di tronchi ab* e *cd*. Come si vede, una tale definizione è però legata, sia alla superficie scelta, sia alla suddivisione eseguita su di essa, sia infine al fatto che si debbono necessariamente considerare contemporaneamente due tronchi, percorsi dalla stessa corrente, ma in sensi opposti.

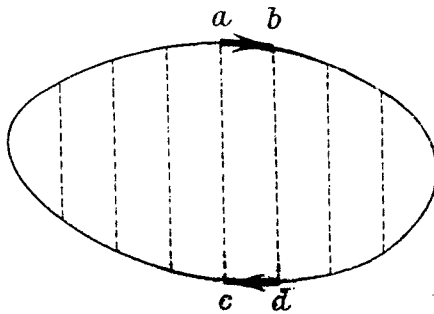



Fig. 5

5. - **Induttanza di una linea a due fili paralleli.** — Nel caso particolare di un circuito costituito da una linea, o coppia di fili, che supponiamo paralleli ed infinitamente lunghi, appare naturale di fare la convenzione che la divisione in striscie si effettui con rette normali ai fili (fig. 6) e si arriva per tale via a definire una ben determinata « induttanza per unità di lunghezza » della linea, che indicheremo con l, di cui ci proponiamo di calcolare il valore.

Fig. 6

All'uopo, occorre premettere che, per ovvie ragioni di simmetria, il campo prodotto da una corrente cilindrica rettilinea indefinita, distribuita in modo simmetrico rispetto al centro della sezione (cioè con densità dipendente soltanto dalla distanza dal centro) coincide, nei punti esterni al conduttore, con quello che si avrebbe qualora la corrente fosse concentrata nell'asse [1].

[1] Ciò può stabilirsi e precisarsi come segue.

Abbiasi una corrente rettilinea indefinita i distribuita uniformemente in un conduttore avente sezione a forma di corona circolare di raggio r e di spessore infinitesimo, talchè ogni arco $d\theta$ convogli una corrente $\frac{i\,d\theta}{2\pi}$, e calcoliamo il campo magnetico da esso generato in un punto qualunque P distante R dall'asse (v. fig. a pag. 17). Il campo dH prodotto dall'elemento $d\theta$ posto in M vale $\frac{i\,d\theta}{4\pi^2\varrho}$ ed è diretto normalmente al segmento $PM = \varrho$. Siccome il relativo vettore — come gli altri che qui avremo a considerare — giace nel piano del disegno, potremo rappresentarlo con un numero complesso avente $\frac{i\,d\theta}{4\pi^2\varrho}$ per modulo ed

Supponiamo ora che la corrente sia localizzata alla superficie dei due conduttori, il che, come più sopra accennato, si verifica sensibilmente nel caso di correnti ad altissima frequenza. Ed osserviamo che le linee di flusso che ci interessano sono tutte quelle che, essendo originate dalle correnti circolanti nell'uno o nell'altro filo, attraversano il solo tratto, di lunghezza corrispondente alla distanza D fra gli assi dei fili (fig. 7), compreso fra i centri delle sezioni di questi, in quanto che, nei tratti esterni a tale segmento, non possono capitare che o linee già considerate nel tratto D, oppure altre che corrispondono a flussi a due a due opposti.

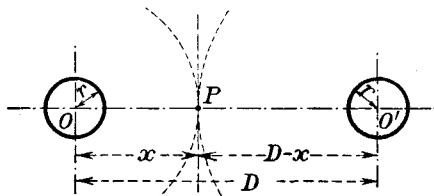



Fig. 7

Riferendoci ad un tronco di lunghezza unitaria, cominciamo con l'osservare che il flusso attraversante la sezione dx posta alla distanza x da O $(r \leq x \leq D)$ e dovuto alla corrente i nel conduttore O, vale

$$\frac{\mu i}{2\pi x}\, dx\,,$$

---

il cui argomento, riferito alla direzione fondamentale $\overrightarrow{PO}$, vale $\alpha + \frac{\pi}{2}$, essendo $\alpha = \widehat{MPO}$, cioè col complesso

$$d\vec{H} = \frac{i\, d\theta}{4\pi^2 \varrho}\, e^{j\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Il segmento $\overrightarrow{PM}$, vettorialmente considerato, rappresenta ovviamente il numero complesso $R + re^{j\theta}$, di cui ϱ ed α sono il modulo e l'argomento, per cui (cfr. App., A, 2) si ha:

$$\varrho = \sqrt{(R + re^{j\theta})(R + re^{-j\theta})}\,, \qquad e^{j\alpha} = \sqrt{\frac{R + re^{j\theta}}{R + re^{-j\theta}}}.$$

Sostituendo questi valori nella precedente, questa diviene

$$d\vec{H} = \frac{i}{4\pi^2}\, \frac{j\, d\theta}{R + re^{-j\theta}} = \frac{i}{4\pi^2}\, \frac{d(e^{j\theta})}{Re^{j\theta} + r} = \frac{i}{4\pi^2 R}\, \frac{d(Re^{j\theta} + r)}{Re^{j\theta} + r}\,,$$

cioè

$$d\vec{H} = \frac{i}{4\pi^2 R}\, d \log (Re^{j\theta} + r)\,.$$

Il campo totale $\vec{H}$ cercato corrisponde evidentemente all'integrale di questa espressione calcolato facendo percorrere ad M l'anello traccia della corrente. Ora, poichè il logaritmo di un numero complesso $Ae^{j\varphi}$ vale $\log A + j\varphi$, si riconosce subito che l'integrale cercato equivale al prodotto di $j\, \frac{i}{4\pi^2 R}$ per la variazione che, lungo il cammino di

perchè $\frac{i}{2\pi x}$ è l'intensità del campo in tale punto. Ne segue che quella parte di flusso che ci interessa e che è dovuta al conduttore O vale

$$\int_r^D \frac{\mu i}{2\pi x}\, dx\,.$$

A questa occorre aggiungere l'altra parte, dovuta al conduttore O', che evidentemente è uguale alla precedente. Pertanto il flusso totale Φ è misurato da

$$\Phi = \frac{\mu i}{\pi} \int_r^D \frac{dx}{x} = \frac{\mu i}{\pi} \log \frac{D}{r}\,.$$

Quindi il valore del cercato coefficiente d'a. i. per unità di lunghezza è:

$$l = \frac{\mu}{\pi} \log \frac{D}{r} \quad (\mathrm{H/m})\,, \tag{10}$$

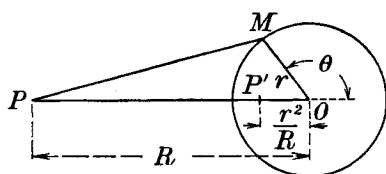
essendo μ misurato, al solito, in henry/m ($\mu = \mu_0 = 1{,}256 \cdot 10^{-6}$ per l'aria).

Qualora la corrente fosse invece uniformemente ripartita nella sezione, al valore dato dalla (10) occorrerebbe aggiungere il contributo dovuto

---

integrazione, subisce l'argomento di $Re^{j\theta} + r$, o, il che fa lo stesso, quello del numero complesso

$$\frac{r}{R}(Re^{j\theta} + r) = re^{j\theta} + \frac{r^2}{R}\,,$$

il quale è manifestamente rappresentabile mediante lo stesso punto M, riferito però ad una origine P' distante $\frac{r^2}{R}$ da O, e quindi interna od esterna al cerchio traccia della corrente secondo che P è esterno od interno al cerchio stesso. D'altra parte, la variazione di quell'argomento vale 2π o 0 secondo che P' è interno o esterno, quindi si conclude che il cercato campo $\vec{H}$ vale

$$j\,\frac{i}{2\pi R} \quad \text{oppure } 0$$

secondo che P è esterno o interno all'anello. Nel primo caso il campo stesso ha la grandezza $\frac{i}{2\pi R}$ e, a causa del fattore j, è diretto normalmente a $\overrightarrow{PO}$, quindi coincide con quello che si avrebbe qualora la corrente fosse concentrata nell'asse dell'anello.

Se la sezione è foggiata a corona circolare di spessore finito, e la densità della corrente è funzione finita della sola distanza dall'asse, decomponendo in anelli elementari di spessore infinitesimo, si conclude che il campo magnetico in un punto a distanza h dall'asse coincide con quello che nello stesso punto produrrebbe una corrente rettilinea concentrata nell'asse e di intensità corrispondente a quella che fluisce nell'*interno* del cilindro di raggio R. In particolare, nei punti interni alla corona il campo magnetico è nullo.

alle linee di flusso aventi raggio $< r$, tenendo poi conto del fatto che ciascuna di esse si concatena soltanto con una parte della corrente totale fluente nel rispettivo conduttore. Si trova allora, per l'induttanza, la seguente espressione [1]

$$l = \frac{\mu_0}{\pi}\left(\log \frac{D}{r} + \frac{\mu_r'}{4}\right) \tag{11}$$

essendo $\mu_r' = \frac{\mu}{\mu_0}$ la permeabilità relativa del materiale costituente i conduttori.

Per una linea costituita da due conduttori cilindrici coassiali (per es. un cavo), di raggi r_1 (interno) ed r_2 (esterno), con un calcolo del tutto analogo si trova che, nell'ipotesi di corrente localizzata alla superficie dei due conduttori, l'induttanza per unità di lunghezza vale

$$l = \frac{\mu}{2\pi} \log \frac{r_2}{r_1} \ (\text{H/m}), \tag{12}$$

essendo μ la permeabilità del mezzo interposto fra i due conduttori.

6. - Campi elettrostatici. - Coefficienti di capacità. — Abbiansi n conduttori *1*, *2*, ... , n, isolati ed immersi in un mezzo dielettrico. Indichiamo con $n + 1$ un ulteriore conduttore che tutti li avvolge, per es. una sfera S di raggio grandissimo (infinito).

---

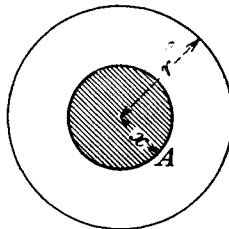
[1] Il relativo calcolo è il seguente: in ogni punto A alla distanza x dal centro il campo vale (cfr. nota a pag. 15):

$$h = \frac{i}{2\pi x},$$

essendo i la corrente convogliata dalla porzione di conduttore interna ad A (tratteggiata in figura), cioè $i = I\frac{x^2}{r^2}$, dove con I si è indicata la corrente totale. Si ha dunque

$$h = \frac{I}{2\pi}\frac{x}{r^2}.$$

L'energia magnetica localizzata nella porzione tubolare di conduttore compresa fra i raggi x ed $x + dx$ è misurata dal semiprodotto di h per $\mu' h$ e pel volume $1 \cdot 2\pi x\, dx$ della porzione, cioè da

$$\frac{\mu' I^2}{4\pi}\frac{x^3 dx}{r^4}.$$

Integrando da 0 ad r, si ottiene per la totale energia magnetica E localizzata nel conduttore il valore $\frac{\mu' I^2}{16\pi}$. Il contributo ad L ad essa dovuto vale $\frac{2E}{I^2}$, cioè $\frac{\mu'}{8\pi}$ e pertanto il contributo totale per i due fili della conduttura è misurato da $\frac{\mu'}{4\pi} = \frac{\mu_r' \mu_0}{4\pi}$.

Se portiamo tali conduttori alle tensioni $V_1, V_2, \ldots, V_n$, misurate in volt rispetto ad S, si creerà nello spazio un campo elettrico le cui linee (di spostamento) congiungeranno in vario modo i conduttori, e correlativamente si avranno così delle cariche elettriche $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ (coulomb) su ciascuno di essi, oltre ad una carica Q su S, il cui valore è necessariamente

$$Q = -(Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n),$$

giacchè ogni linea di spostamento non può avere principio o fine che sopra qualcuno dei conduttori considerati, per cui tanti saranno i principi (cariche positive) quante le fini (cariche negative) (El., III, 2).

È chiaro che, date le V, le Q risultano univocamente determinate; si può cioè dire che le Q sono funzioni delle V. È poi quasi intuitivo, e ad ogni modo può rigorosamente dimostrarsi, che, se ai sistemi di tensioni

$$V_1, V_2, \ldots, V_n \; ; \quad V'_1, V'_2, \ldots, V'_n$$

corrispondono le cariche

$$Q_1, Q_2, \ldots, Q_n \; ; \quad Q'_1, Q'_2, \ldots, Q'_n,$$

al sistema di tensioni

$$V_1 + V'_1, \quad V_2 + V'_2, \ldots, V_n + V'_n$$

corrisponderà il sistema di cariche

$$Q_1 + Q'_1, \quad Q_2 + Q'_2, \ldots, Q_n + Q'_n.$$

Da ciò, con procedimento che qui non interessa esporre, si può dedurre che le relazioni fra le V e le Q sono necessariamente del tipo:

$$\left\{\begin{array}{l} Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 + \ldots + C_{1n}V_n, \\ Q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2 + \ldots + C_{2n}V_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Q_n = C_{n1}V_1 + C_{n2}V_2 + \ldots + C_{nn}V_n, \end{array}\right. \tag{13}$$

cioè le cariche Q sono funzioni lineari ed omogenee dei potenziali V (o meglio, delle tensioni fra i singoli conduttori *1*, *2*, ..., n, e la sfera S).

E si dimostra altresì che l'energia elettrostatica E del sistema che, come è noto (El., III, 11), è misurata dall'integrale cubico esteso all'intero spazio:

$$E = \int \frac{FD}{2}\,dv = \frac{1}{2}\int \varepsilon F^2\,dv$$

(dove F rappresenta il campo e $D = \varepsilon F$ lo spostamento), vale:

$$E = \frac{1}{2}(Q_1V_1 + \ldots + Q_nV_n) = \frac{1}{2}(C_{11}V_1 + \ldots + (C_{12} + C_{21})V_1V_2 + \ldots).$$

Supponendo nulle tutte le V all'infuori di una, si vede subito che le espressioni

$$\frac{1}{2}C_{11}V_{11}^2, \quad \frac{1}{2}C_{22}V_{22}^2, \quad \ldots, \quad \frac{1}{2}C_{nn}V_n^2$$

misurano le energie proprie E_{11}, E_{22}, ... , E_{nn} dei campi parziali F_1, F_2, ... , F_n dovuti a ciascuno dei conduttori *1*, *2*, ... , n (in unione, ben inteso, alla sfera S), mentre un'espressione come

$$C_{rs}V_rV_s$$

misura la energia mutua E_{rs} dei campi r^{mo} ed s^{mo}, cioè l'integrale:

$$E_{rs} = \int F_rD_s \cos\alpha_{rs}\,dv = \int \varepsilon F_rF_s \cos\alpha_{rs}\,dv = \int F_sD_r \cos\alpha_{sr}\,dv = E_{sr}\,,$$

dove α_{rs} è l'angolo formato fra i due campi parziali F_r ed F_s (o fra i corrispondenti spostamenti, o fra uno dei due campi e lo spostamento dovuto all'altro).

Poichè, come si è visto, è $E_{rs} = E_{rs}$, ne segue:

$$C_{rs} = C_{sr}\,.$$

Le $\dfrac{n(n+1)}{2}$ costanti

$$C_{11},\ C_{22},\ \ldots,\ C_{nn},\ C_{12},\ C_{13},\ C_{23},\ \ldots,\ C_{n-1,n}$$

costituiscono i così detti *coefficienti di capacità* del sistema dei dati n conduttori; e precisamente le prime, con indici uguali, si chiamano capacità proprie, le seconde, con indici disuguali, capacità mutue della coppia di conduttori il cui numero d'ordine corrisponde agli indici della C_{rs} considerata.

Di tali coefficienti è facile dare una definizione in base alle (13), e precisamente si ha che:

la capacità propria di un conduttore, ad es. *1*, *è il rapporto fra la sua carica ed il suo potenziale* (ben inteso, rispetto ad S), *quando tutti gli altri conduttori esistenti siano al potenziale di* S. Infatti, basta supporre $V_2 = V_3 = \ldots = V_n = 0$, per dedurre dalla prima delle (12) che la corrispondente carica Q_1, che indicheremo con Q_1', vale $Q_1' = C_{11}V_1$; quindi è $C_{11} = \dfrac{Q_1'}{V_1}$;

la capacità mutua di due conduttori è il rapporto fra la carica assunta da uno di essi ed il potenziale (*rispetto ad* S) *dell'altro, quando tutti i conduttori esistenti, escluso questo ultimo, siano al potenziale di* S.

Infatti, ponendo nelle (13):

$$V_1 = V_2 = \ldots = V_{r-1} = V_{r+1} = \ldots = V_n = 0\,,$$

oppure
$$V_1 = V_2 = \ldots = V_{s-1} = V_{s+1} = \ldots = V_n = 0 ,$$
si ricava, nel primo caso $Q'_s = C_{sr} V_r$, nel secondo $Q'_r = C_{rs} V_s$.

Dei coefficienti di capacità si può anche dare una definizione energetica, e precisamente:

la capacità propria è il rapporto fra il doppio dell'energia elettrostatica propria ed il quadrato della tensione (rispetto ad S);

la capacità mutua di due conduttori è il rapporto fra l'energia mutua dei campi ad essi associati quando ai conduttori stessi vengano attribuite certe tensioni (rispetto ad S) ed il prodotto delle tensioni stesse.

Infine, si osservi che, dalle
$$Q'_1 = C_{11} V_1 , \quad Q'_s = C_{sr} V_r , \quad Q'_r = C_{rs} V_s ,$$
si deduce:
$$\frac{dQ'_1}{dt} = C_{11} \frac{dV_1}{dt} , \quad \frac{dQ'_s}{dt} = C_{sr} \frac{dV_r}{dt} , \quad \frac{dQ'_r}{dt} = C_{rs} \frac{dV_s}{dt} ,$$
cioè, indicando con i'_1, i'_s, i'_r le correnti (di spostamento) che equivalgono alle variazioni di campo conseguenti alle variazioni dV_1, dV_s, dV_r, delle tensioni V_1, V_s, V_r, intese positive se uscenti dal conduttore *1*, rispettivamente s, r (verso il dielettrico) e quindi entranti nel conduttore sotto forma di correnti di conduzione a mezzo delle connessioni conduttive esterne:
$$i'_1 = - C_{11} \frac{dV_1}{dt} , \quad i'_s = - C_{rs} \frac{dV_r}{dt} , \quad i'_r = - C_{rs} \frac{dV_s}{dt} .$$

Pertanto i coefficienti di capacità propria e mutua possono definirsi come *rapporti fra correnti di spostamento e velocità di variazione della tensione*, in modo perfettamente analogo a quello che consente la definizione dei coefficienti di induzione propria e mutua mediante le tensioni indotte per variazione di corrente.

E precisamente, intendendo sempre che le tensioni siano riferite ad S, si ha che, salvo il segno:

il coefficiente di capacità propria di un conduttore è il rapporto fra la corrente di spostamento e la velocità di variazione della tensione, quando le tensioni di tutti gli altri conduttori non variano. Il coefficiente di capacità mutua di un conduttore rispetto ad un altro è il rapporto fra la corrente di spostamento relativa ad uno di essi, dovuta ad una variazione di tensione dell'altro, e la velocità di questa variazione, ferme restando le tensioni di tutti gli altri conduttori, compreso il primo.

È necessario osservare che in queste definizioni interviene sempre il conduttore (ausiliario) S, giacchè non può parlarsi di tensioni, e quindi di campi elettrici, se non per una coppia di conduttori.

Non è però a credere che tale conduttore ausiliario S, la cui consi-

derazione può dare l'impressione di asimmetria nelle precedenti definizioni, sia indispensabile.

Togliere ad S la funzione che gli abbiamo assegnato, equivale sostanzialmente a considerare un sistema isolato di $n+1$ — anzichè n — conduttori. Così facendo, non può più parlarsi di capacità proprie, ma soltanto di capacità mutue.

In tal caso le formole fondamentali subiscono qualche lieve modificazione formale. Se chiamiamo ancora n il numero totale dei conduttori, si avranno ancora n relazioni fondamentali come le (13), ma con la condizione supplementare:

$$Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n = 0\,, \tag{14}$$

mentre per $V_1, V_2, \dots, V_n$ dovranno intendersi le tensioni fra ciascun conduttore ed un altro qualunque, il cui potenziale sia assunto per origine. Per es. tale potrebbe essere uno dei conduttori del sistema stesso.

Dovendo le relazioni fornire un medesimo sistema di valori delle Q anche se si alterano tutte le V di una costante qualunque, ne segue che dovrà aversi:

$$C_{r1} + C_{r2} + \dots + C_{rn} = 0 \qquad (r = 1,\ 2,\ \dots,\ n),$$

mentre, dovendo la (13) essere verificata per qualsivoglia sistema di valori delle V, basta supporre che le V siano tutte nulle all'infuori delle s^{ma} per concludere che è:

$$C_{1s} + C_{2s} + \dots + C_{ns} = 0 \qquad (s = 1,\ 2,\ \dots,\ n).$$

Del resto, queste relazioni coincidono con le precedenti, a causa delle $C_{sr} = C_{rs}$.

Pertanto dalle relazioni fondamentali converrà eliminare le C_{rr} ad indici uguali, sostituendo in loro vece la somma

$$-\,(C_{1r} + C_{2r} + \dots + C_{r-1,r} + C_{r+1,r} + \dots + C_{n,r})\,.$$

Scrivendo poi C_{rs} in luogo di $-\,C_{rs}$, si perviene alle formole seguenti:

$$\left\{\begin{array}{l} Q_1 = \qquad\qquad C_{12}V_{12} + C_{13}V_{13} + \dots \qquad\qquad + C_{1n}V_{1n}\,, \\ Q_2 = C_{21}V_{21} \qquad\qquad + C_{23}V_{23} + \dots \qquad\qquad + C_{2n}V_{2n}\,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Q_n = C_{n1}V_{n1} + C_{n2}V_{n2} + C_{n3}V_{n3} + \dots + C_{n,n-1}V_{n,n-1}\,, \end{array}\right. \tag{15}$$

dove con $V_{rs} = -\,V_{sr} = V_r - V_s$ è rappresentata la tensione esistente fra il conduttore r ed il conduttore s, valutata positivamente se r è positivo rispetto ad s.

Le definizioni delle capacità mutue, come agevolmente si verifica, col-

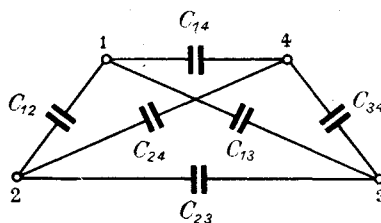
limano perfettamente con quelle date dianzi, in quanto che in esse il conduttore S non figurava con funzioni diverse da quelle di ogni altro, ma evidentemente non può più parlarsi di capacità proprie, perchè quelle che dianzi si erano così chiamate, non erano sostanzialmente che le capacità mutue rispetto ad S.

Le (15) sono identiche a quelle cui si perverrebbe qualora si avesse un sistema di $\frac{n(n-1)}{2}$ condensatori di capacità

$$C_{12}, \; C_{13}, \; \ldots, \; C_{rs}, \; \ldots$$

Fig. 8

colleganti a due a due in tutti i modi possibili un sistema di n conduttori (veggasi, pel caso $n = 4$, la fig. 8), e, questi essendo portati alle tensioni $V_1, V_2, \ldots, V_n$ (misurate rispetto ad un conduttore arbitrario), si volesse calcolare la carica complessiva che viene ad aversi su ciascuno dei conduttori stessi, nell'ipotesi che il campo di ciascun condensatore non influisca su quello dell'altro.

Un siffatto sistema di $\frac{n(n-1)}{2}$ condensatori può dunque ben considerarsi *elettrostaticamente equivalente* al sistema degli n conduttori dati.

7. - Casi particolari di $n = 2$ ed $n = 3$. — Nel caso di $n = 2$, posto $V_{12} = V$, $C_{12} = C_{21} = C$, $Q_2 = -Q_1 = Q$, le formole (14) si riducono semplicemente alla:

$$Q = CV\,.$$

Il sistema è pertanto definito da un unico coefficiente di capacità C, cui può allora senza ambiguità attribuirsi il nome di *capacità* del sistema, e che risulta corrispondere al rapporto fra la carica che ciascuno dei due conduttori assume (naturalmente, con opposti segni) e la tensione esistente fra i due conduttori.

Tale capacità C coincide con quella che fu definita negli elementi di Elettrostatica.

Per le applicazioni che ci interessano, è particolarmente importante il caso $n = 3$.

Per tre conduttori, il sistema (15) si riduce al seguente:

$$\left\{\begin{aligned} Q_1 &= \qquad\qquad\quad C_{12}V_{12} + C_{13}V_{13}\,, \\ Q_2 &= C_{21}V_{21} \qquad\qquad\quad + C_{23}V_{23}\,, \\ Q_3 &= C_{31}V_{31} + C_{32}V_{32}\,. \end{aligned}\right. \tag{16}$$

dove le capacità mutue si riducono a tre distinte $\left(3 = \frac{n(n+1)}{2}\right)$, precisamente le

$$C_{23} = C_{32}\,, \qquad C_{31} = C_{13}\,, \qquad C_{12} = C_{21}\,.$$

Conformemente a quanto sopra veduto in generale, fra le tre cariche Q_1, Q_2, Q_3 sussiste la relazione

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$$

conseguenza immediata delle precedenti e della ovvia relazione

$$V_{23} + V_{31} + V_{12} = 0$$

esistente fra le tre differenze di potenziale

$$V_{23} = -V_{32}\,, \qquad V_{31} = -V_{13}\,, \qquad V_{12} = -V_{21}\,.$$

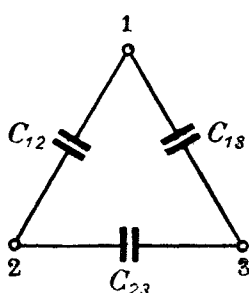
In questo caso giova introdurre tre grandezze C_1, C_2, C_3 definite da:

$$\begin{cases} C_1 = C_{12} + C_{13} \\ C_2 = C_{21} + C_{23} \\ C_3 = C_{31} + C_{32}\,, \end{cases}$$

Fig. 9

cui talvolta si dà il nome di capacità proprie del sistema.

Il significato fisico di esse è assai semplice, dappoichè per es. per C_1, si ha che questa equivale alla capacità (nel senso ordinario) del condensatore ottenuto connettendo in parallelo C_{12} e C_{13}; pertanto, con riferimento allo schema equivalente (fig. 9), essa può definirsi come rapporto fra la carica del conduttore *1* e la tensione fra esso e gli altri due quando questi siano allo stesso potenziale (punti *2* e *3* cortocircuitati).

Ne segue che, una volta determinate tali capacità C_1, C_2, C_3, il che può pensarsi fatto mediante gli ordinari metodi di misura [1], riescono note le capacità C_{23}, C_{31}, C_{12}. Invero, dalle precedenti, risolvendo, si ha:

$$\begin{cases} C_{23} = \dfrac{-C_1 + C_2 + C_3}{2}\,, \\ C_{31} = \dfrac{C_1 - C_2 + C_3}{2}\,, \\ C_{12} = \dfrac{C_1 + C_2 - C_3}{2}\,. \end{cases}$$

[1] Prescindiamo qui dalla difficoltà di tener conto dell'influenza dei conduttori di connessione.

8. - Capacità di una linea a due fili. — Per certe applicazioni, interessa saper calcolare la capacità del condensatore formato da un tratto di linea a due fili rettilinei, a sezione circolare, paralleli, infinitamente lunghi. Il valore c di tale capacità per ogni unità di lunghezza può calcolarsi agevolmente come segue.

Prima di tutto si osservi che l'intensità F_1 del campo elettrico dovuto ad uno dei due conduttori in un punto alla distanza x dal centro della sezione (fig. 10), vale:

$$F_1 = \frac{Q}{2\pi\varepsilon x} \,.$$

Fig. 10

Infatti, se Q è la carica sopportata dal conduttore per ogni unità di lunghezza, sarà per definizione Q il flusso dello spostamento εF attraverso una qualunque superficie attorniante il conduttore stesso. Siccome poi, nel punto generico P, il campo F_1 è, per ovvie ragioni di simmetria, diretto secondo OP, converrà scegliere per tale superficie il cilindro di asse O e passante per P, in quanto che esso è in ogni suo punto normale ad F_1. Siccome la sua area vale $2\pi x \cdot 1$, si ha dunque:

$$Q = \varepsilon F_1 \, 2\pi x \,,$$

donde la precedente.

Per l'intensità F_2 del campo dovuto all'altro conduttore si ha analogamente:

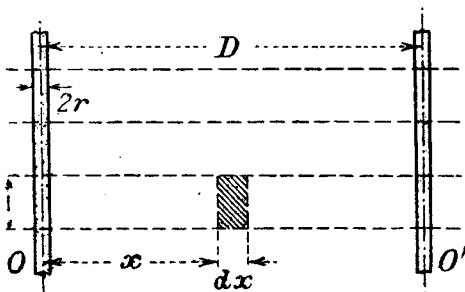
$$F_2 = \frac{Q}{2\pi\varepsilon(D - x)} \,,$$

essendo D la distanza fra gli assi dei due conduttori, e le direzioni di F_1 ed F_2 sono ovviamente concordanti per i punti P situati nel piano dei due fili.

Ciò posto, per calcolare la d. d. p., V fra i due conduttori basterà sommare gli integrali $\int F_1 dx$ e $\int F_2 dx$ calcolati entrambi da r a D, se, come avviene nel caso statico, o in quello di correnti ad altissima frequenza, si possono considerare le cariche localizzate alla superficie dei conduttori. Si ha cioè:

$$V = 2\,\frac{Q}{2\pi\varepsilon}\int_r^D \frac{dx}{x} = \frac{Q}{\pi\varepsilon}\log\frac{D}{r}$$

e quindi per la capacità cercata:

$$c = \frac{Q}{V} = \frac{\pi\varepsilon}{\log\dfrac{D}{r}} \,.$$

Essa risulta così espressa in F/m se così è espresso ε $\left(\varepsilon = 8{,}86 \cdot 10^{-12} \cong \cong \frac{10^{-9}}{36\pi} \text{ per l'aria}\right)$.

Per es. per una linea aerea della lunghezza di l km, la corrispondente capacità C vale circa:

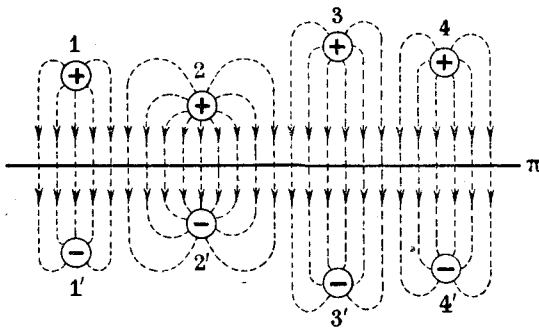
$$C = \frac{l}{36 \log \frac{D}{r}} \quad \text{microfarad.}$$

Similmente, per un cavo cilindrico coassiale, si trova:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon l}{\log \frac{r_2}{r_1}} \text{ farad},$$

essendo l (m) la lunghezza, r_2, r_1 i raggi dei due conduttori.

9. - Principio delle immagini. — Consideriamo un sistema isolato costituito da $n + 1$ conduttori *1*, *2*, ... , n, $n + 1$, l'ultimo dei quali, $n + 1$, sia un piano indefinito π. Su ciascuno di essi il potenziale è costante e perciò le linee del campo elettrico si staccano da ognuno in direzione normale alla rispettiva superficie; in particolare quindi quelle che si appoggiano al piano π lo incontreranno normalmente.

Fig. 11

Per fissare le idee, possiamo supporre che i primi n conduttori abbiano cariche positive, cosicchè necessariamente il piano risulterà caricato negativamente, cioè le linee del campo avranno le loro origini su quelli, ed i loro termini su π, come indicato nella parte superiore della fig. 11.

Consideriamo ora un sistema di n conduttori *1'*, *2'*..., n' costituenti l'immagine speculare di *1*, *2*, ... , n rispetto a π, e caricati oppostamente a questi. L'insieme di *1'*, *2'*, ... , n' e π è del tutto analogo al sistema dianzi considerato, e pertanto il piano π si troverà caricato positivamente, dal lato opposto dal precedente, e con distribuzione di arica identica alla precedente.

Ne segue che le linee del campo pertinenti al sistema *1'*, *2'*, ..., *n'*, π costituiranno la immagine speculare di quelle del sistema *1*, *2*, ..., *n*, π, ma, nei riguardi del senso, le porzioni situate dalle due opposte parti di π saranno disposte come *continuazione* le une delle altre (fig. 11).

Se facciamo coesistere i due sistemi, il piano π non cessa di essere una superficie equipotenziale, ma esso si trova nelle particolare condizione di sopportare carica nulla in ogni sua parte, comunque piccola; dunque non si altera elettricamente il sistema se lo si sopprime addirittura. Si perviene così ad un nuovo sistema costituito dai $2n$ conduttori *1*, *2*, ..., *n*, *1'*, *2'*, ..., *n'*, con carica complessiva nulla, e che, per il modo come è stato ottenuto, è senza dubbio *possibile*. Esso ha in comune con quello da cui siamo partiti la distribuzione del campo e delle cariche in tutta la parte che sta da uno dei lati del piano π.

Inversamente, se si parte da un sistema di $2n$ conduttori costituito da due gruppi *1*, *2*, ..., *n*; *1'*, *2'*, ..., *n'* simmetrici rispetto ad un piano π e con cariche ordinatamente opposte, si vede subito, invertendo i ragionamenti precedenti, che se interessa esaminare quel che accade da una sola parte del piano di simmetria, basta considerare una sola delle due metà del sistema dato — la *1*, *2*, ..., *n* oppure la *1'*, *2'*, ..., *n'* —, ed aggiungere un conduttore piano indefinito π sopportante un'opportuna carica complessivamente uguale ed opposta alla somma di quelle esistenti sui conduttori situati nella metà considerata.

È questo il più semplice caso di applicazione dell'importante *principio delle immagini* enunciato da Lord Kelvin, e che può formularsi come segue.

Se nello spazio situato da una parte di un piano conduttore indefinito si ha un campo elettrico contenente una distribuzione qualunque di cariche, si avrà, nello stesso spazio, lo stesso campo, sopprimendo il piano conduttore e sostituendogli una distribuzione di cariche ubicate simmetricamente alle date rispetto al piano, ma aventi segni rispettivamente opposti. Inversamente, se un campo elettrico è tale che, rispetto ad un certo piano, la sua distribuzione sia simmetrica con inversione di senso, la parte del campo che interessa lo spazio situato da una delle due parti del piano può ottenersi anche pensando soppresse tutte le cariche esistenti dall'altra parte, e immaginando che il piano stesso sia costituito da un conduttore. Tale conduttore dovrà necessariamente sopportare una carica complessiva uguale alla somma di quelle che in tal guisa si sono soppresse.

Una applicazione semplicissima di questo principio può farsi al calcolo della capacità C del condensatore costituito da un filo rettilineo f teso parallelamente, alla distanza h, ad un piano conduttore π.

Se si considera il sistema costituito dal filo f e dalla sua immagine f' rispetto al piano, ritenendo i due fili caricati in senso opposto, si ha un

sistema elettrico, di cui la parte svolgentesi dal lato del piano π che contiene f è identica a quella che si ha nel caso dato.

Pertanto si può concludere che l'energia elettrostatica di questo è la metà di quella del sistema (f, f'). Detta allora V la d. d. p. fra f e π, sarà $2V$ quella fra f ed f', e quindi l'energia del sistema (f, f') vale:

$$\frac{K\,(2V)^2}{2} = 2KV^2\,,$$

essendo K la capacità del condensatore (f, f').

Scrivendo che questa energia è doppia di quella, $\frac{CV^2}{2}$, del sistema (f, π), si ottiene:

$$C = 2K\,,$$

dopo di che, richiamando un precedente risultato (n. 8), si ha senz'altro che la C vale:

$$\frac{2\pi\varepsilon}{\log\frac{D}{r}}$$

per ogni unità di lunghezza del filo f.

10. - Principio di dualità elettrica. — Se esaminiamo le leggi fondamentali della Elettrologia, possiamo facilmente constatare che esse possono accoppiarsi in modo tale da ottenere per ogni coppia identici enunciati salvo lo scambio di alcune parole.

Per es., consideriamo la legge di Ohm e scriviamola sotto la duplice forma:

$$e = ri\,, \qquad i = ge\,,$$

dove $g = \frac{1}{r}$. La prima di queste corrisponde alla proposizione: « la tensione ai capi di una resistenza r percorsa da corrente i equivale al prodotto di r per i »; la seconda all'altra: « la corrente che circola in una conduttanza g a cui sia applicata una tensione e, equivale al prodotto di g per e ».

Disponendo *in serie* — cioè a parità di *corrente* attraverso esse — alcune r, si ottiene l'equivalente di una unica R uguale alla somma delle singole r. E correlativamente, disponendo *in parallelo* — e cioè a parità di *tensione* ai loro capi — alcune g, si ottiene l'equivalente di una G unica uguale alla somma delle singole g.

Analogamente si conclude per le relazioni fra le cariche e le tensioni

nel caso dei condensatori, in quanto che esse sono governate da formole dello stesso tipo delle precedenti:

$$E = \frac{1}{C} \cdot Q , \quad Q = CE ,$$

dove la Q tiene il posto della corrente (dalla quale differisce per un divisore « tempo ») e la C, rispettivamente $\frac{1}{C}$, della conduttanza g, rispettivamente resistenza r.

Accanto alla prima legge di Kirchhoff, che esprime la nullità della somma delle correnti in rami costituenti una *stella* (cioè connessi ad un nodo), si ha la seconda, che esprime la nullità della somma delle tensioni (computando fra queste le controtensioni ohmiche) in rami costituenti un *poligono* (maglia chiusa).

Accanto alla legge fondamentale dell'induzione magnetica:

$$e = - L \frac{di}{dt} ,$$

si ha l'altra:

$$i = - C \frac{de}{dt} ,$$

e si osserva che entrambe si lasciano raccogliere sotto un unico enunciato purchè si scambi e con i, ed L con C.

Analogamente le formole:

$$\Phi = Li \quad (\text{opp.} = Mi) ,$$

o più generalmente le:

$$\begin{cases} \Phi_1 = M_{11} i_1 + M_{12} i_2 + \dots + M_{1n} i_n , \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Phi_n = M_{n1} i_1 + M_{n2} i_2 + \dots + M_{nn} i_n , \end{cases}$$

sono formalmente identiche con le:

$$Q_1 = C_{11} V_1 \qquad (\text{opp. } Q_s = C_{sr} V_r) ,$$

rispettivamente:

$$\begin{cases} Q_1 = C_{11} V_1 + C_{12} V_2 + \dots + C_{1n} V_n , \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Q_n = C_{n1} V_1 + C_{n2} V_2 + \dots + C_{nn} V_n , \end{cases}$$

qualora si mutino L (o M) in C, ed i in V, *e quindi* Q (amperesecondi) *in* Φ (voltsecondi).

Riassumendo, si può dire che, se si dispongono in due colonne le seguenti nozioni:

tensione	corrente
resistenza (reattanza, impedenza)	conduttanza (suscettanza, ammettenza)
serie	parallelo
connessione a stella (più rami concorrenti ad un nodo)	connessione a poligono (più rami disposti a formare una maglia chiusa)
capacità (propria, mutua)	induttanza (propria, mutua)
flusso magnetico (voltsec)	carica elettrica (ampsec)
a vuoto (morsetti aperti, corrente erogata nulla)	cortocircuito (morsetti chiusi, tensione nulla fra gli stessi)

e viceversa,

da ogni proposizione o formola involgente alcuni fra gli elementi scritti, se ne può trarre un'altra, formalmente identica, fra gli elementi che, nel quadro precedente, sono situati nella stessa linea dei primi, ma nella opposta colonna, in quanto che, se per dimostrare la prima si debbono applicare alcune delle leggi fondamentali richiamate, la dimostrazione della seconda potrà farsi applicando allo stesso modo quelle leggi fondamentali che dalle precedenti si deducono effettuando gli scambi indicati.

In ciò consiste quello che si potrebbe chiamare un principio di *dualità* o di *correlazione*, constatato il quale, si possono ritenere senz'altro *dimostrate* certe proposizioni, quando siano state dimostrate le rispettive duali.

È da osservare che gli elementi non aventi carattere elettrico, come ad es. il tempo, l'energia, la potenza, debbono intendersi avere per corrispondenti, o duali, sè stessi; e viceversa. Ad es., come la espressione Li^2 rappresenta una energia, altrettanto avviene della sua duale Cv^2; espressioni come ei, LC, che per dualità si trasformano in sè stesse, misurano la prima una potenza, la seconda il quadrato di un tempo, cioè grandezze non aventi carattere elettrico, e quindi *autoduali*.

11. - Trasformazione di una stella di impedenze (o di capacità, o di induttanze) nel triangolo equivalente, e viceversa. — Una interessante applicazione del principio esposto nel n. prec. è quella che può farsi alla trasformazione di un sistema di tre impedenze (1) a triangolo in una stella e viceversa.

---

(1) Sottinteso, con riferimento ad un regime sinusoidale di pulsazione ben determinata e fissa.

Cominciamo col determinare le tre impedenze $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{Z}_3$ (¹) a stella equivalenti ad un dato sistema $\mathbf{Z}_a$, $\mathbf{Z}_b$, $\mathbf{Z}_c$ di impedenze a triangolo.

All'uopo, scrivendo che fra i morsetti *2* e *3* (fig. 12) l'impedenza è

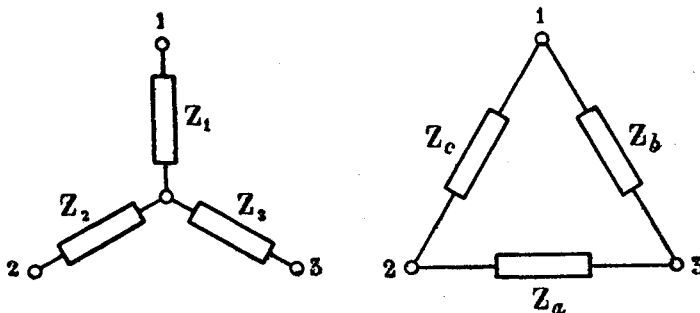



Fig. 12

in un caso $\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3$, nell'altro la $\mathbf{Z}_a$ in parallelo con le $\mathbf{Z}_b$ e $\mathbf{Z}_c$ fra loro disposte in serie, cioè con l'impedenza

$$\frac{\mathbf{Z}_a(\mathbf{Z}_b + \mathbf{Z}_c)}{\mathbf{Z}_a + \mathbf{Z}_b + \mathbf{Z}_c} = \frac{\mathbf{Z}_a\mathbf{Z}_b + \mathbf{Z}_a\mathbf{Z}_c}{\mathbf{Z}_a + \mathbf{Z}_b + \mathbf{Z}_c},$$

si ha la prima delle tre relazioni:

$$\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 = \frac{\mathbf{Z}_c\mathbf{Z}_a + \mathbf{Z}_a\mathbf{Z}_b}{\mathbf{Z}_a + \mathbf{Z}_b + \mathbf{Z}_c}, \quad \mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_1 = \frac{\mathbf{Z}_a\mathbf{Z}_b + \mathbf{Z}_b\mathbf{Z}_c}{\mathbf{Z}_a + \mathbf{Z}_b + \mathbf{Z}_c}, \quad \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 = \frac{\mathbf{Z}_b\mathbf{Z}_c + \mathbf{Z}_c\mathbf{Z}_a}{\mathbf{Z}_a + \mathbf{Z}_b + \mathbf{Z}_c},$$

da cui agevolmente si ricava:

$$\mathbf{Z}_1 = \frac{\mathbf{Z}_b\mathbf{Z}_c}{\mathbf{Z}_a + \mathbf{Z}_b + \mathbf{Z}_c}, \quad \mathbf{Z}_2 = \frac{\mathbf{Z}_c\mathbf{Z}_a}{\mathbf{Z}_a + \mathbf{Z}_b + \mathbf{Z}_c}, \quad \mathbf{Z}_3 = \frac{\mathbf{Z}_a\mathbf{Z}_b}{\mathbf{Z}_a + \mathbf{Z}_b + \mathbf{Z}_c}.$$

Ciò premesso, se si vogliono ottenere le formole pel passaggio inverso, non è necessario risolvere queste ultime, ma basta osservare che il corrispondente problema è duale del primo, per cui si possono senz'altro scrivere formole identiche, purchè al posto degli elementi del triangolo si pongano i duali di quelli della stella. Possiamo dunque asserire che le formole cercate sono:

$$\mathbf{Y}_a = \frac{\mathbf{Y}_2\mathbf{Y}_3}{\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3}, \quad \mathbf{Y}_b = \frac{\mathbf{Y}_3\mathbf{Y}_1}{\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3}, \quad \mathbf{Y}_c = \frac{\mathbf{Y}_1\mathbf{Y}_2}{\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3}.$$

(¹) Faremo costantemente uso dei caratteri grassetti per indicare numeri complessi (impedenze, ammettenze, tensioni e correnti sinusoidali, ecc.), riservando i corrispondenti caratteri ordinari ai relativi moduli.

In particolare, per passare da un sistema di tre condensatori a stella C_1, C_2, C_3, all'equivalente sistema C_a, C_b, C_c a triangolo, si avranno le formole:

$$C_a = \frac{C_2C_3}{C_1 + C_2 + C_3}, \quad C_b = \frac{C_3C_1}{C_1 + C_2 + C_3}, \quad C_c = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2 + C_3},$$

con le inverse (ottenibili scambiando a, b, c con 1, 2, 3, e le C con le $\frac{1}{C}$) :

$$C_1 = \frac{C_bC_c + C_cC_a + C_aC_b}{C_a}, \quad C_2 = \frac{C_bC_c + C_cC_a + C_aC_b}{C_b},$$

$$C_3 = \frac{C_bC_c + C_cC_a + C_aC_b}{C_c},$$

ed analogamente pel passaggio da un sistema di tre induttanze da triangolo a stella si avranno le seguenti formole:

$$L_1 = \frac{L_bL_c}{L_a + L_b + L_c}, \quad L_2 = \frac{L_cL_a}{L_a + L_b + L_c}, \quad L_3 = \frac{L_aL_b}{L_a + L_b + L_c};$$

$$L_a = \frac{L_2L_3 + L_3L_1 + L_1L_2}{L_1}, \quad L_b = \frac{L_2L_3 + L_3L_1 + L_1L_2}{L_2},$$

$$L_c = \frac{L_2L_3 + L_3L_1 + L_1L_2}{L_3}.$$

12. - Trasformazione di un sistema a tensione costante con due impedenze in serie in uno a corrente costante con due ammettenze in parallelo. — Come secondo esempio di applicazione della legge di dualità,

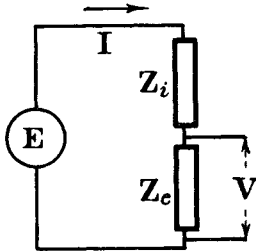
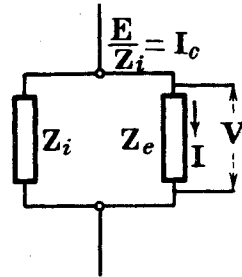



Fig. 13 *a*) Fig. 13 *b*)

consideriamo un sistema (fig. 13 *a*)) formato da un generatore di f. e. m. alternativa costante **E** in serie con due impedenze, di cui una, la $\mathbf{Z}_i$, potrà per es. pensarsi rappresentare l'impedenza interna del generatore, l'altra, la $\mathbf{Z}_e$, una impedenza di carico.

Se indichiamo con **I** la corrente e con **V** la tensione ai capi di $\mathbf{Z}_e$, si ha notoriamente la relazione:

$$\mathbf{E} = \mathbf{Z}_i\mathbf{I} + \mathbf{V}. \tag{17}$$

Dividendo tutti i termini di questa per $\mathbf{Z}_i$ otteniamo:

$$\mathbf{I}_c = \mathbf{Y}_i\mathbf{V} + \mathbf{I}\,, \tag{18}$$

dove $\mathbf{I}_c = \dfrac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_i}$ rappresenta la *corrente di corto circuito*, cioè quella che si avrebbe nell'ipotesi $\mathbf{Z}_e = 0$, ed $\mathbf{Y}_i = \dfrac{1}{\mathbf{Z}_i}$ è la « ammettenza interna » del generatore.

La (17) ovviamente esprime che ai capi del carico $\mathbf{Z}_e$ è disponibile una tensione $\mathbf{V}$ corrispondente alla differenza fra $\mathbf{E}$ e la caduta $\mathbf{Z}_i\mathbf{I}$ attraverso $\mathbf{Z}_i$. La (18) esprime invece che la corrente di corto circuito del sistema è decomponibile in due parti, l'una delle quali, la $\mathbf{Y}_i\mathbf{V}$, coincide con quella che circolerebbe in una ammettenza $\mathbf{Y}_i$ alimentata da $\mathbf{V}$, e l'altra è precisamente la stessa $\mathbf{I}$ che compare nella (17). Siccome poi questa si può rappresentare con $\mathbf{Y}_e\mathbf{V}$, se ne conclude che la corrente in $\mathbf{Z}_e$ e la tensione ai capi di $\mathbf{Z}_e$ possono pensarsi determinate sia dalla (17), secondo la quale $\mathbf{Z}_e$ e $\mathbf{Z}_i$ sono alimentate *in serie* dalla *tensione* $\mathbf{E}$, sia dalla (18), secondo la quale le medesime impedenze $\mathbf{Z}_e$ e $\mathbf{Z}_i$ sono alimentate *in parallelo* dalla *corrente* $\mathbf{I}_c$ (fig. 13 *b*).

È questa una interessante trasformazione di un sistema con due impedenze in serie in un altro nel quale le *stesse* impedenze sono in parallelo. Devesi però notare che la equivalenza dei due sistemi è limitata soltanto a quanto riguarda il ramo $\mathbf{Z}_e$.

È poi degno di nota che i due sistemi qui esaminati sono l'uno duale dell'altro, corrispondendosi la tensione a vuoto $\mathbf{E}$ del primo e la corrente di corto circuito $\mathbf{I}_c$ del secondo, la disposizione $\mathbf{Z}_i$, $\mathbf{Z}_e$ in serie alla $\mathbf{Y}_i$, $\mathbf{Y}_e$ in parallelo, la tensione $\mathbf{V}$ (disponibile ai capi di $\mathbf{Z}_e$) alla corrente $\mathbf{I}$ (disponibile nel ramo $\mathbf{Y}_e$).

CAPITOLO SECONDO

ELEMENTI DEI CIRCUITI ELETTRICI
(RESISTENZA - INDUTTANZA - CAPACITÀ)

1. - Resistenza. - Densità di corrente. — In Elettrotecnica si definisce la resistenza di un conduttore come rapporto fra la tensione ai capi e la corrente convogliata, perchè in generale (beninteso, in assenza di f. e. m. inserita) tale rapporto è praticamente costante.

Se si tratta di un conduttore filiforme, di sezione costante, ed omogeneo, la resistenza R stessa è misurata da una espressione del tipo:

$$R = \varrho \frac{l}{s},$$

dove l è la lunghezza, s la sezione e ϱ la resistività del materiale di cui il conduttore è formato.

Ordinariamente ϱ si esprime in $\mu\Omega$-m, onde avere dalla precedente la misura di R in ohm quando l ed s siano misurati rispettivamente in metri e in mm^2. Usando invece per l ed s unità corrispondenti, per es. cm e cm^2, oppure m e m^2, ϱ deve esprimersi in ohm-cm, risp. ohm-m.

Per il rame a 0 °C si ha ad es. $\varrho = 0{,}016$ $\mu\Omega$-m.

Il passaggio di una corrente i (amp.) attraverso un conduttore di resistenza R determina uno svolgimento di calore nella misura definita dalla potenza Ri^2 watt (effetto Joule), per cui la resistenza può anche definirsi come rapporto fra la potenza trasformata in calore ed il quadrato della corrente.

Tutte queste definizioni sono perfettamente equivalenti finchè, il conduttore filiforme essendo omogeneo, è omogenea anche la distribuzione, nella sua sezione, della densità di corrente, definita, nell'intorno di un punto P della sezione stessa, come limite del rapporto fra la corrente che fluisce attraverso una piccola area attorniante P e l'area stessa.

Tale densità di corrente può in generale variare da punto a punto di una determinata sezione (anche quando, come qui per semplicità sup-

porremo, i moti elettronici costituenti la corrente avvengono parallelamente all'asse del conduttore), cosicchè, detto u il suo valore nel punto P, la corrente convogliata da una areola infinitesima $d\sigma$ (normale ai filetti di corrente) attorno a P vale $ud\sigma$, a meno di infinitesimi superiori a $d\sigma$.

Ma, se la densità u non è costante nella sezione di passaggio, le tre definizioni sopra indicate non collimano se non si fanno intervenire particolari convenzioni.

Per fissare le idee, supponiamo che la sezione S sia divisibile in n parti $S_1, S_2, \ldots, S_n$, in ciascuna delle quali si abbiano valori costanti, ma non fra loro uguali, $u_1, u_2, \ldots, u_n$, della densità. Si potrà pensare il conduttore complessivo costituito da più conduttori connessi in parallelo, per ciascuno dei quali sono applicabili indifferentemente le tre definizioni precedenti. Il fatto che i conduttori elementari sono in parallelo, consente senz'altro di parlare di *una* d. d. p. e applicata agli estremi; ed allora, per ognuno di essi si avrà che la intensità di corrente è legata alla rispettiva resistenza da relazioni come le:

$$(1) \qquad R_1 i_1 = e\,, \quad R_2 i_2 = e\,, \quad \ldots\,, \quad R_n i_n = e\,,$$

per cui la resistenza complessiva, definita come rapporto di e alla corrente totale $i_1 + i_2 + \ldots + i_n$, risulta ovviamente data da:

$$(2) \qquad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}\,.$$

In particolare, la *densità media* u è misurata da

$$(3) \qquad u = \frac{i_1 + i_2 + \ldots + i_n}{S_1 + S_2 + \ldots + S_n} = \frac{u_1 S_1 + u_2 S_2 + \ldots + u_n S_n}{S_1 + S_2 + \ldots + S_n}\,,$$

cioè dalla media ponderata delle singole densità, ciascuna affetta da un coefficiente di peso uguale alla corrispondente sezione [1].

Ora, è importante notare che la resistenza definita dalla (2) corrisponde anche al rapporto fra la potenza dissipata per effetto Joule ed il quadrato della corrente totale. Invero, nel conduttore elementare r^{mo}, si ha per la corrispondente potenza Joule w_r:

$$w_r = R_r i_r^2 = \frac{e^2}{R_r}\,.$$

Sommando le varie potenze, onde ottenere la potenza totale W, si avrà:

$$W = w_1 + \ldots + w_n = e^2\left(\frac{1}{R_1} + \ldots + \frac{1}{R_n}\right) = \frac{e^2}{R} = RI^2\,,$$

[1] Nel caso di corrente alternata, nelle (1) occorrerebbe riferirsi alle componenti attive (rispetto alla tensione e) delle singole correnti, ed una relazione come la (2) non potrebbe più scriversi.

essendo R definita dalla (2). Se ne conclude che tale R uguaglia il rapporto $\frac{W}{I^2}$, come si era asserito.

La resistenza così definita verrà chiamata *apparente* o *equivalente*: essa manifestamente non costituisce un attributo intrinseco del conduttore, in quanto che il suo valore è legato alla particolare legge di distribuzione della densità, la quale a sua volta può dipendere da fatti estranei al conduttore stesso, come meglio vedremo nei prossimi nn.

Nel caso di correnti alternate, occorrerà sempre riferirsi alla potenza media, ed al valore efficace della corrente totale.

Queste considerazioni dimostrano che, nel caso più generale, la sola definizione cui sempre si può ricorrere per la resistenza è quella di tipo energetico.

Sotto questo aspetto anzi, come meglio vedremo in seguito, assai spesso, da un punto di vista puramente formale, si identificano con resistenze tutte le parti dei circuiti elettrici che, essendo sedi di f. e. m. contrarie alle correnti, danno luogo ad *uscita* di potenza dal circuito stesso; e si definisce come resistenza equivalente (sottinteso: energeticamente) il rapporto della potenza uscente al quadrato della corrente, pensando così l'uscita energetica effettiva sostituita con una manifestazione Joule ad essa quantitativamente uguale.

Vogliamo qui in generale osservare che, quando la distribuzione della densità di corrente, nella sezione di un conduttore cilindrico omogeneo, non è uniforme, la entità dell'effetto Joule è *sempre* superiore a quella che si avrebbe, a parità di corrente convogliata, qualora la distribuzione fosse uniforme: cioè la resistenza apparente è superiore a quella che si potrebbe chiamare la resistenza effettiva.

Difatti, detta u la media fra le densità $u_1, u_2, \dots, u_n$, e indicando con $u'_1, u'_2, \dots, u'_n$ gli scarti da tale media, cioè ponendo:

$$u_1 = u + u'_1\,, \quad u_2 = u + u'_2\,, \quad \dots, \quad u_n = u + u'_n\,,$$

dalla (3) si ha:

$$\begin{aligned} uS &= u_1S_1 + \dots + u_nS_n = S_1(u + u'_1) + \dots + S_n(u + u'_n) = \\ &= u(S_1 + S_2 + \dots + S_n) + S_1u'_1 + S_2u'_2 + \dots + S_nu'_n = \\ &= uS + S_1u'_1 + S_2u'_2 + \dots + S_nu'_n\,, \end{aligned}$$

quindi:

$$S_1u'_1 + S_2u'_2 + \dots + S_nu'_n = 0\,,$$

dopo di che, all'espressione della potenza Joule che, a meno del fattore ϱl, vale:

$$\frac{i_1^2}{S_1} + \frac{i_2^2}{S_2} + \dots + \frac{i_n^2}{S_n} = S_1u_1^2 + S_2u_2^2 + \dots + S_nu_n^2\,,$$

si può dare l'aspetto:

$$S_1(u+u_1')^2+S_2(u+u_2')^2+\ldots=u^2(S_1+S_2+\ldots)+2u(S_1u_1'+\ldots)+$$
$$+(S_1u_1'^2+S_2u_2'^2+\ldots)=u^2S+(S_1u_1'^2+S_2u_2'^2+\ldots).$$

Il primo termine del secondo membro misura la stessa potenza nell'ipotesi di distribuzione uniforme; e poichè il secondo è somma di termini essenzialmente positivi, risulta evidente che il minimo valore dell'intera espressione è rappresentato dal suo primo termine; non solo, ma risulta anche che affinchè tale minimo si verifichi occorre che sia:

$$u_1'=u_2'=\ldots=u_n'=0,$$

con che è dimostrato l'asserto.

2. - Effetto pellicolare. — La disuniforme ripartizione della corrente in un conduttore cilindrico omogeneo si verifica in particolare quando ai capi di esso sia applicata una d. d. p. alternata, e la cosa si comprende agevolmente pensando che, in generale, in presenza di correnti e di tensioni variabili, occorre, in relazioni come le (1), mettere in conto anche le f. e. m. dovute alla a. i. dei singoli filetti di corrente, per il che occorre conoscere la distribuzione dell'induzione magnetica B dovuta al campo prodotto dalla corrente, e ciò non soltanto nello spazio esterno al conduttore, ma anche in quello occupato dal conduttore stesso.

Un tale studio, che verrà fatto in dettaglio nei nn. segg. limitatamente al caso di una e alternativa sinusoidale di una data pulsazione ω, nell'ipotesi che il conduttore considerato abbia sezione circolare di raggio r_1 e sia ad asse rettilineo indefinito, conduce in generale a conclusioni alquanto complesse: la densità della corrente varia da punto a punto, pur conservando lo stesso valore, per ovvie ragioni di simmetria, per tutti i punti situati su ogni circonferenza concentrica col contorno della sezione del conduttore. In altre parole, vedremo che la densità predetta è funzione della distanza y (fig. 14) del punto considerato dalla periferia; più precisamente, col crescere di y, cioè col passare da strati periferici a strati via via più interni, la densità stessa u va diminuendo e la corrente convogliata va via via modificando la sua fase. In brevi parole, può dirsi che tale densità è un numero complesso $\mathbf{u}$ di cui tanto il modulo che l'argomento sono delle funzioni di y.

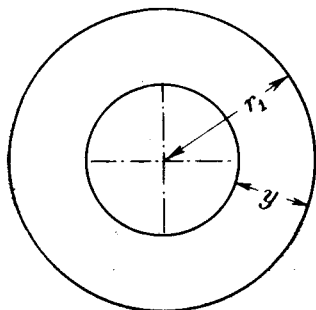



Fig. 14

Di ciò è facile rendersi grossolanamente conto pensando che il flusso, o numero di linee magnetiche, che va a concatenarsi coi filetti più pros-

simi al centro, è maggiore di quello corrispondente ai filetti periferici (fig. 15), in quanto che per ognuno di questi esso si commisura alle sole linee che, attorniando il conduttore, hanno raggio $> r_1$, mentre, per uno strato posto, ad es., a distanza y dalla periferia, occorre tener conto anche di quelle linee l che si svolgono nella corona compresa fra i cerchi di raggi r_1 ed $r_1 - y$, ciascuna delle quali poi corrisponde al flusso dovuto alla sola parte della corrente totale che scorre nella porzione del conduttore situata all'interno della linea stessa. In definitiva si ha che, procedendo verso l'interno, aumenta l'induttanza degli strati a parità di resistenza ohmica, onde l'impedenza varia, e pertanto si ha a che fare con un sistema di (infiniti) filetti *in parallelo* aventi, a parità di sezione e quindi di resistenza ohmica, impedenze diverse. Precisamente, procedendo dalla periferia verso il centro, si avrà aumento della reattanza e dell'impedenza e perciò riduzione della densità di corrente e ritardo progressivo di fase.

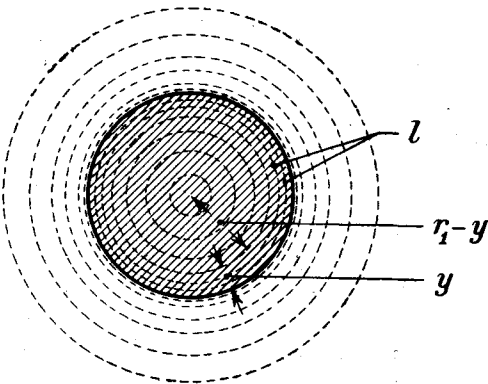



Fig. 15

La corrente tende dunque a localizzarsi nella sezione in modo non uniforme, e precisamente a disertare le regioni centrali addensandosi nelle periferiche, il che giustifica la denominazione di « effetto di pelle » (ingl. *skin-effect*) che ordinariamente si dà a questo fenomeno.

3. - Relazioni quantitative. - Caso generale. — Lo studio quantitativo della distribuzione della densità di corrente, per il caso di una tensione alternativa sinusoidale applicata ai capi di un conduttore ad asse rettilineo indefinito di sezione circolare, il cui raggio indicheremo come sopra con r_1, può condursi al modo seguente.

Innanzi tutto si osservi che, per evidenti ragioni di simmetria, la densità di corrente $\mathbf{u}$ sarà la stessa per tutti i punti della sezione situati su una medesima circonferenza concentrica al cerchio che delimita la sezione stessa; essa cioè sarà funzione soltanto del raggio r di tale circonferenza. Consideriamo un tronco di lunghezza unitaria del conduttore e suddividiamo la sezione in anelli infinitesimi, il generico dei quali sarà quello compreso fra i raggi r ed $r + dr$ ed avrà quindi un'area misurata da $2\pi r dr$. Se con Φ si indica il flusso magnetico concatenato con tale anello, e con ϱ, al solito, la resistività del metallo costituente il conduttore, sarà $2\pi r dr \mathbf{u}$ la corrente convogliata dall'anello, la cui resistenza

ohmica vale $\frac{\varrho}{2\pi r dr}$, per cui si avrà la relazione fondamentale

$$\varrho \mathbf{u} + j\omega \boldsymbol{\Phi} = \mathbf{E}, \tag{4}$$

essendo **E** la tensione ai capi del tronco considerato.

Se con **I** (funzione di r) si indica la corrente convogliata entro il cerchio di raggio generico r, si avrà:

$$\mathbf{I} = 2\pi \int_0^r r\mathbf{u}dr, \quad \text{e quindi} \quad \frac{d\mathbf{I}}{dr} = 2\pi r\mathbf{u}.$$

La corrente $\mathbf{I}_1$ convogliata dall'intero conduttore corrisponde al valore di **I** per $r = r_1$, cioè si ha:

$$\mathbf{I}_1 = 2\pi \int_0^{r_1} r\mathbf{u}dr.$$

Per quanto riguarda $\boldsymbol{\Phi}$, richiamiamo (v. nota a pag. 15) che il campo magnetico elementare prodotto dalla corrente rettilinea indefinita fluente in un conduttore a sezione anulare coincide, per ogni punto esterno, con quello che si avrebbe se la corrente fosse concentrata nell'asse, mentre per ogni punto interno all'anello è zero. Da ciò segue che a comporre il $\boldsymbol{\Phi}$ che compare nella (4) interverranno soltanto le linee magnetiche esterne a tale anello. Da queste linee separiamo quelle il cui percorso è esterno all'intero conduttore e quindi interessano ugualmente tutti gli anelli elementari, e indichiamo con **e** la f. e. m. ad esse dovuta. Il flusso rimanente sarà a rappresentarsi con $\int_r^{r_1} \mu \mathbf{H} dr$, dove μ è la permeabilità del metallo costituente il conduttore ed **H** il campo magnetico alternativo dovuto alla corrente convogliata dalla porzione di conduttore interna al raggio r. Si avrà dunque:

$$\varrho \mathbf{u} + j\omega \int_r^{r_1} \mu \mathbf{H} dr = \mathbf{E} + \mathbf{e},$$

da cui, derivando rispetto ad r:

$$\varrho \frac{d\mathbf{u}}{dr} = j\omega\mu \mathbf{H}.$$

D'altra parte, il valore di **H** alla distanza generica r dal centro è:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{I}}{2\pi r} = \frac{1}{r} \int_0^r r\mathbf{u}dr,$$

quindi la precedente diviene:

$$r \frac{d\mathbf{u}}{dr} = j \frac{\omega\mu}{2\pi\varrho} \mathbf{I} = j \frac{\omega\mu}{\varrho} \int_0^r r\mathbf{u}dr. \tag{5}$$

Derivando rispetto ad r e ponendo

(6) $$a = \sqrt{\frac{2\varrho}{\omega\mu}} = \sqrt{\frac{\varrho}{\pi f\mu}},$$

essendo $f = \frac{\omega}{2\pi}$ la frequenza, si ottiene la seguente equazione differenziale cui soddisfa $\mathbf{u}$:

$$\frac{d^2\mathbf{u}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\mathbf{u}}{dr} - 2j\frac{\mathbf{u}}{a^2} = 0,$$

alla quale, assumendo per nuova variabile

$$x = (1-j)\frac{r}{a} = \sqrt{-2j}\,\frac{r}{a},$$

si può dare la forma tipica

(7) $$\frac{d^2\mathbf{u}}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d\mathbf{u}}{dx} + \mathbf{u} = 0$$

(della così detta equazione di Bessel d'ordine zero).

Le sole soluzioni di questa equazione regolari anche per $x = 0$ sono date dal prodotto di una costante arbitraria complessa per la serie (funzione cilindrica o di Bessel, d'ordine zero):

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2\cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} + \dots = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(n!)^2}\frac{x^{2n}}{2^{2n}}\ [1].$$

Si avrà dunque in definitiva:

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}J_0\left[(1-j)\frac{r}{a}\right],$$

dove $\mathbf{A}$ rappresenta una conveniente costante (in generale complessa), o meglio, mettendo in evidenza il valore $\mathbf{u}_1$ della densità nello strato esterno ($r = r_1$) del conduttore:

(8) $$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1\frac{J_0\left[(1-j)\frac{r}{a}\right]}{J_0\left[(1-j)\frac{r_1}{a}\right]}.$$

La grandezza a definita dalla (6) è ovviamente omogenea con una lunghezza: ad essa, per una ragione che vedremo fra poco, si dà il nome

[1] Se un integrale $\mathbf{u}$ della (7) è regolare per $x = 0$, deve essere $\mathbf{u}'(0) = 0$, quindi (sviluppo di Mac-Laurin) $\mathbf{u} = a_0 + \sum_2^\infty a_n x^n$. Sostituendo nel primo membro di (7) ed annullando i coefficienti delle successive potenze di x, si trova $n^2a_n^2 + a_{n-2} = 0$ per ogni $n > 1$, da cui segue la formola del testo.

di *penetrazione*. Giova rendersi conto del suo ordine di grandezza per i casi che maggiormente interessano la pratica. La (6) ne dà il valore in metri quando ϱ sia espresso in Ω-m, f in Hz e μ in H/m. Esprimendo invece ϱ in $\mu\Omega$-m, f in kHz, μ in μH/m, sarà da porre $\mu \cong \mu_r \cdot 4\pi \cdot 10^{-1}$, essendo μ_r la permeabilità relativa ($\mu_r = 1$ per l'aria) e sostituire $10^3 f$ ad f. Si ottiene così:

$$a = \frac{1}{20\pi} \sqrt{\frac{\varrho}{\mu_r f}}\,\mathrm{m} = 16 \sqrt{\frac{\varrho}{\mu_r f}}\,\mathrm{mm}\,.$$

Ad es., per il rame a 0 °C ($\varrho = 0{,}016$, $\mu_r = 1$), risulta $a = \dfrac{2{,}02}{\sqrt{f}}$ mm, quindi:

per	$f = 0{,}042$;	0,050;	0,1;	1 ;	10 ;	100 ;	1000 kHz
rispett.	$a = 9{,}8$;	9 ;	6,4;	2,02;	0,64;	0,20;	0,064 mm

Per un ferro avente $\varrho = 0{,}12$, $\mu_r = 1000$ si avrebbero valori $\sqrt{\dfrac{1000}{1} \cdot \dfrac{0{,}016}{0{,}12}} \cong 11{,}5$ volte minori; per l'acqua marina ($\varrho = 10^6$, $\mu_r = 1$), quei numeri si moltiplicherebbero per $\sqrt{\dfrac{10^6}{0{,}016}} = 7900$.

Della funzione J_0 e delle sue componenti reale ed immaginaria sono state costruite tabelle che consentono in ogni caso la esatta valutazione della legge di distribuzione della densità di corrente in conduttori circolari come quello considerato.

4. - Soluzioni approssimate. — Per le applicazioni pratiche, è di particolare interesse il vedere come la formola fondamentale (8) possa semplificarsi nei casi estremi, cioè per r_1 molto inferiore o molto superiore ad a.

Per r abbastanza piccolo in confronto ad a, caso questo che ordinariamente si verifica alle basse frequenze industriali (in cui, come si vede dalla tabella sopra riportata, la penetrazione risulta, per il rame, dell'ordine del cm) od anche alle alte frequenze purchè si tratti di fili di diametro molto piccolo, la (8) si può semplificare sostituendo ad J_0 lo sviluppo in serie arrestato al secondo termine. Con ciò, ricordando che $(1-j)^2$ vale $-2j$, l'espressione di $\mathbf{u}$ si riduce sensibilmente a

$$\mathbf{u} \cong \mathbf{u}_1 \frac{1 + j\dfrac{r^2}{2a^2}}{1 + j\dfrac{r_1^2}{2a^2}} \cong \mathbf{u}_1\left(1 + j\frac{r^2}{2a^2}\right)\left(1 - j\frac{r_1^2}{2a^2}\right)\,,$$

il cui modulo vale

$$u \cong u_1\left(1 + \frac{r^4 - r_1^4}{8a^4}\right)\,.$$

Si vede dunque che, nel passaggio dalla periferia agli strati più interni del conduttore, si verifica una progressiva diminuzione della densità (modulo); inoltre, procedendo verso l'interno si ha un ritardo progressivo di fase il cui importo angolare φ alla distanza r dal centro vale:

$$\operatorname{tg} \varphi \cong \frac{r_1^2 - r^2}{2a^2} .$$

Per valutare la resistenza apparente R, calcoliamo la potenza P dissipata per effetto Joule e dividiamola pel quadrato del valore efficace della corrente totale $\mathbf{I}_1$ convogliata.

Si ha evidentemente:

$$\mathbf{I}_1 = 2\pi \int_0^{r_1} \mathbf{u} r dr = 2\pi \mathbf{u}_1 \int_0^{r_1} \left(1 + j\frac{r^2 - r_1^2}{2a^2}\right) r dr = \pi \mathbf{u}_1 r_1^2 \left(1 - j\frac{r^2}{4a^2}\right) \text{ (1)},$$

il quadrato del cui modulo è:

$$I_1^2 = \pi^2 u_1^2 r_1^4 \left(1 + \frac{r_1^4}{16a^4}\right).$$

D'altra parte si ha:

$$P = 2\pi\varrho \int_0^{r_1} u^2 r dr = \varrho u_1^2 \pi r_1^2 \left(1 + \frac{1}{12}\frac{r_1^4}{a^4}\right);$$

quindi, a meno di termini di ordine superiore rispetto a quelli scritti, risulta

$$R = \frac{P}{I_1^2} \cong \frac{\varrho}{\pi r_1^2}\left(1 + \frac{r_1^4}{12a^4}\right)\left(1 - \frac{r_1^4}{16a^4}\right) \cong \frac{\varrho}{\pi r_1^2}\left(1 + \frac{1}{48}\frac{r_1^4}{a^4}\right),$$

cui giova dare l'aspetto

$$R = R_c\left(1 + \frac{1}{48}\frac{r_1^4}{a^4}\right),$$

avendo indicato con R_c la resistenza che lo stesso conduttore presenta quando sia percorso da corrente continua, cioè con densità di corrente uguale in tutti i punti della sezione.

Quando invece r sia notevolmente maggiore di a, cioè quando si abbia a che fare con valori di a molto piccoli e si limiti l'indagine a strati sufficientemente distanti dal centro, si può pervenire ad una interessante soluzione approssimata del problema che ci occupa, atta a fornire una chiara e completa idea dell'andamento quantitativo del fenomeno.

---

(1) Questa espressione fornisce senz'altro il valore efficace di $\mathbf{I}_1$ qualora $\mathbf{u}$ sia pure riferito al valore efficace.

A tale soluzione arriviamo approssimando senz'altro l'equazione differenziale (7) che governa il problema stesso. All'uopo osserviamo che, essendo identicamente

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{d^2(\mathbf{u}\sqrt{x})}{dx^2}=\frac{d^2\mathbf{u}}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{d\mathbf{u}}{dx}-\frac{\mathbf{u}}{4x^2},$$

la (6) può scriversi:

$$\frac{d^2(\mathbf{u}\sqrt{x})}{dx^2}+\mathbf{u}\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{4x^2}\right)=0\,.$$

L'approssimazione indicata consiste nel trascurare $\frac{1}{4x^2}$ rispetto all'unità, il che è lecito ogni qualvolta sia abbastanza grande il modulo di $4x^2$, cioè $\frac{8r^2}{a^2}$. Questo è quanto si verifica appunto quando si vogliano conoscere i valori di u in strati sufficientemente lontani dal centro, ancorchè a distanza, dalla periferia, notevole rispetto ad a. In particolare tale approssimazione sarà lecita per un conduttore anulare di raggio interno abbastanza grande rispetto ad a. In ogni caso il giudizio sull'attendibilità del risultato può sempre farsi a priori appena noto il valore di a; così, per valori di a dell'ordine di 1 cm, l'approssimazione sarà accettabile per frequenze di 10^5 Hz circa con fili di rame $\left(\frac{a^2}{8r_0^2}=0{,}005\right)$, per frequenze anche inferiori con fili di ferro, e così via.

Ridotta la (7) alla forma semplice

$$\frac{d^2(\mathbf{u}\sqrt{x})}{dx^2}+\mathbf{u}\sqrt{x}=0\,,$$

se ne deduce subito (App., *A*, 9):

$$\mathbf{u}\sqrt{x}=\mathbf{A}e^{jx}+\mathbf{B}e^{-jx}\,,$$

dove **A** e **B** sono costanti arbitrarie, in generale complesse. Sostituendo ad x il suo valore $(1-j)\frac{r}{a}$, si avrà la espressione di u in funzione di r:

$$\mathbf{u}=\mathbf{A}\,\frac{e^{(1+j)\frac{r}{a}}}{\sqrt{r}}+\mathbf{B}\,\frac{e^{-(1+j)\frac{r}{a}}}{\sqrt{r}}\,,$$

avendo conglobato in **A**, **B** il fattore $\sqrt{\frac{a}{1-j}}$.

Per valori di r sufficientemente grandi, il secondo termine, il cui modulo vale $\frac{B}{e^{\frac{r}{a}}\sqrt{r}}$, è trascurabile rispetto al primo, e pertanto potrà approssimativamente ritenersi:

$$\mathbf{u}=\mathbf{A}\,\frac{e^{(1+j)\frac{r}{a}}}{\sqrt{r}}\,.$$

A questa, introducendo il valore $\mathbf{u}_1$ di $\mathbf{u}$ per $r = r_1$, si può dare la forma

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 \frac{e^{-(1+j)\frac{y}{a}}}{\sqrt{1-\frac{y}{r_1}}},$$

che si presta al calcolo della densità $\mathbf{u}$ alla profondità $y = r_1 - r$ misurata dalla periferia. Per profondità y piccole rispetto ad r_1, ancorchè dell'ordine di multipli elevati di a, si potrà trascurare $\frac{y}{r_1}$ in confronto dell'unità e scrivere semplicemente:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 e^{-(1+j)\frac{y}{a}}. \tag{9}$$

Questa relazione mostra che, procedendo dalla periferia, si incontrano densità via via decrescenti con legge geometrica, cioè in guisa che alle profondità a, $2a$, $3a$, ... la densità viene ad assumere valori e, e^2, e^3, ... volte più piccoli di quelli che ha alla superficie. E contemporaneamente le correnti che percorrono i successivi anelli concentrici si trovano progressivamente sfasate; più precisamente il ritardo di fase, a partire dalla periferia, importa un radiante per ogni spessore a.

Si vede dunque che, come s'era asserito alla fine nel n. 2, la corrente tende a concentrarsi verso gli strati periferici, e ciò in misura tanto più notevole quanto minore è a, la cui dipendenza dalla frequenza, dalla resistività e dalla permeabilità è definita dalla (6).

Nei casi in cui a risulta molto piccolo rispetto ad r_1, gli strati interni praticamente non partecipano alla conduzione, con che dall'esame preventivo del valore di a si può effettivamente giudicare dei limiti entro i quali il superiore procedimento è a ritenersi applicabile.

Ad es., nel caso di conduttori di elevata resistività, la lunghezza a assume valori relativamente grandi, e pertanto il procedimento indicato non potrà applicarsi se non a conduttori di raggio molto grande. In particolare la formola (9) si presta allo studio della penetrazione delle correnti ad alta frequenza entro l'acqua del mare. Per questa, con $f = 30$ kHz, si ha per a il valore di m 2,89, ragguardevole, è vero, in senso assoluto, ma tuttavia trascurabile in confronto al raggio del conduttore (raggio terrestre) [1]. La profondità y alla quale la densità di corrente si trova ad es. ridotta ad 1/100 del suo valore in superficie, si calcola mediante la $\frac{y}{a} = \log 100$ e si trova così $y = 4{,}6 \cdot 2{,}89 = 13{,}30$ m. Con maggiori valori della frequenza si avrebbero maggiori valori di a e quindi, a pari profondità, maggiore attenuazione. È questa la ragione per cui, per le

[1] Appunto perchè questa grandezza è trascurabile in confronto al raggio terrestre, è lecito ritenere valida la legge esponenziale anche fino a notevoli profondità.

trasmissioni radiotelegrafiche destinate ad essere ricevute da sottomarini in immersione, si adoperano frequenze relativamente basse (onde lunghe).

In ogni caso, la soluzione (9), che ha carattere approssimato per conduttori cilindrici di raggio finito, acquista carattere rigoroso nel caso di un mezzo conduttore limitato da un piano indefinito: questo viene a sostituire la superficie esterna di raggio r_1 e gli strati di profondità y non sono altro che i piani alla distanza y da quello.

5. - Resistenza apparente. - Penetrazione. — Quanto alla valutazione dell'aumento di resistenza dovuto alla ineguale ripartizione della corrente, essa può sempre farsi, come già vedemmo nel caso trattato al n. prec., calcolando il rapporto fra la potenza relativa all'effetto Joule ed il quadrato della corrente, od anche, in modo più semplice e particolarmente espressivo, considerando la resistenza apparente come il rapporto fra la componente attiva della tensione applicata e la corrente totale, così come la reattanza apparente può considerarsi equivalere al rapporto fra la componente reattiva della stessa tensione e la corrente totale.

Per arrivare allo scopo seguendo questo punto di vista, basterà specificare la equazione fondamentale (4) per $r = r_1$. Se con L_e indichiamo l'induttanza parziale calcolata in base al flusso esterno al conduttore, si ha, col solito significato di $\mathbf{u}_1$ ed $\mathbf{I}_1$:

$$\mathbf{E} = \varrho \mathbf{u}_1 + j\omega L_e \mathbf{I}_1 .$$

D'altra parte, se R ed L indicano la resistenza e induttanza apparenti, si avrà pure, per la definizione stessa di tali parametri:

$$\mathbf{E} = R\mathbf{I}_1 + j\omega L \mathbf{I}_1 ,$$

che, confrontata con la precedente, fornisce la importante relazione:

$$R + j\omega(L - L_e) = \varrho \frac{\mathbf{u}_1}{\mathbf{I}_1} . \tag{10}$$

Ora, per calcolare il secondo membro, bisogna procurarsi il valore di $\mathbf{I}_1$, il quale alla sua volta può calcolarsi mediante l'integrale

$$\mathbf{I}_1 = 2\pi \int_0^{r_1} r\mathbf{u} dr ,$$

o più rapidamente mediante la (5) che, specificando per $r = r_1$, può scriversi, tenuto conto della (6):

$$\mathbf{I}_1 = -j\pi a^2 \left(r \frac{d\mathbf{u}}{dr}\right)_{r=r_1} .$$

Queste formole sono valide in ogni caso. Quando si tratti di conduttore cilindrico rettilineo, il calcolo della resistenza apparente riesce alquanto laborioso in quanto richiede l'uso della funzione J_0 di Bessel e della sua derivata. Il risultato cui si perviene è sintetizzato nel diagramma

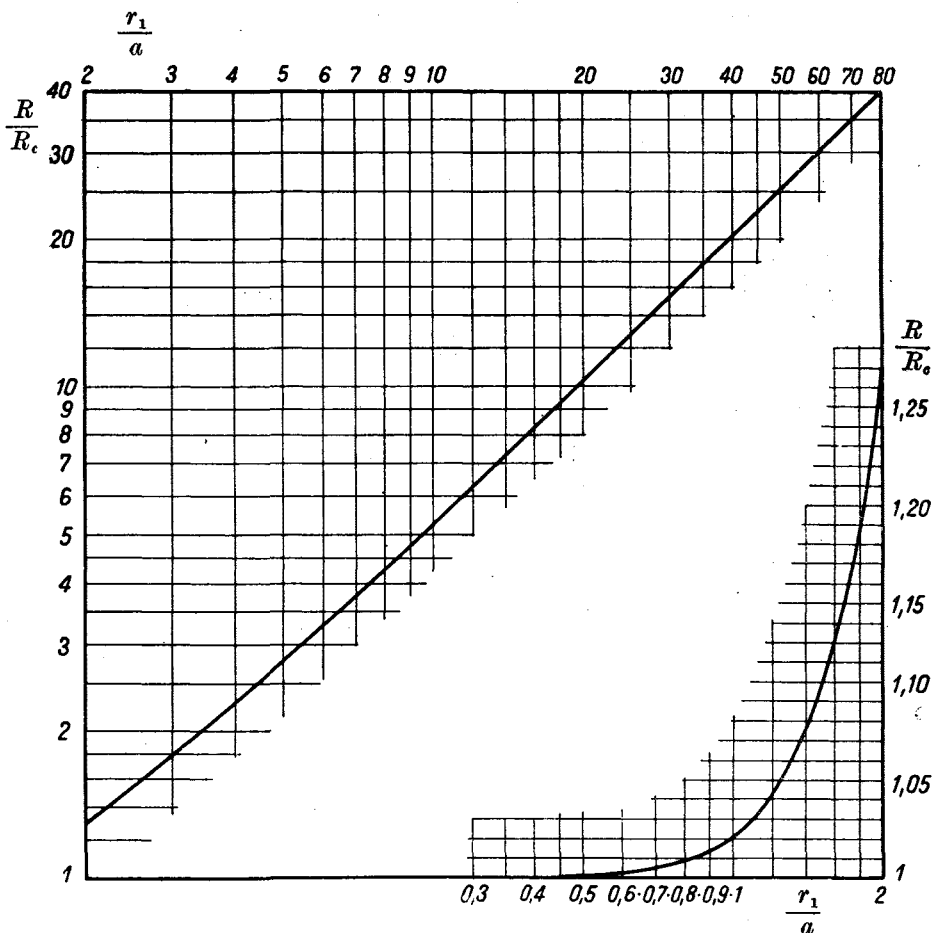



Fig. 16

disegnato in fig. 16, ove per ascisse sono assunti i valori di $\frac{r_1}{a}$ e per ordinate quelli del rapporto $R : R_c = R\,\frac{\pi r_1^2}{\varrho}$.

Nel caso particolare in cui vale la (9), la $\frac{d\mathbf{u}}{dr}$ si deduce comodamente derivando la (9) stessa, dopo di che, specificando per $r = r_1$, si trova:

$$\left(r\frac{d\mathbf{u}}{dr}\right)_{r=r_1} = (1 + j)\,\frac{r_1}{a}\,\mathbf{u}_1\,,$$

per cui, in definitiva:

$$R + j\omega(L - L_e) = \frac{\varrho(1+j)}{2\pi r_1 a},$$

cioè

$$R = \omega(L - L_e) = \frac{\varrho}{2\pi r_1 a}.$$

Ora, data la piccolezza di $\frac{a}{r_1}$, il secondo membro misura sensibilmente la resistenza di una corona circolare di raggio r_1 e di spessore a; si può quindi concludere che la resistenza del conduttore coincide con quella che esso presenterebbe ove la corrente fosse distribuita in modo uniforme in una tale sezione ridotta (e ad altrettanto ammonta l'aumento di reattanza). Per questa ragione alla grandezza a si dà il nome di *penetrazione.*

Da quanto precede si conclude senz'altro che il rapporto fra la resistenza R e la resistenza R_c, che il medesimo conduttore presenterebbe per corrente continua, uguaglia il rapporto inverso delle sezioni utili interessate in regime di distribuzione uniforme della densità, cioè $\pi r_1^2 : 2\pi r_1 a = r_1 : 2a$; si ha dunque:

$$R : R_c = r_1 : 2a \text{ [1]}.$$

6. - Caso del conduttore a nastro. — La formola (9), per valori sufficientemente piccoli di a, può essere sfruttata anche nel caso di un conduttore foggiato a nastro quando la larghezza l sia abbastanza grande in confronto allo spessore $2s$ (fig. 17). In tal caso si potrà assimilare il nastro ad un sistema di due striscie, ciascuna di spessore s, fra loro, per così dire, saldate, e trattare ciascuna delle due striscie come un conduttore cilindrico di raggio infinito. In tali condizioni, ritenendo, come è naturale, che la densità $\mathbf{u}$ abbia il medesimo valore sulle due superfici terminali, il valore generico della densità stessa alla quota x misurata a partire dalla superficie mediana, risulterà rappresentato da una espressione del tipo:

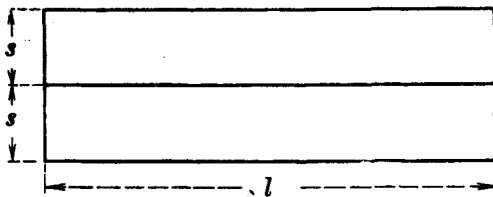



Fig. 17

$$\mathbf{u} = \mathbf{A} e^{-(1+j)\frac{s-x}{a}} + \mathbf{A} e^{-(1+j)\frac{s+x}{a}}.$$

[1] Questa formola, dovuta a Lord Rayleigh, risente ovviamente delle approssimazioni introdotte nel calcolo. Per avere una idea dell'errore di cui è affetta, si supponga ad esempio $r = 1$ mm, $f = 10$ kHz, cioè (cfr. pag. 42) $a = 0{,}64$ pel rame. Si avrebbe $R = 7{,}8\, R_c$, laddove il calcolo esatto eseguito con la funzione di Bessel (vedi diagramma di fig. 16) darebbe $R = 8{,}03\, R_c$.

essendo $\mathbf{A}$ una conveniente costante complessa; oppure, ponendo $\mathbf{A}' = \mathbf{A}e^{-(1+j)\frac{s}{a}}$, dall'altra

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}'e^{(1+j)\frac{x}{a}} + \mathbf{A}'e^{-(1+j)\frac{x}{a}} = 2\mathbf{A}'\mathrm{ch}\left[(1+j)\frac{x}{a}\right],$$

per cui, detta $\mathbf{u}_1$ la densità alle superficie terminali (cioè per $x = 0$), si può scrivere:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 \frac{\mathrm{ch}\left[(1+j)\frac{x}{a}\right]}{\mathrm{ch}\left[(1+j)\frac{s}{a}\right]}.$$

Per calcolare la resistenza apparente potremmo servirci della formola (10), previa valutazione della corrente totale $\mathbf{I}_1$.

Ponendo per semplicità $l = 1$, si ha:

$$\mathbf{I}_1 = 2\int_0^s \mathbf{u}\,ds = \frac{2\mathbf{u}_1 a}{1+j}\,\frac{\mathrm{sh}\left[(1+j)\frac{s}{a}\right]}{\mathrm{ch}\left[(1+j)\frac{s}{a}\right]},$$

dopo di che, in conformità alla predetta formola (10), si avrà la resistenza calcolando la parte reale del numero complesso

$$\varrho\frac{\mathbf{u}_1}{\mathbf{I}_1} = \varrho\,\frac{1+j}{2a}\,\frac{\mathrm{ch}\left[(1+j)\frac{s}{a}\right]}{\mathrm{sh}\left[(1+j)\frac{s}{a}\right]}.$$

Moltiplicando numeratore e denominatore per il coniugato del denominatore, oppure facendo uso delle formole (27‴) di App., *A*, 3, si trova agevolmente per la resistenza cercata il valore

$$\frac{R}{R_c} = \frac{s}{a}\,\frac{\mathrm{sh}\,\frac{2s}{a} + \mathrm{sen}\,\frac{2s}{a}}{\mathrm{ch}\,\frac{2s}{a} - \cos\frac{2s}{a}},$$

dove $R_c = \frac{\varrho}{2s}$ rappresenta la resistenza dello stesso nastro in corrente continua [1].

Si osserverà che per $\frac{2s}{a}$ sufficientemente grande, essendo $\mathrm{sh}\,\frac{2s}{a} \cong \mathrm{ch}\,\frac{2s}{a}$ e $\mathrm{sen}\,\frac{2s}{a}$, $\cos\frac{2s}{a}$ trascurabili in confronto a $\mathrm{sh}\,\frac{2s}{a}$, $\mathrm{ch}\,\frac{2s}{a}$, il secondo mem-

---

[1] Il lettore potrà, a titolo di esercizio, verificare che al medesimo valore di R si perviene facendo il rapporto fra la potenza corrispondente all'effetto Joule, misurata da $\varrho\int_{-s}^{s} u^2 dx$ ed il quadrato del modulo della corrente totale $\mathbf{I}_1$.

bro equivale approssimativamente ad $\frac{s}{a}$, cioè al rapporto fra la sezione dell'intera striscia e quella di un doppio strato di spessore a; si ritrova cioè lo stesso risultato dianzi trovato nel caso di un conduttore circolare di raggio molto grande rispetto alla penetrazione.

7. - Osservazioni tecniche. — La tendenza della corrente ad addensarsi alla superficie dei conduttori percorsi da correnti ad elevata frequenza, mette in luce la convenienza di usare, in tali casi, conduttori aventi, a parità di sezione, grande superficie. Così saranno da preferirsi i conduttori cavi a quelli pieni, le sezioni rettangolari ad elevato rapporto dei lati (nastri) alle circolari, e così via.

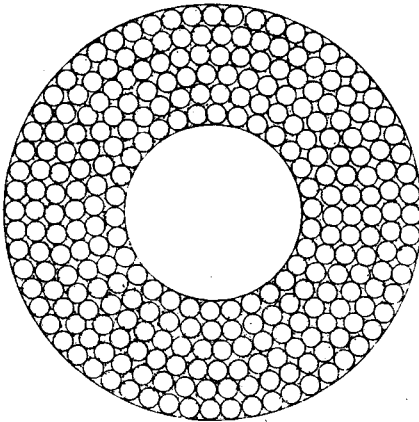



Fig. 18

In particolare, dovendo convogliare correnti intense, converrà ripartirle in molti fili sottili anzichè usare un conduttore unico (il che giova anche per facilitare lo smaltimento del calore Joule). Invero, nelle applicazioni radiotecniche, si usano i così detti conduttori « compound », composti cioè di un gran numero di conduttori molto sottili — per ciascuno dei quali l'effetto di pelle sia quasi trascurabile — riuniti a formare un unico fascio (fig. 18). Tale fascio costituisce in generale un complesso a carattere tubolare, anzichè massiccio, cosicchè la sezione del conduttore si presenta a forma di corona circolare, la cui parte interna viene poi riempita di canapa od altro materiale inerte. Occorre naturalmente che i conduttori elementari siano fra loro isolati ed è utile poi che vengano *trasposti* in modo che ciascuno di essi, lungo una determinata lunghezza assiale, venga ad occupare tutte le posizioni possibili nella sezione utile del conduttore complessivo; diversamente si troverebbe, pel rapporto $\frac{R}{R_c}$, lo stesso valore che compete al conduttore tubolare massiccio.

8. - Caso dei conduttori avvolti a bobine. — Quanto precede vale per conduttori di sezione circolare, rettilinei o quasi.

Nel caso di fili avvolti a spirale (bobine), a motivo della reazione magnetica fra le spire vicine, si ha un ulteriore addensamento della corrente nella parte della sezione del conduttore che corrisponde all'interno della bobina (fig. 19). La resistenza apparente risulta perciò maggiore di quella che si avrebbe se lo stesso conduttore fosse teso rettilineamente.

Infine, un'altra causa di disuniformità nella ripartizione della corrente nella sezione risiede nel fatto che, nella massa del conduttore, si ha produzione di correnti parassite.

Per il calcolo dell'aumento di resistenza apparente delle bobine, sono state proposte da taluni Autori formole acconce.

Per es., il Cohen, per bobine ad un solo strato di filo formato con materiale non magnetico, e con le spire estremamente avvicinate, ha

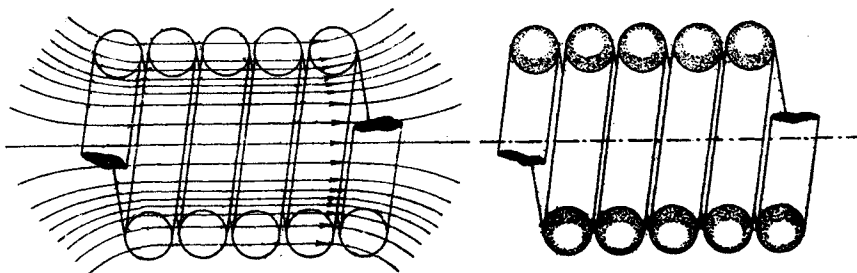



Fig. 19

suggerito la seguente formola (1) pel rapporto $\frac{R}{R_c}$ fra la resistenza apparente R a frequenza f (kHz) e la resistenza R_c in corrente continua:

$$\frac{R}{R_c} = 1 + 0{,}49\, n^2 d^3 \sqrt{\frac{f}{\varrho}},$$

dove n è il numero di spire per cm, d il diametro del filo in cm, ϱ, al solito, la resistività in $\mu\Omega$-m.

Il Mesny, per un filo avvolto ad elica, ha proposto la seguente formola:

$$\frac{R}{R_1} = 1 + (q - 1) \sqrt{\frac{p-1}{p}},$$

dove, rappresentando con R_1, R_c le resistenze in alta frequenza ed in corrente continua calcolate per filo teso rettilineamente, p indica il rapporto $\frac{R_1}{R_c}$ e q è un numero variabile, funzione del rapporto a fra il passo dell'avvolgimento ed il diametro del filo, i cui valori sono dati dalla tabella seguente.

a	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9 ed oltre
q	3,5	2,48	2,0	1,5	1,28	1,19	1,12	1,07	1,03	1,00

(1) Tale formola fu dedotta pel caso di filo a sezione quadrata, ma è sufficientemente approssimata anche per filo a sezione circolare.

Nel caso delle bobine è ancora da rilevarsi che la capacità distribuita fra le spire, e fra queste rispetto ai corpi circostanti (segnatamente i sostegni delle bobine stesse), determina — come vedremo in un prossimo Capitolo — una variazione dell'intensità della corrente da punto a punto, per cui la valutazione di quella che si chiama corrente convogliata non può farsi se non con speciali convenzioni.

9. - Induttanze. - Variometri. — Altri elementi assai importanti nella costituzione dei circuiti usati nelle applicazioni r. t. sono le induttanze,

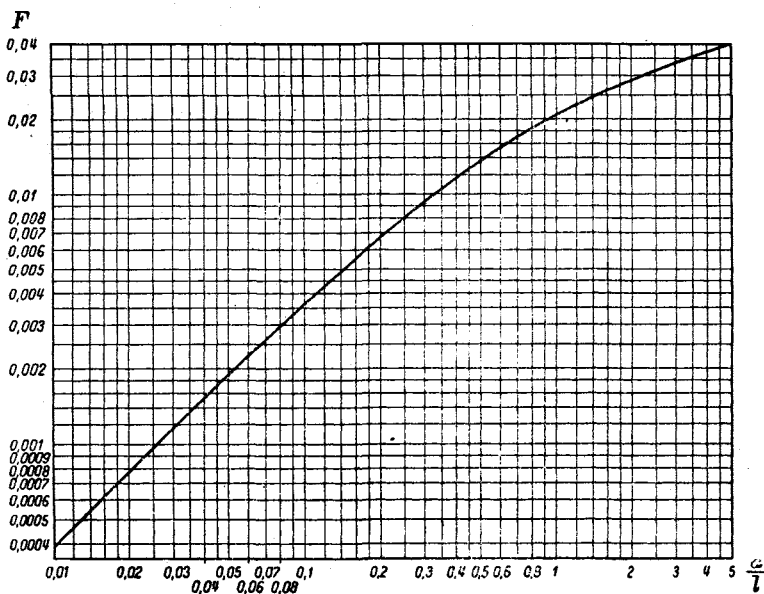



Fig. 20

consistenti in tratti di circuiti in cui si localizzano opportunamente degli elevati valori del coefficiente d'a. i., tali quindi che in essi si può immagazzinare energia magnetica.

Tali organi vengono in generale costituiti con bobine, le quali sono dispositivi derivati dal classico solenoide, e consistenti in circuiti formati da più spire connesse in serie.

Il calcolo dell'induttanza di un tale sistema si presenta particolarmente semplice nel caso in cui l'avvolgimento è così conformato da assicurare che il campo magnetico sia confinato in una regione ben determinata, come ad es., nel caso tipico (ideale) di un avvolgimento ben serrato attorno ad un toro (anello) di materiale di permeabilità costante.

Questo caso è già stato studiato negli Elementi (El., V, 27), ove si è trovato che il valore dell'induttanza L è dato, in μH, da:

$$L = \mu \frac{Sn^2}{l},$$

essendo S l'area di ogni spira in m² ed l la lunghezza assiale del toro in m, μ la permeabilità in μH/m ($\mu = 4\pi \cdot 10^{-1}$ per l'aria).

La stessa formola è valida per un solenoide rettilineo di lunghezza grandissima (infinita), e, se le spire sono circolari di raggio a, essa può scriversi:

$$L = \mu_r \frac{3{,}94\, n^2 a^2}{l} k,$$

essendo k un coefficiente dipendente dal rapporto $\frac{a}{l}$ e che tende all'unità per $\frac{a}{l} \to 0$.

È questa, nella sua forma più semplice, la *formola di Nagaoka*.

Per l'uso pratico, conviene porre $F = 0{,}0394 \frac{a}{l} k$, e dare alla precedente l'aspetto

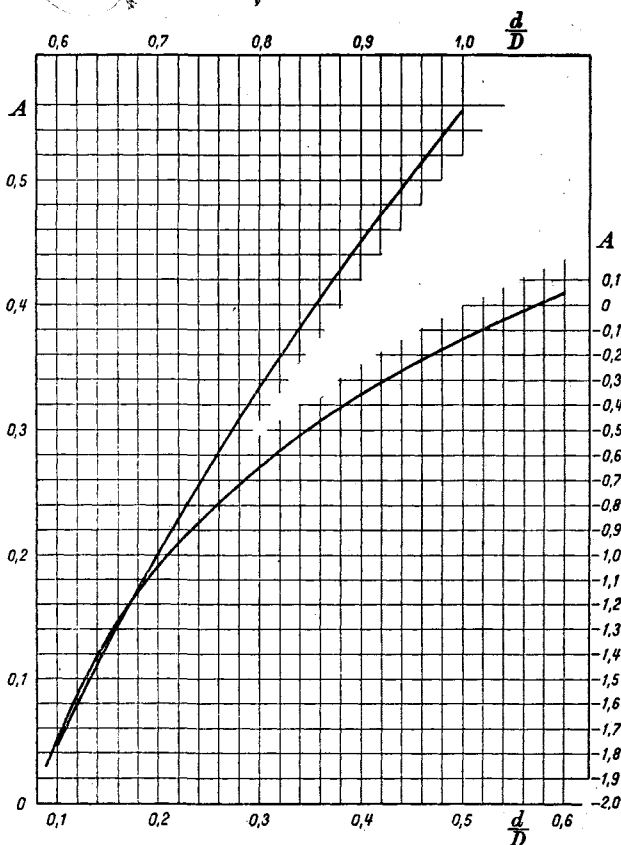
$$L = \mu_r F n^2 a,$$

dove μ_r è la permeabilità relativa ($\mu_r = 1$ per l'aria) ed a è espresso in cm. Per avere il valore di L in μH, si debbono attribuire ad F i valori indicati nel diagramma di fig. 20.

Fig. 21

Per es. per una bobina lunga 5 cm formata con 50 spire di 10 cm di raggio, essendo $\mu_r = 1$ (aria), si avrebbe

$$\frac{a}{l} = 2\,, \quad F = 0{,}0291 \quad \text{quindi} \quad L = 0{,}0291 \cdot 50^2 \cdot 10 = 728\, \mu\text{H}\,.$$

Questa formola è esatta nel caso che il filo abbia sezione rettangolare e le spire contigue siano ad immediato contatto. Nel caso di filo a sezione

circolare con distanza fra le spire superiore al diametro del filo, occorre applicare un termine di correzione T scrivendo:

$$L = \mu_r(Fn^2a - T) \quad \text{con} \quad T = 0{,}01256\, an\, (A + B)\,,$$

dove A dipende dal rapporto $\frac{d}{D}$ fra il diametro d del filo e la distanza

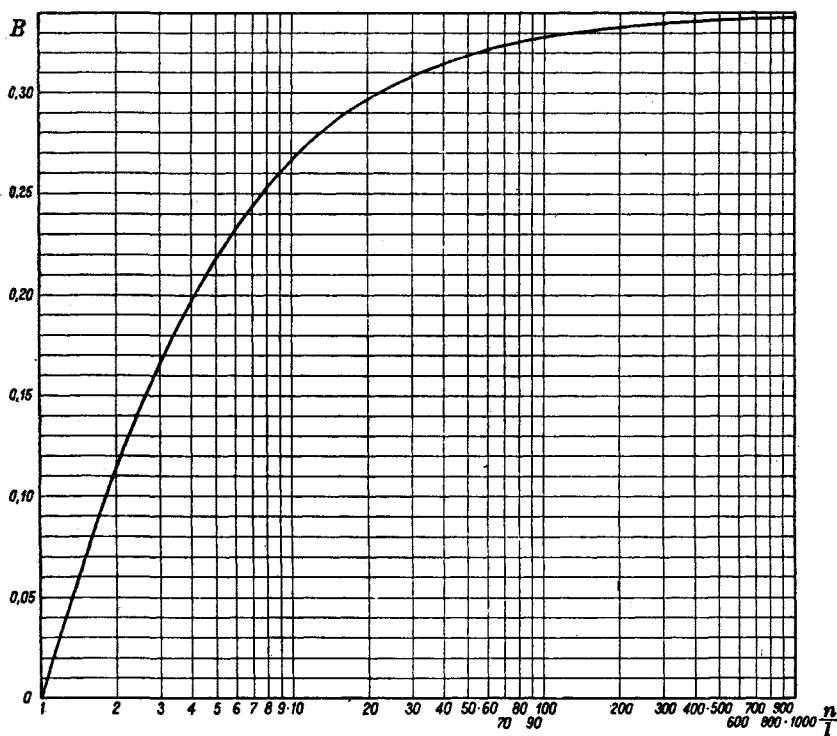



Fig. 22

D fra due fili contigui, e B dal numero $\frac{n}{l}$ delle spire per unità di lunghezza. I valori di A e B sono deducibili dai diagrammi disegnati nelle figg. 21 e 22.

Per il calcolo dell'induttanza di bobine ad uno o più strati con fili molto vicini, può servire la seguente formula empirica:

$$L = \frac{0{,}0394\, \mu_r a^2 n^2 CD}{l + S + R} \quad (L \text{ in } \mu\text{H per } a,\ l,\ S,\ R \text{ in cm}),$$

con

$$C = \frac{5l + 6S + R}{5l + 5S + 0{,}7R}\,, \quad D = 0{,}5\ \text{Log}\left(100 + \frac{14R}{2l + 3S}\right),$$

avendo i simboli il significato indicato in fig. 23.

Per le bobine piatte ad un solo strato, può ancora servire la formola di Nagaoka, purchè per a si intenda il raggio medio della bobina e con l la dimensione radiale dello strato.

Fig. 23

Per il sistema costituito da due bobine percorse in serie dalla stessa corrente, l'induttanza L si calcola mediante quelle L_1 e L_2 delle due bobine e con la loro induttanza mutua M con la formola:

$$L = L_1 + L_2 + 2M ,$$

dove M è da intendersi positivo o negativo secondo che i flussi prodotti dalle due bobine sono concordanti o discordanti.

Siccome il valore di M dipende dalla posizione reciproca delle due bobine, si comprende come, rendendo l'una di esse mobile rispetto all'altra, si possa, in generale, realizzare una mutua induttanza variabile, e in particolare, connettendo in serie le due bobine, una induttanza complessiva variabile fra:

$$L_1 + L_2 + 2M \quad \text{e} \quad L_1 + L_2 - 2M .$$

A tale proposito è utile osservare che M può risultare rigorosamente nullo, quando si tratti di due spire piane di forma regolare (ad es. rettangoli, cerchi) situate in piani normali, una delle quali sia in un piano che è di simmetria per l'altra.

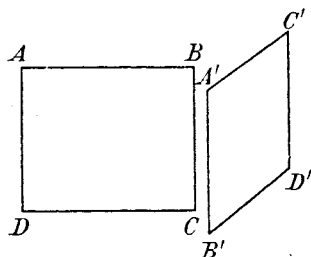
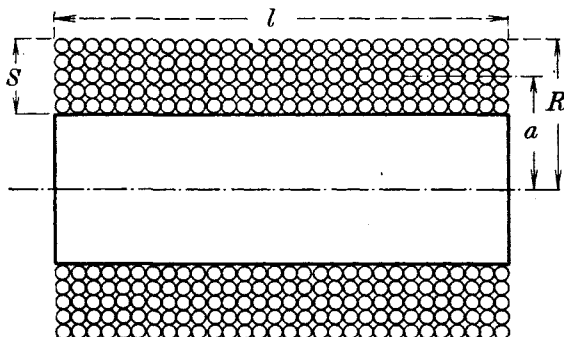



Fig. 24

Per es., nel caso dei due rettangoli $ABCD$ e $A'B'C'D'$ (fig. 24), la cosa è facilmente verificabile, osservando che, per la formola di Neumann, le mutue induttanze parziali di ogni lato del secondo rettangolo rispetto ad AB e CD sono tutte nulle perchè per esse è $\cos \varepsilon = 0$, e così pure avviene per quelle di AD e BC rispetto a ciascuno dei lati $A'C'$, $B'D'$, mentre le mutue induttanze di AD rispetto ad $A'B'$ e $C'D'$ hanno, per ragioni di simmetria, valori opposti, e così dicasi per BC.

Alla stessa conclusione si perviene per altre forme regolari di spire, scomponendo in elementi infinitesimi, per i quali si possa applicare un ragionamento simile al precedente.

Analogamente, almeno in via approssimata, risulta nulla la mutua

induttanza di due ordinarie bobine a spire parallele quando i piani delle spire delle bobine stesse siano fra loro normali.

Con due tali bobine, disposte in serie, si realizza un comodo e pratico *variometro*, cioè un dispositivo a induttanza variabile, quando l'una di esse sia girevole attorno ad un asse, come indicato in fig. 25. Altro tipo di induttanza variabile è quello raffigurato nella fig. 26.

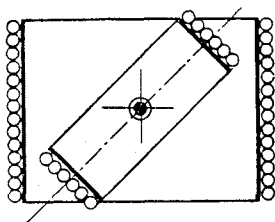



Fig. 25

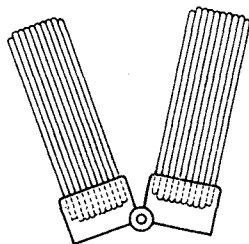



Fig. 26

È utile notare che se una bobina avvolta su un toro ad asse circolare, oppure rettilinea, ma di lunghezza abbastanza elevata rispetto al raggio delle spire, viene divisa in due parti comprendenti n_1 ed n_2 spire, si ha (cfr. El., V, 27):

$$L_1 = An_1^2\,, \quad L_2 = An_2^2\,, \quad M = An_1n_2$$

$$\left(\text{(essendo } A = \mu\frac{S}{l}\right),$$

semprechè, ben inteso, a ciascuna delle due parti si possa ancora applicare la formola teorica indicata. Le precedenti, confrontate con la

$$L = A(n_1 \pm n_2)^2\,,$$

mettono in luce in modo assai semplice la relazione:

$$L = L_1 + L_2 \pm 2M\,.$$

Nelle ipotesi indicate, si avrebbe anzi $L = (\sqrt{L_1} \pm \sqrt{L_2})^2$ e quindi $M^2 = L_1L_2$. In generale invece, come è noto, si ha:

$$M^2 \leq L_1L_2 \text{ (1)},$$

(1) Ciò può facilmente verificarsi pensando che, qualunque siano i_1 e i_2, l'espressione

$$L_1i_1^2 + 2Mi_1i_2 + L_2i_2^2$$

dell'energia complessiva del campo magnetico delle due correnti i_1, i_2 deve avere valore positivo o nullo, quindi tale deve risultare:

$$L_1\left(\frac{i_1}{i_2}\right)^2 + 2M\left(\frac{i_1}{i_2}\right) + L_2\,.$$

Ora, dall'Algebra è noto che affinchè un trinomio a coefficienti estremi positivi sia costantemente non negativo, è necessario che sia non positivo il suo discriminante, cioè $M^2 - L_1L_2 \leq 0$.

ed il rapporto fra il primo ed il secondo membro misura il quadrato di quello che si chiama *fattore di accoppiamento* dei due circuiti.

10. - Alcune regole pel calcolo di mutue induttanze. — Diamo qui i valori della mutua induttanza M di due circuiti nei casi più semplici.

Per due spire circolari coassiali nell'aria (fig. 27) si ha (valori in μH)

$$M = F\sqrt{Aa}\,, \tag{11}$$

dove a, A sono i raggi delle due spire misurati in cm, e, essendo D la distanza (in cm) fra i centri, F rappresenta una funzione del rapporto fra i segmenti r_1 ed r_2 indicati in figura:

$$\frac{r_2}{r_1} = \sqrt{\frac{\left(1-\frac{a}{A}\right)^2+\frac{D^2}{A^2}}{\left(1+\frac{a}{A}\right)^2+\frac{D^2}{A^2}}}\,,$$

rappresentata dal diagramma di fig. 28.

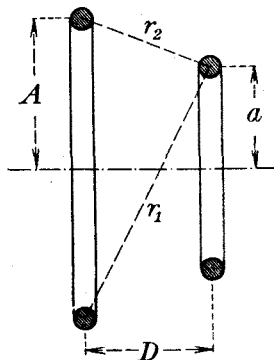



Fig. 27

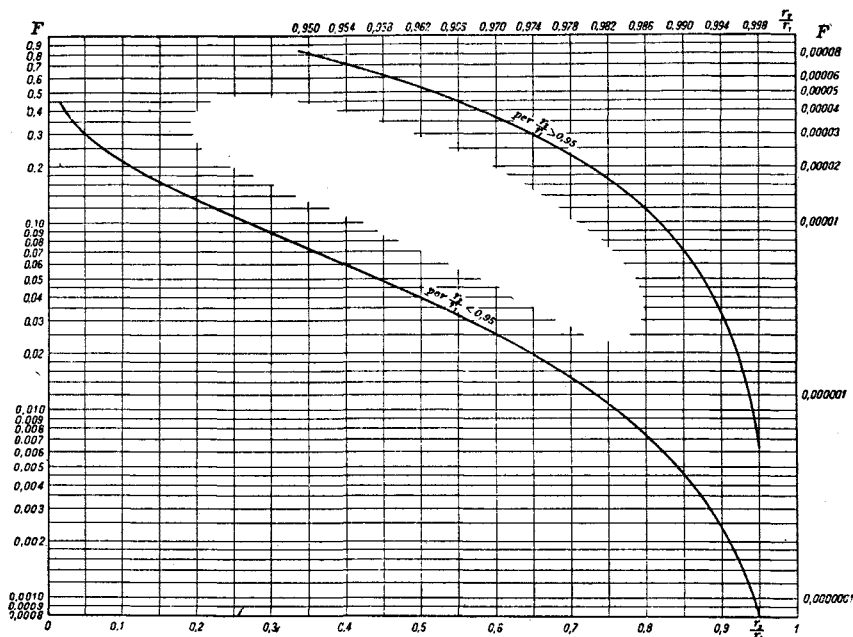



Fig. 28

Per due bobine coassiali con avvolgimento a sezione rettangolare di n_1, n_2 spire rispettivamente, si può ritenere:

$$M = n_1 n_2 M_0\,,$$

essendo M_0 il valore (calcolato con la formola (11)) della mutua induttanza fra due spire circolari coassiali passanti per i centri delle sezioni rette degli avvolgimenti (indicati con un punto nero nella fig. 29). Questa formola è applicabile con buona approssimazione anche se le sezioni rette sono di dimensioni notevoli, purchè le due bobine siano abbastanza lontane. Se invece esse sono piuttosto vicine, e le dimensioni della sezione retta dell'avvolgimento di ciascuna sono relativamente grandi, converrà ritenere ciascun avvolgimento suddiviso in due o più porzioni uguali e valutare la mutua induttanza totale M come somma di quella relativa a ciascuna coppia formata con una porzione del primo avvolgimento e una del secondo. Così, se il primo avvolgimento viene diviso in tre parti

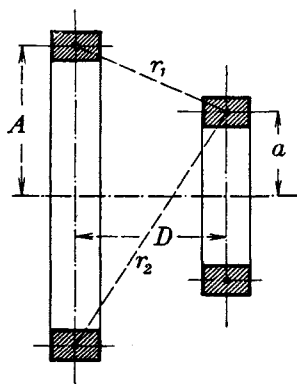
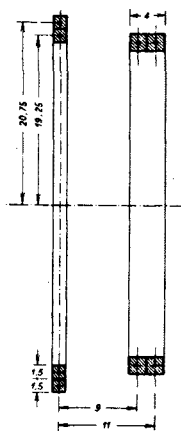



Fig. 29 Fig. 30

1, 2, 3 di $\frac{n_1}{3}$ spire ciascuna ed il secondo in due parti 4, 5, di $\frac{n_2}{2}$ spire ciascuna, si avrà:

$$M = \frac{n_1}{3} \cdot \frac{n_2}{2} (M_{14} + M_{24} + M_{34} + M_{15} + M_{25} + M_{35}),$$

essendo $M_{14}, \ldots, M_{35}$ da calcolarsi con la (11) in relazione alle spire mediane delle coppie 1, 4; ... ; 3, 5.

Per es., per gli avvolgimenti di fig. 30, converrà operare la suddivisione in due parti in un certo senso per il primo, in senso normale per il secondo, talchè i valori di a per le due parti del primo avvolgimento saranno di 19,25 e 20,75 cm, e quelli di D relativi ad un elemento del primo avvolgimento ed ai due del secondo saranno di 9 e 11 cm.

Per due bobine cilindriche coassiali non concentriche, nell'aria, i cui avvolgimenti siano fatti con conduttore a sezione rettangolare e con le spire a contatto si trova

$$M = 0{,}00245 \frac{a^2 A^2 n_1 n_2}{l(x_2 - x_1)} (k_1 K_1 + k_3 K_3 + k_5 K_5 + \ldots),$$

con

$$k_1 = 2l, \qquad K_1 = \frac{2}{A^2}\left(\frac{x_2}{r_2} - \frac{x_1}{r_1}\right),$$

$$k_3 = a^2 l\left(4\frac{l^2}{a^2} - 3\right), \qquad K_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{x_1}{r_1^5} - \frac{x_2}{r_2^5}\right),$$

$$k_5 = a^4 l\left(\frac{5}{2} - 10\frac{l^2}{a^2} + 4\frac{l^4}{a^4}\right), \quad K_5 = \frac{A^2}{8}\left\{\frac{x_1}{r_1^9}\left(4\frac{x_1^2}{A^2} - 3\right) - \frac{x_2}{r_2^9}\left(4\frac{x_2^2}{A^2} - 3\right)\right\},$$

il significato dei simboli essendo visibile in fig. 31 e le dimensioni lineari essendo valutate in cm per ottenere M in μH. Questa formola, arrestata

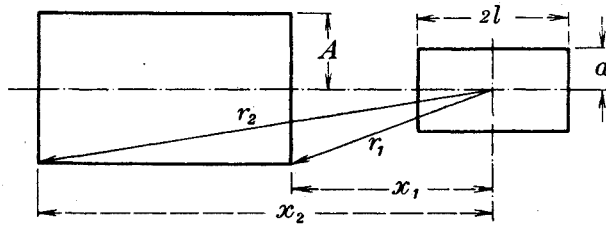



Fig. 31

ai termini scritti, dà risultati sufficientemente approssimati per bobine corte. Nel caso di bobine lunghe, si procederà come nel caso precedente, previa suddivisione di ogni bobina in parti convenientemente corte.

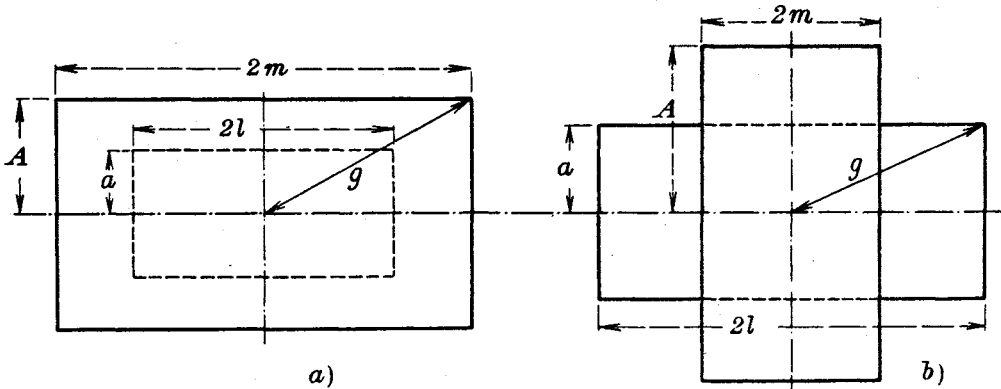



Fig. 32

Infine, per due bobine coassiali concentriche di lunghezza $2l$ (interna) e $2m$ (esterna), di raggi rispettivi a, A (l, m, a, A in cm), si ha

$$M_{\mu H} = \frac{0{,}01974\, a^2 N_1 N_2}{g}\left[1 + \frac{A^2 a^2}{8 g^4}\left(3 - 4\frac{b^2}{a^2}\right)\right],$$

dove b e c rappresentano rispettivamente il minore ed il maggiore dei due numeri l ed m, e g in ogni caso vale $\sqrt{A^2 + c^2}$ (vedi figg. 32 a), b), nella prima delle quali è $b = l$, $c = m$, nella seconda invece $b = m$, $c = l$).

11. - Induttanze con ferro. - Effetto pellicolare magnetico. — Per elevare il valore dell'induttanza di una bobina, si può, se la frequenza di lavoro non è molto grande, ricorrere a nuclei di ferro, mettendo così in giuoco valori di μ ben superiori a quello dell'aria (o in generale dei materiali non magnetici). Se però la frequenza supera alcuni kHz, il vantaggio si va rapidamente riducendo, sia per le dissipazioni isteretiche, sia perchè, a meno che non si tratti di nuclei fatti con materiale magnetico molto suddiviso, con ragionamenti analoghi a quelli accennati al n. 2, si può dimostrare che il flusso tende a localizzarsi nelle parti periferiche del nucleo, disertando le parti centrali. Si ha cioè un *effetto pellicolare magnetico*, in conseguenza del quale il nucleo si comporta come se fosse ridotto ad una piccola parte anulare esterna, o, ciò che è lo stesso, come se, essendo tutto attivo con un valore uniforme dell'induzione, la permeabilità fosse diminuita.

Tale fenomeno dipende dalla reazione magnetica delle correnti indotte (correnti di Foucault) nella massa del nucleo, la quale si manifesta come un effetto di schermo, opponendosi per così dire alla penetrazione delle linee magnetiche nel nucleo stesso. L'entità quantitativa di tale fenomeno può essere studiata, in regime alternativo di una data pulsazione ω, con procedimento del tutto analogo a quello di cui nel n. 3 ci siamo serviti per lo studio della distribuzione della densità di corrente.

All'uopo, si consideri un tronco cilindrico a sezione circolare di raggio r_1 e di lunghezza unitaria costituito di materiale avente permeabilità μ, e si supponga che ai suoi capi sia applicata una certa tensione magnetica $\mathbf{F}$ (il nucleo sia cioè concatenato con $\mathbf{F}$ amperespire). Se $\mathbf{\Phi}$ è il flusso magnetico convogliato dalla porzione del conduttore interna al cerchio di raggio r generico, sarà $-j\omega\mathbf{\Phi}$ la f. e. m. indotta nell'anello elementare compreso fra i raggi r ed $r + dr$. Questo anello costituisce un circuito elettrico di lunghezza $2\pi r$, di sezione $1 \cdot dr$ e quindi di resistenza $\frac{2\pi\varrho}{dr}$ se ϱ è la resistività. Indicando con $\mathbf{u}$ la densità superficiale della corrente in esso (diretta in ogni punto tangenzialmente alla circonferenza di raggio r), sarà $\mathbf{u} \cdot 1 \cdot dr$ l'intensità della corrente e pertanto si avrà:

$$-j\omega\mathbf{\Phi} = 2\pi\varrho r\mathbf{u} .$$

Quanto a $\mathbf{\Phi}$, esso sarà misurato dall'integrale $\mu\int_0^r \mathbf{H}2\pi r dr$, dove $\mathbf{H}$ indica l'intensità del campo magnetico alla distanza r dal centro della sezione.

Dalla precedente, dopo avere sostituito a $\mathbf{\Phi}$ tale suo valore ed avere derivato i due membri rispetto ad r, si ricava:

$$-j\omega\mu\mathbf{H}r = \varrho\,\frac{d(r\mathbf{u})}{dr} ,$$

cioè:

$$-j\frac{\omega\mu}{\varrho}\mathbf{H} = \frac{d\mathbf{u}}{dr} + \frac{\mathbf{u}}{r}.$$

D'altra parte, la corona cilindrica compresa fra i raggi r ed $r + dr$ costituisce un tronco di tubo del vettore **H**, di lunghezza unitaria, col quale è concatenata, oltre la f. m. m. **F**, anche tutta la corrente fluente nella parte di nucleo compresa fra i raggi r ed r_1, quindi si ha:

$$\mathbf{H}\cdot 1 = \int_r^{r_1} \mathbf{u}dr + \mathbf{F}, \tag{12}$$

da cui $\frac{d\mathbf{H}}{dr} = -\mathbf{u}$. Sostituendo questo valore di $\mathbf{u}$ nella precedente e introducendo la penetrazione a definita dalla (6), si ottiene, posto al solito $x = (1-j)\frac{r}{a}$:

$$\frac{d^2\mathbf{H}}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d\mathbf{H}}{dx} + \mathbf{H} = 0.$$

Ragionando come al n. 4, si conclude che, per x sufficientemente grande, si può ritenere la funzione $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ rappresentata dalla espressione:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 e^{-(1+j)\frac{y}{a}}$$

dove $\mathbf{B}_1$ è il valore di **B** per $r = r_1$, ed $y = r_1 - r$ è la profondità misurata a partire dalla periferia.

Così, nel caso di un nastro di spessore abbastanza piccolo in confronto della larghezza, si avrà sensibilmente, alla distanza x dal piano mediano:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 \frac{\mathrm{ch}\left[(1+j)\frac{x}{a}\right]}{\mathrm{ch}\left[(1+j)\frac{s}{a}\right]},$$

e così via.

Anche qui, come nell'analogo caso dell'effetto pellicolare elettrico, si potrà parlare di una *riluttanza apparente*, da definirsi come rapporto fra l'energia localizzata nel nucleo ed il quadrato del valore efficace del flusso totale convogliato dal nucleo stesso, e tale rapporto risulta anche uguale a quello fra la « componente attiva » della f. m. m. « applicata » ed il flusso totale, cioè alla *parte reale* $\mathfrak{R}$ del rapporto complesso $\mathfrak{R} + j\mathfrak{S}$ fra la f. m. m. applicata **F** ed il flusso totale $\mathbf{\Phi}_1$.

Tale rapporto sarà in generale complesso, perchè, a causa delle dissipazioni energetiche dovute alle correnti di Foucault, la f. m. m. non sarà in fase col flusso totale, e pertanto si decomporrà in una parte in fase, o « componente attiva », uguale al prodotto del flusso per la rilut-

tanza propriamente detta, ed il cui prodotto per la f. e. m. **E** generata dalle variazioni del flusso misura la potenza reattiva corrispondente al mantenimento del campo magnetico alternativo, ed una in quadratura, il cui prodotto per la f. e. m. **E** corrisponde alla potenza attiva dissipata nel nucleo per effetto delle correnti di Foucault [1].

Avendo presente la (12), dalla quale, specificando per $r = r_1$, si ha $\mathbf{F} = \mathbf{H}_1 = \frac{\mathbf{B}_1}{\mu}$, si perviene alla relazione:

$$\mathfrak{R} + j\mathfrak{S} = \frac{\mathbf{B}_1}{\mu \mathbf{\Phi}_1}.$$

È interessante notare la perfetta analogia con la (10) (alla densità di corrente, al flusso, alla permeabilità corrispondono ordinatamente la densità, il flusso, la conducibilità). Anzi l'identità formale di questa con la (10) consente di asserire senz'altro che i valori già segnalati per il rapporto $R : R_c$ nei vari casi considerati ai nn. 4, 5, 6, valgono per il rapporto fra la riluttanza apparente $\mathfrak{R}$ in regime alternativo e la riluttanza $\mathfrak{R}_c$ « in regime costante » (flussi eccitati da correnti continue). In particolare, per un nucleo nastriforme, caso particolarmente importante in pratica (lamiere), si avrà:

$$\frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}_c} = \frac{s}{a} \frac{\operatorname{sh}\frac{2s}{a} + \operatorname{sen}\frac{2s}{a}}{\operatorname{ch}\frac{2s}{a} - \cos\frac{2s}{a}},$$

che, per $\frac{s}{a}$ abbastanza grande, si confonde sensibilmente con

$$\mathfrak{R} : \mathfrak{R}_c = s : a .$$

Il nucleo nastriforme si comporta dunque come se l'induzione fosse costante, ma la sezione utile si fosse ridotta a due strati superficiali ciascuno di spessore a, oppure anche — il che fa lo stesso — tutto lo spessore fosse sede di flusso con distribuzione uniforme, ma la permeabilità fosse ridotta da μ a $\mu \frac{a}{s}$.

Se invece, come si pratica da taluni Autori, si vuol chiamare riluttanza apparente il rapporto fra i valori massimi (o gli efficaci) della f. m. m. e del flusso totale, senza cioè tener conto dello sfasamento esistente fra le due grandezze, sarà da prendersi in considerazione il modulo (anzichè la parte reale) del rapporto fra i complessi **F** e $\mathbf{\Phi}_1$, cioè $\sqrt{\mathfrak{R}^2 + \mathfrak{S}^2}$.

---

[1] A proposito di riluttanza complessa, come indice della presenza di dissipazioni, veggasi El., VIII, 29.

In particolare, nel caso del nucleo nastriforme, tenendo presente che è

$$\Phi_1 = \int_{-s}^{s} \mathbf{B} dx = \frac{2a\mathbf{B}_1}{1+j} \operatorname{th}(1+j)\frac{x}{a},$$

si avrà:

$$\frac{\mathbf{F}}{\Phi_1} = \frac{\mathbf{B}_1}{\mu\Phi_1} = \frac{1+j}{2a\mu} \operatorname{cth}\left[(1+j)\frac{s}{a}\right],$$

il cui modulo (App., A, 3) vale

$$\sqrt{\mathfrak{R}^2 + \mathfrak{S}^2} = \frac{1}{\sqrt{2}a\mu} \sqrt{\frac{\operatorname{ch}\frac{2s}{a} + \cos\frac{2s}{a}}{\operatorname{ch}\frac{2s}{a} - \cos\frac{2s}{a}}}.$$

Secondo tale concetto, la permeabilità apparente μ' verrebbe misurata da

$$\mu' = \mu \frac{a}{s\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\operatorname{ch}\frac{2s}{a} - \cos\frac{2s}{a}}{\operatorname{ch}\frac{2s}{a} + \cos\frac{2s}{a}}},$$

che, per $s \gg a$, è sensibilmente uguale a $\mu \dfrac{a}{s\sqrt{2}}$.

12. - Circuito equivalente ad una bobina. - Fattore di potenza. — Una bobina corrisponde in generale ad un circuito comprendente in serie

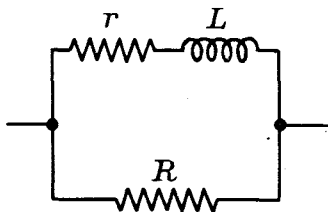
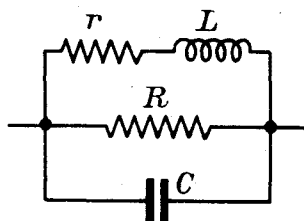



Fig. 33 a)   Fig. 33 b)

una induttanza ed una resistenza, per la quale deve assumersi la sua resistenza apparente, in relazione alle condizioni di servizio cui la bobina stessa è adibita.

È inoltre da osservarsi che le inevitabili imperfezioni dei dielettrici posti fra le spire sono ulteriore causa di dissipazioni che si traducono in variazioni, malamente precisabili, della resistenza apparente stessa.

Più precisamente, una bobina, oltre al presentare una certa resistenza da considerarsi in serie con la sua induttanza, presenta anche una resistenza in derivazione, vale a dire si comporta conformemente allo schema disegnato a fig. 33 a), o meglio secondo quello di fig. 33 b), dove è indi-

cato, in parallelo con l'induttanza L, un condensatore C che tiene conto della capacità distribuita (v. n. seg.) fra le spire e fra queste ed i corpi circostanti.

Ne discende che, operando con corrente di una certa frequenza $\frac{\omega}{2\pi}$, l'impedenza della bobina riesce diversa da quella che si otterrebbe qualora per resistenza si assumesse la sua resistenza ohmica (sia pure modificata per tenere conto dell'effetto pellicolare) e per induttanza la sua induttanza effettiva, quale può calcolarsi secondo le norme che furono indicate nei nn. prec.

Esaminiamo partitamente gli effetti della C e della R poste in derivazione.

Cominceremo dalla prima, avvertendo che il considerare la sola C, anzichè il sistema (C, R), equivale a ritenere trascurabile l'influenza del ramo R. In tali condizioni, e limitandoci al caso — il più importante per le applicazioni — in cui la r è piccola in confronto alla reattanza $L\omega$ della bobina, si ha che la presenza di C determina una apparente modificazione di L; cioè che la bobina presenta una *induttanza apparente* $L_a \neq L$.

Il valore di tale L_a si lascia facilmente esprimere in funzione di L e di C. Basta uguagliare ad $\frac{1}{L_a\omega}$ la suscettanza effettiva del sistema, cioè scrivere (trascurando r):

$$\frac{1}{L_a\omega} = \frac{1}{L\omega} - C\omega ,$$

per ricavare:

$$L_a = \frac{L}{1 - LC\omega^2} .$$

Questa espressione mette in evidenza l'esistenza di una pulsazione per la quale il valore di L_a diviene infinitamente grande (praticamente: grandissimo); essa è quella per la quale è verificata la relazione:

$$LC\omega^2 = 1 ,$$

e si chiama la *pulsazione fondamentale* della bobina, come la corrispondente lunghezza d'onda (1) si chiama *lunghezza d'onda fondamentale*.

---

(1) Per lunghezza d'onda corrispondente ad una data pulsazione ω si intende lo spazio che può venir percorso, durante un periodo, cioè nel tempo $\frac{2\pi}{\omega}$, da un mobile animato dalla velocità di propagazione dei fatti elettromagnetici. Tale velocità, nello spazio vuoto, è misurata da $3 \cdot 10^8$ m/sec, quindi la relazione fra la frequenza f (kHz) e la corrispondente lunghezza d'onda λ (metri) risulta:

$$f\lambda = 300000 .$$

La lunghezza d'onda corrispondente ad una pulsazione $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, cioè ad una

Per es. per una bobina avente $L=150\ \mu H$ e per la quale sia $C=10\ \mu\mu F$, la lunghezza d'onda fondamentale λ sarebbe di:

$$1885\sqrt{150\cdot 10^{-5}} \cong 73 \text{ m}\,.$$

In generale, le bobine vengono usate per frequenze discretamente lontane — e precisamente minori — dalla fondamentale. In tali condizioni, il prodotto $LC\omega^2$ risulta molto piccolo in confronto dell'unità, ed allora all'espressione precedente di L_a può darsi la forma:

$$L_a \cong L(1 + LC\omega^2)\ (^1)\,,$$

equivalente alla

$$L_a \cong L\left(1 + 3{,}553\,\frac{LC}{\lambda^2}\right)\,,$$

dove C è espressa in $\mu\mu F$, L in μH, λ in metri.

Se alla induttanza effettiva si sostituisce la apparente, ciò equivale all'aver tenuto conto di C, e pertanto lo schema *b*) diviene esattamente sostituibile con lo schema *a*), mediante il quale possiamo agevolmente valutare il « fattore di potenza » della bobina, cioè il coseno dell'angolo di sfasamento tra la corrente totale assorbita e la tensione applicata.

Tale fattore $\cos\varphi$, variabile ovviamente con la frequenza, si calcola, come è noto, facendo il rapporto della conduttanza alla ammettenza. Questo calcolo può però semplificarsi, considerando che, in generale, alle frequenze che si considerano in r. t., l'angolo φ è molto prossimo a 90°, e pertanto si può senza errore sensibile sostituire al $\cos\varphi$ la $\operatorname{cotg}\varphi$ (2), il che equivale a ritenere il fattore di potenza misurato dal rapporto fra

---

frequenza $\frac{10^{-3}}{2\pi\sqrt{LC}}$ kHz, è data in metri da:

$$\lambda = \frac{300000}{f} = 3\cdot 10^8\, 2\pi\sqrt{LC} = 1885\cdot 10^6\sqrt{L_{(H)}\,C_{(F)}}\,,$$

dove L e C debbono esprimersi in henry e farad rispettivamente. Esprimendoli invece in μH e μF, si ha:

$$\lambda = 1885\sqrt{L_{\mu H}\,C_{\mu F}}\,.$$

(1) In generale, se ε è piccolo in confronto all'unità, si ha sensibilmente $1+\varepsilon \cong \frac{1}{1-\varepsilon}$.

(2) Infatti si ha:

$$\operatorname{cotg}\varphi = \frac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi} = \cos\varphi\,(1-\cos^2\varphi)^{-1/2} = \cos\varphi\left(1+\frac{1}{2}\cos^2\varphi - \frac{3}{8}\cos^4\varphi + \ldots\right),$$

e quindi, quando $\cos^2\varphi$ si possa trascurare in confronto dell'unità:

$$\cos\varphi \cong \operatorname{cotg}\varphi\,.$$

la conduttanza e la suscettanza; cosicchè, essendo la prima

$$=\frac{r}{r^2+L^2\omega^2}+\frac{1}{R}\cong\frac{r}{L^2\omega^2}+\frac{1}{R},$$

e la seconda:

$$=\frac{L\omega}{r^2+L^2\omega^2}\cong\frac{1}{L\omega},$$

si ha:

$$\cos\varphi\cong\frac{r}{L\omega}+\frac{L\omega}{R}.$$

Da questa formola si conclude che, mentre alle basse frequenze il fattore di potenza (e conseguentemente la dissipazione d'energia) è influenzato essenzialmente da r e pochissimo da R, l'opposto avviene per frequenze elevate.

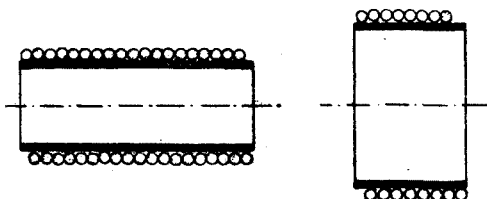



Fig. 34 *a*) Fig. 34 *b*)

13. - Capacità parassite delle bobine. — Conviene rendersi conto delle cause influenti sulla capacità C di cui si è fatto cenno nel n. prec.

Per una bobina ad un solo strato, avremo linee di campo elettrico fra ogni coppia di conduttori a diversa tensione e le intensità di tali campi saranno tanto maggiori quanto maggiori saranno queste tensioni e minori le distanze.

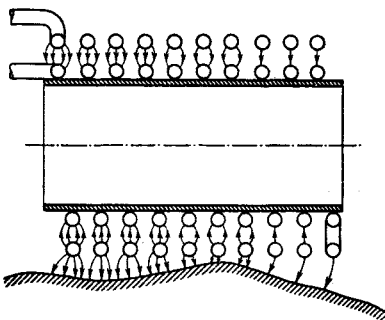
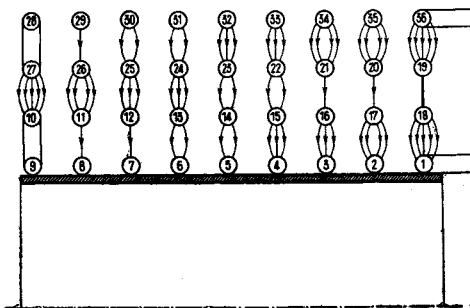



Fig. 35 Fig. 36

Così ad es., l'effetto capacitivo della bobina *a*) di fig. 34 sarà molto minore di quello della bobina *b*).

Per una bobina a due strati (fig. 35), se supponiamo che la con-

nessione elettrica fra gli stessi sia fatta dal lato destro, è chiaro che fra le coppie di conduttori che vengono a trovarsi attigui si avranno d. d. p. tanto più importanti quanto più la coppia si trova vicina all'estremità sinistra, ed in relazione ad esse la distribuzione del campo elettrico assumerà un aspetto analogo a quello indicato in figura. Se gli strati sono più

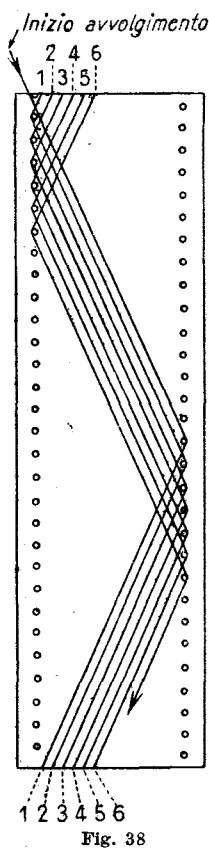
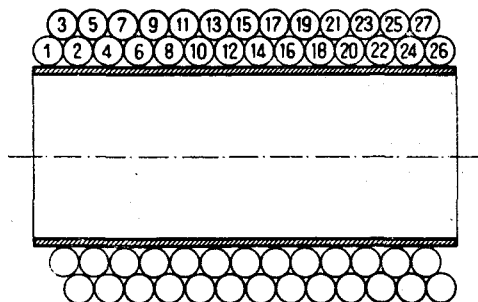



Fig. 37

di due e le connessioni sono alternativamente a destra e a sinistra, la disposizione stessa assume l'aspetto della fig. 36.

Alle capacità così considerate sono da aggiungersi quelle fra i conduttori ed i corpi circostanti, come schematicamente indicato in fig. 35.

In molte applicazioni conviene ridurre quanto più è possibile gli effetti delle predette capacità, e lo scopo può raggiungersi con disposizioni atte ad evitare che conduttori a tensioni molto diverse si trovino vicini. Per es., per le bobine a più strati, sarà da preferirsi un avvolgimento eseguito come indicato in fig. 37, oppure disposizioni come quelle così dette a *fondo di paniere*, *nido d'ape*, ecc.; quest'ultima ad es. essendo costituita avvolgendo un filo a zig-zag su un cilindro, come schematicamente è indicato nella fig. 38, che rappresenta lo sviluppo in un piano del cilindro stesso.

Inizio avvolgimento
2 4 6
1 3 5

1 2 3 4 5 6

Fig. 38

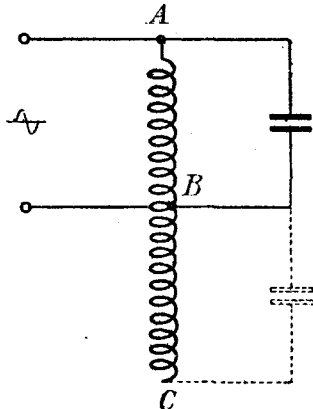



Fig. 39

Nelle applicazioni radiotecniche, ove sono spesso in giuoco frequênze dell'ordine di quelle per le quali, a causa delle capacità parassite, le induttanze apparenti divengono infinitamente grandi, occorre cercare di evitare l'uso di bobine *appese*, cioè connesse al rimanente del circuito per una sola loro parte AB (fig. 39). Invero, se si pensa che la parte BC non utilizzata, anzichè essere un circuito aperto, è sostanzialmente chiusa

sulla corrispondente capacità parassita (tratteggiata in figura), si comprende che tale parte BC costituisce un circuito che per una certa frequenza può presentare reattanza nulla; e siccome in esso, per effetto della mutua induzione rispetto ad AB, vengono ad agire delle f. e. m., queste potrebbero trovarsi ad operare su impedenza piccolissima, talchè nel corrispondente circuito si verrebbe ad avere una corrente elevata e quindi una sensibile dissipazione di potenza, cui debbono sopperire i generatori che alimentano AB.

14. - Circuito equivalente ad un condensatore reale. - Angolo di perdita. — Un terzo elemento, non meno importante delle induttanze, per la costituzione dei circuiti r. t., è costituito dai condensatori, organi nei quali si può immagazzinare energia elettrostatica.

Anche per essi, come per le induttanze, si fa luogo a considerare una resistenza in serie e una in derivazione, in conseguenza delle quali la corrente assorbita, in regime alternativo, non è esattamente in quadratura con la tensione applicata; cioè essi presentano un fattore di potenza $\cos \varphi$ diverso da zero, o, come si dice, un certo *angolo di perdita.* Invero, si chiama angolo «di perdita» il complemento dell'angolo φ, in quanto che l'essere diverso da 90° l'angolo di fase fra la tensione applicata e la corrente assorbita è ovviamente indice di dissipazione energetica.

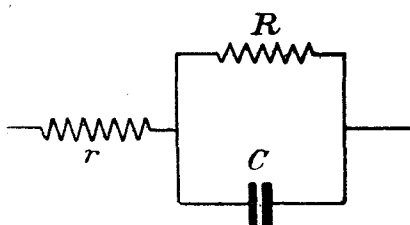



Fig. 40

Lo schema equivalente ad un condensatore reale può ritenersi quello della fig. 40 dove la r in serie simboleggia la resistenza dei conduttori metallici costituenti le armature, ivi compresa quella dovuta alla imperfezione dei contatti, mentre la resistenza R disposta in parallelo col condensatore corrisponde sia al fatto che il dielettrico interposto fra le armature non è mai perfetto, e quindi consente il passaggio di correnti di conduzione — dette *correnti di dispersione* —, sia al fatto che la polarizzazione del dielettrico, in presenza di eccitazione alternativa, segue sempre con un certo ritardo la tensione eccitatrice, per un fenomeno di *isteresi dielettrica,* analogo all'isteresi magnetica, e che al pari di questa produce riscaldamento del dielettrico stesso, e conseguente dissipazione di potenza cui la tensione applicata provvede a mezzo di una componente della corrente in fase con essa.

Con un calcolo del tutto analogo a quello dianzi eseguito per le bobine, si trova che, con approssimazioni analoghe, il fattore di potenza di un condensatore reale è dato da:

$$\cos \varphi \cong \operatorname{cotg} \varphi \cong rC\omega + \frac{1}{RC\omega}\,.$$

Invero si ha, per l'impedenza equivalente al sistema disegnato:

$$\mathbf{Z} = r + \frac{\frac{R}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} = r + \frac{R}{1 + jRC\omega} = r + \frac{R - jR^2C\omega}{1 + R^2C^2\omega^2},$$

ovvero, potendosi in generale trascurare l'unità in confronto del numero $R^2C^2\omega^2$:

$$\mathbf{Z} \cong r + \frac{1}{RC^2\omega^2} - \frac{j}{C\omega},$$

quindi:

$$\operatorname{ctg}\varphi \cong C\omega\left(r + \frac{1}{RC^2\omega^2}\right) = rC\omega + \frac{1}{RC\omega}.$$

Come si vede, in questo caso è la resistenza in serie r quella che ha importanza preponderante alle elevate frequenze, mentre alle basse frequenze prevale l'effetto della resistenza in derivazione R.

15. - Condensatori a capacità variabile. — Nelle applicazioni r. t. accade assai spesso di dovere disporre di condensatori la cui capacità possa variare entro limiti relativamente larghi. Essi vengono costruiti con una delle armature mobile rispetto all'altra, in guisa da far variare l'area delle superficie affacciate. In pratica non si tratta di due sole armature, ma di due serie di armature, connesse secondo lo schema della fig. 41, in guisa da formare un sistema di $n-1$ condensatori in paral-

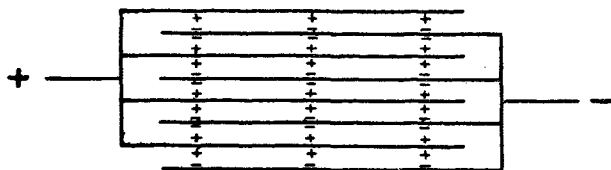



Fig. 41

lelo, se n è il numero totale delle armature (fisse e mobili), il dielettrico essendo ovviamente l'aria.

Se S è l'area, espressa in cm², delle superficie affacciate, e si pone:

$$k = \frac{8{,}86 \cdot 10^{-8}}{d},$$

essendo d (cm) la distanza fra due armature vicine, la capacità del complesso è misurata in μF da (El., III, 5):

$$C = (n-1)kS.$$

La variabilità di S è in generale ottenuta facendo uno dei sistemi di armature girevole attorno ad un asse, e foggiando il profilo delle armature stesse in guisa che la capacità risulti una predeterminata funzione dell'angolo α che definisce la posizione del sistema mobile rispetto al fisso, diciamo in generale $C = f(\alpha)$.

Se ϱ è il raggio vettore (funzione opportuna di α) del profilo corrispondente si avrà:

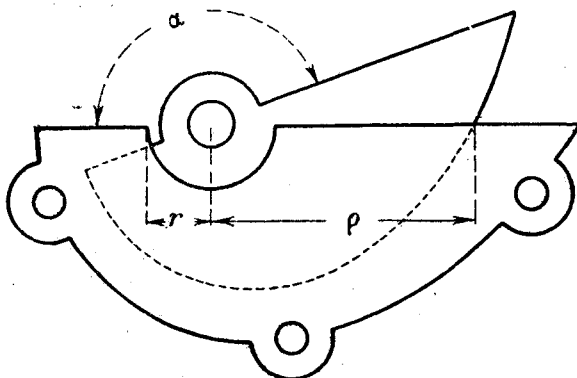



Fig. 42

$$S = \frac{1}{2}\int_0^\alpha (\varrho^2 - r^2)d\alpha\,,$$

avendo r il significato indicato in fig. 42, e pertanto si avrà:

$$\frac{dC}{d\alpha} = \frac{(n-1)k}{2}(\varrho^2 - r^2)\,.$$

Il primo membro essendo una funzione nota di α (precisamente $= f'(\alpha)$), questa relazione è atta a definire ϱ in funzione di α, cioè la equazione in coordinate polari (ϱ, α) del profilo cercato.

Per es., se si vuole che la variazione di C sia proporzionale a quella dell'angolo α, sarà da porre $f(\alpha) = A\alpha + B$, quindi $f'(\alpha) = \text{cost.}$, da cui segue subito che anche ϱ deve essere costante. Si perviene cioè ad un profilo circolare, come era a priori evidente.

Così si può chiedere che al variare di α vari linearmente la frequenza, oppure invece la lunghezza d'onda (sottinteso: di risonanza del sistema costituito dalla capacità C e da una induttanza fissa); allora sarà da porre rispettivamente:

$$\frac{1}{\sqrt{C}} = A\alpha + B\,,$$

oppure:

$$\sqrt{C} = A'\alpha + B'\,,$$

essendo A, B, A', B' delle costanti. Con semplice calcolo si verifica che nel primo caso si otterrà pel profilo una equazione del tipo:

$$\varrho = \sqrt{\frac{M}{(H\alpha + K)^3} + N}\,,$$

nel secondo, una del tipo:

$$\varrho = \sqrt{H'\alpha + K'}\;;$$

e la determinazione delle costanti M, N, H, K, H', K' si farà in base al valore della così detta capacità *residua* (valore della capacità per $\alpha = 0$) e della capacità corrispondente al valore massimo meccanicamente consentito all'angolo α. Determinate tali costanti, le formole precedenti possono senz'altro utilizzarsi per effettuare il tracciamento effettivo del profilo per punti.

Un altro tipo di variazione richiesto in certi casi è quello così detto *logaritmico*, definito dalla legge:

$$f(\alpha) = C_0 e^{\alpha} ,$$

cui corrisponde per ϱ un'espressione del tipo:

$$\varrho = \sqrt{He^{\alpha} + K} \qquad (H,\ K \text{ cost.}).$$

Esso è caratterizzato dal fatto che risulta indipendente da α il rapporto $\frac{dC}{C}$, cioè si ha che ad un *medesimo* spostamento angolare (piccolissimo) dell'armatura mobile corrisponde, per qualunque valore di α, una medesima *variazione relativa* della capacità. Infatti da $C = C_0 e^{\alpha}$ segue:

$$dC = C_0 e^{\alpha} d\alpha = C d\alpha ,$$

quindi $\frac{dC}{C} = d\alpha$, cioè costante, se tale è $d\alpha$.

A titolo di esempio, proponiamoci di costruire un condensatore a capacità variabile, del tipo a variazione lineare di frequenza, atto ad annullare la reattanza del sistema costituito da esso e da una induttanza di 20 μH, per le frequenze comprese fra 3000 kHz e 1500 kHz,

Esprimendo C in μF, le frequenze f in kHz, e l'induttanza L in μH, si avrà:

$$C = \frac{10^6}{4\pi^2 L f^2}$$

con $f = A\alpha + B$, quindi:

$$\frac{dC}{d\alpha} = - \frac{2 \cdot 10^6 A}{4\pi^2 L (A\alpha + B)^3} ,$$

e poi:

$$\varrho = \sqrt{- \frac{10^6 A}{\pi^2 L (n-1) k (A\alpha + B)^3} + r^2} \quad \text{con} \quad k = \frac{8{,}86 \cdot 10^{-8}}{d} .$$

Tenendo conto delle condizioni

$$f = 3000 \quad \text{per} \quad \alpha = 0 , \quad f = 1500 \quad \text{per} \quad \alpha = \pi ,$$

si ha subito:

$$A = \frac{1500 - 3000}{\pi} = - \frac{1500}{\pi} , \quad B = 3000 ,$$

dopo di che, supponendo $r = 1$ cm, $d = 0{,}075$ cm, $n = 19$, si ha l'espressione esplicita di ϱ:

$$\varrho = \sqrt{\frac{114{,}1}{\left(3 - 1{,}5\,\frac{\alpha}{\pi}\right)^3} + 1}\,,$$

dove α è espresso in radianti; oppure, introducendo la corrispondente misura α^0 in gradi $\left(\alpha^0 = \frac{180}{\pi}\,\alpha\right)$:

$$\varrho = \sqrt{\frac{114{,}1}{\left(3 - \frac{\alpha^0}{120}\right)^3} + 1}\,.$$

Facendo successivamente:

$$\alpha^0 = 0^0,\ 18^0,\ 36^0,\ 54^0,\ 72^0,\ 90^0,\ 108^0,\ 126^0,\ 144^0,\ 162^0,\ 180^0,$$

si ottengono i valori:

$$\varrho = 2{,}29;\ 2{,}44;\ 2{,}61;\ 2{,}81;\ 3{,}05;\ 3{,}32;\ 3{,}65;\ 4{,}05;\ 4{,}53;\ 5{,}14;\ 5{,}90 \text{ cm},$$

coi quali è stato tracciato il profilo disegnato in grandezza naturale in fig. 43.

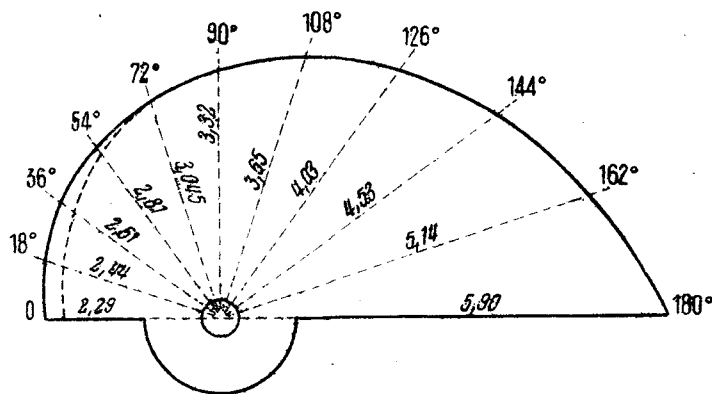



Fig. 43

In pratica, per tener conto delle inevitabili capacità parassite, occorre diminuire i valori di ϱ corrispondenti ai più piccoli valori di α, per modo che il profilo si modifica secondo una curva del tipo di quella disegnata a tratti.

16. - Condensatori fissi. - Condensatori elettrolitici. — Per la costruzione di condensatori di capacità fissa, si usano generalmente dielettrici

solidi onde potere, anche se la costante dielettrica non è molto elevata, realizzare piccoli spessori e conseguentemente piccolo volume per un dato valore della capacità.

Per basse tensioni, lo scopo si raggiunge bene usando per dielettrico un sottilissimo foglio di carta impregnata di paraffina, sulle due facce del quale sono fissati due fogli di stagnola. Un tale complesso viene poi arrotolato, ed opportuni accorgimenti consentono di ridurre al minimo le dissipazioni nonchè l'effetto di induttanza, che le armature necessariamente presentano, e del quale occorre preoccuparsi quando il condensatore è destinato a funzionare con tensioni variabili ad elevata frequenza. Oltre la carta, si usano anche altri dielettrici, come la mica, l'ebanite, il vetro, la bakelite, ecc.

Quando la tensione di servizio è elevata, bisogna ricorrere a disposizione in serie di un numero adeguato di elementi, o — il che equivale — a relativamente notevoli spessori di dielettrico. In ogni caso la capacità, a parità di superficie delle armature, diminuisce. Ma, per lo più, con l'aumentare della tensione decresce il valore richiesto per la capacità, in quanto che, a parità di tipo di servizio e di frequenza, si richiede in generale una ben determinata *potenza reattiva*, cioè un determinato valore del prodotto $C\omega V^2$, dove C è la capacità, V la tensione. Così, operando con $\omega = 5000$, se si dispone di elementi da 2 mμF adatti per 500 volt, cioè capaci di una potenza reattiva di $2 \cdot 10^{-9} \cdot 5000 \cdot 500^2 = 2{,}5$ VA, e si vuole costituire un sistema capace di 2500 VA, occorreranno sempre 1000 di tali elementi, indipendentemente — ben inteso, entro certi limiti — dalla tensione. Invero, se tale potenza è richiesta a 500 V, la capacità occorrente sarebbe di 2μF, al che si perviene disponendo i 1000 elementi in parallelo. Se invece si dovesse operare a 5000 V, la capacità si riduce a 20 mμF, ma occorre raggruppare i dati elementi a 10 a 10 in serie, al fine di realizzare gruppi capaci di resistere a 5000 volt. Così facendo, la capacità di ogni gruppo si riduce a 0,2 mμF; e pertanto bisognerà disporre di $20 : 0{,}2 = 100$ di tali gruppi, e in complesso quindi di $100 \cdot 10 = 1000$ elementi, come dianzi.

In molte applicazioni radiotecniche si presenta la necessità di disporre di elevati valori di capacità in condensatori destinati ad essere sottoposti a tensioni relativamente modeste, ed in tali casi possono utilmente servire i così detti condensatori *elettrolitici*. Questi vengono costituiti immergendo una coppia di lastre d'alluminio in una opportuna soluzione salina (per lo più borato ammonico). Quando ad un tale sistema venga applicata una tensione continua, sulla lamina positiva si forma una sottilissima pellicola d'ossido che isola la lamina stessa dalla soluzione; la corrente praticamente s'annulla ed il sistema può funzionare come un vero e proprio condensatore.

Con tensioni dell'ordine di $20 \div 30$ volt si possono ottenere spessori

di 10^{-6} cm ($= 10^{-2}$ micron); spessori maggiori (ma tuttavia dell'ordine di 10^{-4} cm = un micron) si hanno se la tensione di formazione è spinta fino a circa 300 ÷ 400 volt. L'apparecchio deve poi essere usato con tensioni non molto maggiori di quelle che hanno servito alla sua formazione. Come facilmente si comprende, la estrema piccolezza dello spessore del dielettrico fa sì che possano raggiungersi valori assai elevati di capacità pur con modesta superficie d'armature. Invero, anche ritenendo la costante dielettrica della pellicola uguale a quella dell'aria, la superficie occorrente per la capacità di un μF, supposto lo spessore di 10^{-6} cm, sarebbe di soli:

$$\frac{10^8}{8,86} \cdot 10^{-6} = 11,3 \text{ cm}^2 .$$

Allo scopo di assicurare la pronta ricostituzione dello strato d'ossido che eventualmente si distruggesse, tali condensatori vengono usati in quei casi in cui la tensione applicata, ancorchè variabile, non muta segno, cioè ha carattere pulsante.

È tuttavia da notare che questi tipi di condensatori, insieme al grandissimo vantaggio della notevole capacità per unità di volume, presentano per contro l'inconveniente di perdite non trascurabili, dovute essenzialmente alla resistenza dell'elettrolito, e ciò limita alquanto il campo delle loro possibili applicazioni.

Oggigiorno si costruiscono anche condensatori elettrolitici detti *a secco*, i quali non differiscono dai precedenti se non in ciò, che la coppia di fogli d'alluminio, uno dei quali reca la pellicola d'ossido, è arrotolata previa introduzione di un sottile velo imbevuto di soluzione elettrolitica, od altri equivalenti dispositivi. Si realizzano così apparecchi assai compatti: per condensatori adatti per 300 volt, si arriva ad occupare soltanto 10 cm³ per ogni μF di capacità.

CAPITOLO TERZO

COMPLEMENTI ALLA TEORIA DEI CIRCUITI ELETTRICI

A) Circuiti semplici a costanti concentrate.

1. - Scarica e carica di un condensatore attraverso una resistenza. — Consideriamo un circuito comprendente un condensatore di capacità C ed una resistenza R, e proponiamoci di studiare quel che in esso avviene dopo che il condensatore sia stato caricato con una d. d. p. V_0.

Il condensatore tende ovviamente a scaricarsi, e pertanto nel circuito prende origine una corrente la cui intensità i andrà in generale variando col tempo t, come pure andrà variando la d. d. p. v ai capi del condensatore, cioè i e v saranno funzioni del tempo t.

Più generalmente, potremo supporre (fig. 44) che nel circuito sia intercalata una sede di f. e. m. E, che potrà essere costante oppure variabile col tempo, ed in tale caso, anche se il condensatore non fosse stato preventivamente caricato, esso tenderà a caricarsi in uno o in altro senso in guisa da seguire le vicende della f. e. m. E.

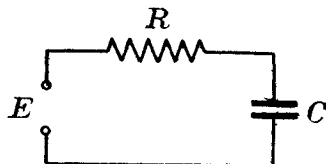



Fig. 44

In ogni caso, per un istante generico qualunque, potremo, in virtù della legge di Ohm, asserire che la tensione v ai capi di C, intesa positiva se l'armatura positiva è quella connessa col morsetto positivo della sorgente E, uguaglia la differenza fra E e la caduta di tensione Ri dovuta alla resistenza, cioè:

$$E = Ri + v \,, \tag{1}$$

da cui, moltiplicando per C, si deduce:

$$CE = CRi + q \,,$$

essendo q la carica esistente nello stesso istante sulle armature del condensatore.

La corrente (intesa positiva se diretta, nel circuito, verso l'armatura positiva del condensatore, cioè in senso cospirante con E) è legata a q dalla relazione:

$$i = \frac{dq}{dt} = C\frac{dv}{dt}. \tag{2}$$

Supponiamo dapprima che, come sopra, sia $E = 0$, cioè non esista f. e. m. applicata; ossia studiamo la *scarica*, attraverso la resistenza R, del condensatore, che supporremo sia stato con opportuni mezzi caricato ad una d. d. p. V_0 per modo che al tempo $t = 0$ sia $v = V_0$.

In tale ipotesi, sostituendo (2) in (1), questa diviene:

$$v + RC\frac{dv}{dt} = 0, \tag{3}$$

da cui (App., A, 9) si ricava:

$$v = Ae^{-\frac{t}{RC}},$$

essendo A una costante, il cui valore si precisa subito essere V_0, pensando che per $t = 0$ è $v = V_0$.

All'espressione precedente daremo dunque la forma:

$$v = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}},$$

dove $\tau = RC$ è una grandezza che risulta espressa in secondi se R e C sono espresse in ohm e farad rispettivamente ([1]).

Essa si chiama la *costante di tempo* del circuito.

Per trovarne il significato, osserviamo che se si attribuiscono al tempo valori in progressione aritmetica di ragione h, i corrispondenti valori di v:

$$V_0, \quad \frac{V_0}{e^{\frac{h}{\tau}}}, \quad \frac{V_0}{e^{2\frac{h}{\tau}}}, \; \ldots.$$

costituiscono una progressione geometrica di ragione $e^{-\frac{h}{\tau}}$. In particolare, per $h = \tau$, i termini della corrispondente progressione geometrica valgono $\frac{V_0}{e}, \frac{V_0}{e^2} \ldots$, quindi si può dire che la costante di tempo misura il tempo occorrente affinchè la tensione ai capi del condensatore si riduca nel rapporto $\frac{1}{e} = \frac{1}{2{,}7182\ldots}$.

Per es., per $R = 1\text{M}\Omega = 10^6\Omega$, $C = 10^{-5}\text{F}$, si avrebbe $\tau = 10$ sec. In tali condizioni, ove si disponga di appropriati mezzi per constatare i

---

([1]) Si ricordi infatti che farad $= \frac{\text{amp-sec}}{\text{volt}} = \frac{\text{sec}}{\text{ohm}}$.

successivi valori della tensione, sarebbe assai agevole seguirne le variazioni nel tempo.

La curva che rappresenta tale variazione ha l'aspetto indicato nella fig. 45; le ordinate tendono rapidamente a zero, senza mai raggiungere

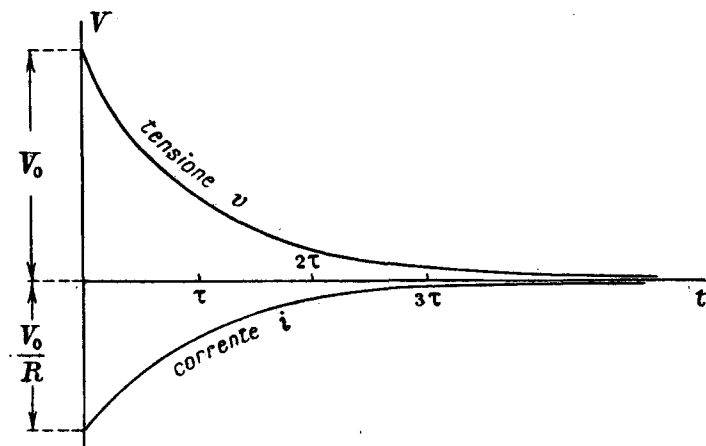



Fig. 45

tale valore. Ciò significa che la scarica completa non può aversi che in un tempo infinito. Tuttavia, in generale, in capo ad un tempo non molto lungo, la tensione residua raggiunge valori trascurabili.

Ad es., per calcolare il tempo occorrente affinchè la tensione si riduca ad $\frac{1}{n}$ del suo valore iniziale, basta risolvere l'equazione:

$$e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{1}{n} = n^{-1},$$

da cui, prendendo i Log (in base 10) dei due membri:

$$t = \tau \frac{\operatorname{Log} n}{\operatorname{Log} e} = 2{,}30\, \tau \operatorname{Log} n\,.$$

Così, nel caso precedente, posto $n = 1000$, si avrebbe $t = 2{,}30 \cdot 10 \cdot 3 = 69$ sec.

L'andamento della carica alle armature del condensatore è ovviamente identico a quello della tensione, in quanto che quella è proporzionale a questa; si ha quindi:

$$q = Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}},$$

dove $Q_0 = CV_0$ è la carica iniziale.

Per la corrente i, occorre, secondo la (2), calcolare $\frac{dq}{dt}$. Si trova così:

$$i = -\frac{Q_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = -\frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} . \tag{4}$$

La corrente è dunque sempre negativa (cioè *contraria* a quella che sarebbe stata capace di caricare il condensatore nel supposto senso positivo) e decrescente in valore assoluto, secondo la solita legge, a partire dal suo valore iniziale $\frac{Q_0}{\tau} = \frac{V_0}{R}$, come indicato nella fig. 45.

Se nel circuito è invece inserita una sede di f. e. m. *costante* E, l'equazione che governa il fenomeno è la:

$$E = v + RC\frac{dv}{dt} . \tag{5}$$

Una soluzione particolare di questa equazione è $v = E$, dunque (App., A, 9) la soluzione più generale si avrà aggiungendo a tale soluzione la più generale soluzione della (3), cioè una espressione del tipo $Ae^{-\frac{t}{RC}}$. Siccome poi per $t = 0$ deve aversi $v = 0$ (condensatore inizialmente scarico), si conclude subito che deve essere $A = -E$; quindi la funzione cercata, che rappresenta l'andamento della tensione ai capi del condensatore, è la:

$$v = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) .$$

Il corrispondente diagramma si costruisce agevolmente sottraendo dalla retta $v = E$ le ordinate della curva precedente. Si ricavano conclusioni

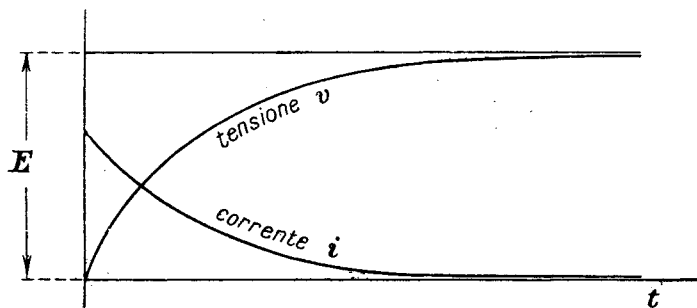



Fig. 46

identiche alle precedenti riguardo alle differenze fra la tensione effettiva e la finale (che viene raggiunta solo per $t = \infty$ [1]). Per la corrente si deducono gli stessi valori di dianzi, ma mutati di segno (fig. 46).

---

[1] Qui, e analogamente nel seguito, una scrittura come $t = \infty$ non significa che a t si attribuisce il valore infinito (il che non avrebbe matematicamente alcun senso), ma che si considera il limite per t tendente all'infinito.

Sono questi i fenomeni che si verificano nel periodo che precede la carica di un condensatore a f. e. m. costante.

Se poi E è variabile col tempo, per esempio con legge sinusoidale ($E = E_m$ sen ωt), l'andamento della v si ottiene sommando i valori pertinenti alle variazioni di tipo esponenziale or ora studiate con quelli pertinenti allo stato di regime, quello cioè che si avrebbe trascurando quelle variazioni [1]. Quest'ultimo, come è noto dall'Elettrotecnica, corrisponde ad una legge alternativa rappresentabile col numero complesso $-\frac{j\mathbf{E}_m}{C\omega\mathbf{Z}}$ $\left(\text{dove } \mathbf{Z} = R - \frac{j}{C\omega}\right)$; si tratta cioè di valori variabili sinusoidalmente colla stessa pulsazione ω di E, con un ritardo, rispetto ad E, di $90° - \text{arctg}\,\frac{1}{C\omega R}$. L'andamento di una tale v è mostrato nella fig. 47, dove

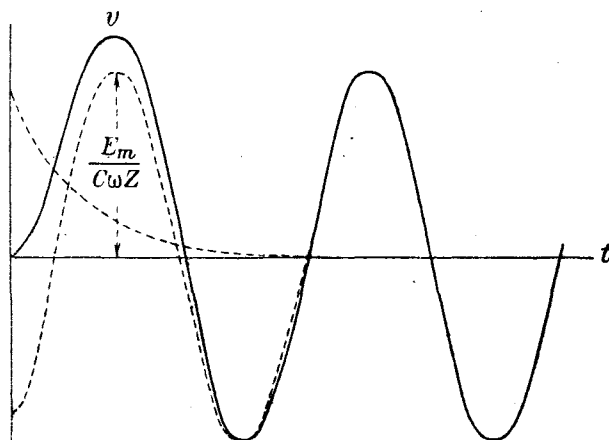



Fig. 47

con linee a tratti sono rappresentate la sinusoide e la curva esponenziale, mentre la linea a tratto pieno rappresenta la variazione della tensione v.

Dal punto di vista energetico, i fenomeni di cui il circuito è sede nel primo dei casi considerati si possono sintetizzare dicendo che l'energia conferita al condensatore con la carica iniziale va gradatamente dissipandosi attraverso la resistenza e trasformandosi in calore per effetto Joule. Si può pertanto asserire che è $\frac{1}{2}\, CV_0^2 = R\int i^2 dt$, essendo l'integrale esteso da $t = 0$ a $t = \infty$ [2].

---

[1] Ciò equivale ad aggiungere all'integrale generale della (3) un integrale particolare della (5).

[2] Ciò può del resto agevolmente verificarsi eseguendo effettivamente l'integrazione dopo avere introdotto al posto di i il suo valore dato dalla (4).

2. - Fenomeni transitori all'apertura e chiusura di un circuito con induttanza e resistenza. — In modo perfettamente analogo si può procedere allo studio del comportamento di un sistema comprendente una induttanza L in serie con una resistenza R, quando si supponga che esso venga chiuso su se stesso in un istante precedentemente al quale in L circolava una corrente I_0, come potrebbe, ad es., pensarsi approssimativamente realizzato con un dispositivo come quello indicato in fig. 48 mediante una rapida manovra da M ad N del commutatore K.

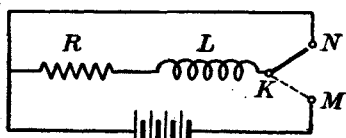



Fig. 48

La corrente andrà variando col tempo, partendo dal valore I_0 per $t = 0$, secondo la legge che si ottiene scrivendo che in ogni istante la f. e. m. indotta $-L\frac{di}{dt}$ uguaglia il prodotto Ri, cioè:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0 .$$

È istruttivo osservare che a questa equazione si può pervenire, quasi senza ragionamento, considerando che, se si indica con g la conduttanza $\frac{1}{R}$, il sistema attuale può intendersi costituito da tale g *in parallelo* con la induttanza L. Esso dunque è esattamente il sistema *duale* (I, 10) del precedente, e pertanto si può senz'altro asserire che l'equazione che lo governa si ottiene dalla (3) mutando v, R, C in i, g, L rispettivamente, cioè:

$$Lg\frac{di}{dt} + i = 0 ,$$

coincidente ovviamente con la precedente.

Procedendo come dianzi, si trova:

$$i = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \tag{6}$$

dove la *costante di tempo* τ vale in questo caso Lg, cioè $\frac{L}{R}$. L'andamento della corrente in funzione del tempo è dello stesso tipo di quello precedentemente constatato per la tensione ai capi del condensatore; e cioè continuamente decrescente col tempo, avendosi valori in progressione geometrica di ragione $e^{-\frac{h}{\tau}}$ per valori del tempo procedenti in progressione aritmetica di ragione h. In particolare, la costante di tempo misura il tempo occorrente affinchè la corrente si riduca da un valore qualunque I ad $\frac{I}{e}$.

Il caso ora studiato non è che un caso particolare di quello che si ha quando nel circuito sia presente una sede di f. e. m. E, costante o variabile col tempo.

Ragionando come nel n. prec., si conclude che il valore della corrente in un istante qualunque corrisponde alla somma di quella pertinente allo stato di regime e di quella, detta *transitoria,* data dalla formola precedente. Siccome però generalmente si assume come senso positivo della corrente quello cospirante con la f. e. m. E, la corrente transitoria dovrà farsi precedere dal segno meno.

Per E costante, si ottiene così:

$$I = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \tag{7}$$

da cui si vede che la corrente non raggiunge il suo valore finale $\frac{E}{R}$ (corrispondente alla legge di Ohm) se non in tempo infinito (praticamente invece si tratta di tempo brevissimo, se, come d'ordinario accade, τ è piccola). È questo lo stato di cose che si verifica in un circuito alla sua chiusura. La parte transitoria della corrente, che, salvo il segno, coincide con la corrente $I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ che si trova nel caso (6), costituisce la così detta *extracorrente di chiusura,* che si sottrae dalla corrente finale ritardando così lo stabilirsi di questa.

Quando la resistenza R è costituita dallo spazio in cui si fa avvenire l'apertura di un circuito — spazio che, se sufficientemente piccolo, diviene generalmente conduttivo per effetto di ionizzazione — o comunque può pensarsi far parte del circuito, comprendente l'induttanza, in cui la (6) può effettivamente circolare, questa corrente transitoria prende il nome di *extracorrente di apertura.* Si può osservare che, comunque, all'inizio del fenomeno, si ha conferimento di energia al sistema sotto forma magnetica localizzata nell'induttanza L, e tale energia va gradatamente convertendosi in calore per effetto Joule. Pertanto si può asserire che è $\frac{1}{2} L I_0^2 = R \int i^2 dt$, essendo l'integrale esteso da 0 a ∞.

Infine, per E variabile, per es. sinusoidalmente ($E = E_m \operatorname{sen} \omega t$), si avrebbe che la corrente effettiva I si ottiene sottraendo la (6) dalla corrente di regime, rappresentabile col numero complesso $\frac{\mathbf{E}_m}{R + jL\omega}$.

3. - Scarica di un condensatore attraverso una resistenza e una induttanza. — Se un circuito comprende resistenza, induttanza e capacità in serie, l'equazione che ne governa il funzionamento, in assenza di d. d. p. impressa, cioè l'equazione che definisce l'andamento della scarica di un

condensatore di capacità C attraverso una resistenza R ed una induttanza L, è la seguente:

$$-L\frac{di}{dt}-Ri=v\,,$$

in quanto essa esprime che in ogni istante la tensione v alle armature del condensatore corrisponde alla differenza fra la f. e. m. $-L\frac{di}{dt}$ indotta dalle variazioni della corrente e la caduta di tensione Ri dovuta alla resistenza ohmica.

Siccome poi, detta q (funzione del tempo) la carica su ciascuna delle armature del condensatore, si ha, come al n. 1:

$$q=Cv \quad \text{e quindi} \quad i=\frac{dq}{dt}=C\frac{dv}{dt}\ (^1)\,,$$

la precedente, moltiplicando ogni termine per C, diviene:

$$LC\frac{d^2q}{dt^2}+RC\frac{dq}{dt}+q=0\,. \tag{8}$$

La più generale funzione soddisfacente a tale equazione è (App., A, 9):

$$q=Ae^{\alpha_1 t}+Be^{\alpha_2 t}\,,$$

dove A e B sono due costanti, ed α_1, α_2 sono le radici dell'equazione di secondo grado in α (equazione caratteristica):

$$LC\alpha^2+RC\alpha+1=0\,.$$

Quando α_1, α_2 sono reali, i loro valori sono:

$$\left.\begin{matrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{matrix}\right\}=\frac{-RC\pm\sqrt{R^2C^2-4LC}}{2LC}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}=$$

$$=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\frac{1}{LC}\left(\frac{R^2}{R_c^2}-1\right)}\,,$$

dove

$$R_c=2\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{9}$$

è la così detta resistenza *critica*, che in tale caso è *superata* dalla resistenza R del circuito.

---

(1) Si ricordi che la i così definita (n. 1) risulta positiva se cospirante con v, quindi per *corrente di carica* dovrà intendersi la $-C\frac{dv}{dt}$, la quale pertanto riesce positiva quando v decresce.

Nel caso in cui, per essere $R < R_c$, le radici a_1 ed a_2 sono complesse, alla funzione q si può invece dare l'aspetto (App., A, 9):

$$q = e^{-\alpha t}(A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t),$$

essendo

$$\alpha = \frac{R}{2L}, \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \left(\frac{R}{R_c}\right)^2} \left(\text{e quindi } \omega^2 + \alpha^2 = \frac{1}{LC}\right),$$

mentre A, B sono due costanti, cui se ne possono sempre sostituire altre due, M e φ, ad esse legate dalle relazioni:

$$M \operatorname{sen} \varphi = A, \quad M \cos \varphi = B \quad (^2),$$

talchè alla precedente potrà darsi l'aspetto:

$$q = M e^{-\alpha t} \operatorname{sen} (\omega t + \varphi).$$

La determinazione delle costanti M e φ si effettua agevolmente conoscendo la carica $Q_0 = CV_0$ conferita inizialmente al condensatore. Dovrà infatti aversi:

$$q = Q_0, \quad i = 0 \quad \text{per} \quad t = 0;$$

e siccome dalla precedente segue:

$$i = \frac{dq}{dt} = M e^{-\alpha t} \{ -\alpha \operatorname{sen} (\omega t + \varphi) + \omega \cos (\omega t + \varphi) \},$$

si deduce subito:

$$M \operatorname{sen} \varphi = Q_0, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega}{\alpha} \quad \left(\operatorname{sen} \varphi = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \alpha^2}} = \omega \sqrt{LC},\right.$$

$$\left.\cos \varphi = \frac{\alpha}{\sqrt{\omega^2 + \alpha^2}} = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}\right).$$

In definitiva, le espressioni esplicite di q ed i sono:

$$q = \frac{Q_0}{\omega \sqrt{LC}} e^{-\alpha t} \operatorname{sen} (\omega t + \varphi), \tag{10}$$

$$-i = \frac{Q_0}{\omega LC} e^{-\alpha t} \operatorname{sen} \omega t = \frac{V_0}{\omega L} e^{-\alpha t} \operatorname{sen} \omega t. \tag{10'}$$

([2]) Basta assumere per M e φ le coordinate polari del punto le cui coordinate cartesiane ortogonali sono B ed A, cioè:

$$M = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \operatorname{sen} \varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Quanto alla tensione v ai capi del condensatore, avendosi ad ogni istante $q = Cv$, sarà:

$$(10'') \qquad v = \frac{V_0}{\omega\sqrt{LC}} e^{-\alpha t} \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) .$$

È facile vedere che la intensità i della corrente soddisfa alla stessa equazione (8) cui soddisfano v e q, cioè si ha:

$$LC \frac{d^2 i}{dt^2} + RC \frac{di}{dt} + i = 0 ;$$

basta all'uopo derivare la (8) rispetto al tempo e scrivere i, $\frac{di}{dt}$, $\frac{d^2 i}{d^2 t}$ al posto di $\frac{dq}{dt}$, $\frac{d^2 q}{dt^2}$, $\frac{d^3 q}{dt^3}$.

Nel caso $R > R_c$, la scarica del condensatore attraverso la data induttanza L e la data resistenza R si compie secondo una legge che conferisce al fenomeno i medesimi caratteri che si avevano nel caso studiato al n. 1, giacchè, essendo evidentemente $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 < 0$, ambo i termini dell'espressione di q sono decrescenti indefinitamente col tempo con legge esponenziale, cioè la scarica ha, come si suol dire, carattere *aperiodico.*

Ciò è quanto si verifica quando la resistenza R del circuito è superiore a quella che abbiamo chiamato critica, il cui valore è fornito dalla (9). E si dimostra facilmente, valendosi della formola (41) di App., *A*, 9, che lo stesso carattere si conserva anche nel caso $R = R_c$.

Per le applicazioni che ci interessano, è di gran lunga più importante il caso $R < R_c$. Il corrispondente andamento di v, come si legge nella (10″), sarebbe geometricamente rappresentabile con una sinusoide di pulsazione ω, se non vi fosse il fattore esponenziale $e^{-\alpha t}$. La presenza di questo opera nel senso di diminuire continuamente l'ampiezza della predetta sinusoide con legge di tipo esponenziale, con una « costante di tempo » di valore $\frac{2L}{R}$. La pulsazione si serba però costante, ed uguale a:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \left(\frac{R}{R_c}\right)^2},$$

ma il tempo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{LC} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{R}{R_c}\right)^2}}$$

non sta qui ad indicare la durata del periodo, perchè la v non è ora funzione periodica del tempo; esso misura però sempre il doppio dell'intervallo fra due successivi annullamenti della v.

Per R convenientemente piccola in confronto ad R_c, tale pulsazione

differisce poco dal valore $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ per il quale il sistema (L, C) presenta, in regime alternativo permanente, reattanza nulla, cioè dalla così detta *pulsazione di risonanza* del sistema (L, C).

Per es., per $R = 1\,\Omega$, $L = 10^{-5}$ H, $C = 10^{-7}$ F, si avrebbe:

$$R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 20\,, \quad \frac{R}{R_c} = \frac{1}{20}\,, \quad \text{quindi } \sqrt{1-\left(\frac{R}{R_c}\right)^2} \cong 1 - \frac{1}{2}\frac{R^2}{R_c^2} = \frac{799}{800}\,,$$

ed ω differisce da $\omega_0 = 10^6$ per $\frac{1}{800}$ di tale valore.

La scarica del condensatore in tale caso si compie con andamento oscillatorio e per tale motivo un circuito siffatto viene generalmente chiamato un *circuito oscillante*. Si tratta però di oscillazioni *smorzate*, a causa dell'azione continuamente deprimente del fattore esponenziale $e^{-\alpha t}$. La grandezza $\alpha = \frac{R}{2L}$ che compare all'esponente moltiplicata per il tempo t, e che misura l'inversa di un tempo, viene talvolta chiamata fattore di smorzamento, ed il suo prodotto per la durata T del periodo corrispondente alla pulsazione ω prende il nome di *decremento logaritmico* o semplicemente *decremento*.

Indicandolo con δ, si ha la seguente importante relazione:

$$\frac{\delta}{\pi} = \frac{RT}{2\pi L} = \frac{R}{L\omega}\,.$$

Introducendo la ω_0, si ha per R_c la espressione:

$$R_c = 2L\omega_0 = \frac{2}{C\omega_0}\,,$$

quindi, pel rapporto $\frac{R}{R_c}$:

$$\frac{R}{R_c} = \frac{R}{2L\omega_0} = \frac{RC\omega_0}{2} = \frac{1}{2\varepsilon}\,,$$

avendo indicato con

$$\varepsilon = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$$

il così detto *coefficiente di risonanza* del circuito, del quale fra poco (n. 7) vedremo il concreto significato.

Intanto osserviamo qui che fra tale coefficiente ε ed il decremento δ intercedono le semplici relazioni:

$$\frac{\pi}{\delta} = \sqrt{\varepsilon^2 - \frac{1}{4}}\,, \quad \varepsilon = \sqrt{\left(\frac{\pi}{\delta}\right)^2 + \frac{1}{4}}\,,$$

facilmente verificabili ricordando che per definizione è $\delta = \frac{RT}{2L}$, e quindi:

$$\frac{\pi}{\delta} = \frac{L\sqrt{1-\left(\frac{R}{R_c}\right)^2}}{R\sqrt{LC}} = \frac{L\omega_0}{R}\sqrt{1-\left(\frac{R}{R_c}\right)^2} = \varepsilon\sqrt{1-\frac{1}{4\varepsilon^2}} = \sqrt{\varepsilon^2-\frac{1}{4}}.$$

Quando, come spesso accade nelle applicazioni, ε è sufficientemente grande da potersi trascurare $\frac{1}{4}$ in confronto di ε^2, si ha sensibilmente:

$$\delta \cong \frac{\pi}{\varepsilon}.$$

Nel caso del precedente esempio si avrebbe $\varepsilon = 10$, $\frac{\pi}{\delta} = \sqrt{99,75} = 9,988$.

Per comprendere il significato fisico del decremento, occorre studiare dettagliatamente il fenomeno rappresentato dalla (10) o dalla equivalente (10″).

Da queste ultime si deduce che l'andamento della tensione ai capi del condensatore è rappresentato da una curva come quella della fig. 49 $\left(\text{disegnata nell'ipotesi di } \alpha = 10^5,\ \omega = 2 \cdot 10^6,\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{\omega}{\alpha} \cong \frac{\pi}{2}\right)$, che

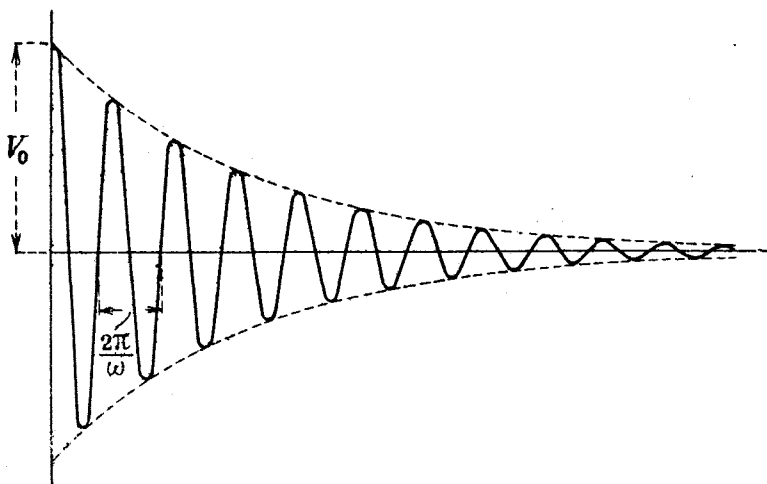



Fig. 49

può assimilarsi ad una specie di sinusoide la quale, anzichè fra due rette parallele, è iscritta fra due curve esponenziali simmetriche.

Il contemporaneo andamento della corrente è definito dalla equazione (10′). Il relativo diagramma (non disegnato in figura) è del tutto ana-

logo a quello della tensione, e presenta rispetto a quest'ultimo una specie di « sfasamento », il cui valore angolare, come si rileva dalle relazioni (10), (10') è $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\alpha}$.

Qualora si potesse ritenere del tutto trascurabile la grandezza $\frac{R}{2L}$, cioè infinitamente grande la « costante di tempo » $\frac{2L}{R}$, le due curve si ridurrebbero a due effettive sinusoidi e tale sfasamento risulterebbe di 90°, come può agevolmente comprendersi pensando che, in tale caso, tutto si svolge come se il circuito fosse *alimentato* da una tensione (infinitamente piccola) di pulsazione ω.

Questa osservazione conduce anzi a concludere come il circuito che stiamo studiando potrebbe divenire sede di corrente alternata *permanente* (cioè sinusoidale di ampiezza costante), anche in assenza di d. d. p. impressa, qualora l'effetto della resistenza potesse essere *annullato*, o, ciò che è lo stesso, opportunamente *compensato*. Si avrebbe allora una corrente alternata la cui pulsazione risulta determinata unicamente dalle costanti circuitali, ed il cui valore $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ può quindi essere scelto comunque grande disponendo opportunamente di L e di C.

È appunto per questa via che in pratica si realizzano correnti alternative di altissima frequenza, quali appunto, come vedremo in seguito, sono richieste nei processi r. t.

La pulsazione ω_0 chiamasi la pulsazione *propria* del circuito.

4. - Esame energetico dei fenomeni descritti nel n. prec. — Il fenomeno della scarica di un condensatore in un circuito comprendente induttanza e resistenza si accompagna con manifestazioni energetiche che possono agevolmente illustrarsi nel modo seguente.

Supponiamo dapprima nulla la resistenza R. Per la carica inizialmente conferita al condensatore, questo tende a scaricarsi, ed effettivamente la scarica si inizia con una corrente, che va aumentando d'intensità mano mano che diminuisce la sua velocità di variazione (in quanto che alle rapide variazioni si oppone l'induttanza), e ciò fino a che il condensatore non si sia scaricato. Ma in tale momento la corrente non può annullarsi, perchè la f. e. m. d'a. i. tende a continuarla, con che il condensatore si carica in senso opposto al precedente; tale carica però contrasta l'effetto di quella f. e. m. fino ad annullare la corrente, mentre il condensatore ha così assunto una carica opposta alla iniziale. Da questo momento la vicenda si ripete con lo stesso ritmo, ma in senso contrario, e così via.

Dalla equazione (10), facendo $R = 0$, si deduce che il fenomeno ha

carattere alternativo con pulsazione $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Del resto, che tale debba essere il ritmo può dedursi anche senza ricorrere alla (10), pensando che, in tali condizioni, il circuito deve divenire sede di corrente alternata *diversa da zero*, con d. d. p. impressa *nulla*. Ora, ciò manifestamente non può verificarsi se non quando sia nulla l'impedenza, cioè, nel caso attuale, la reattanza, cioè quando sia $L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$, il che appunto equivale a dire che è $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, cioè $\omega = \omega_0$.

Dal punto di vista energetico, il fenomeno comporta un periodico scambio di energia fra il campo elettrico in C ed il campo magnetico in L, essendo massimo il primo quando il secondo è nullo (condensatore al massimo di carica, corrente nulla) e viceversa (condensatore scarico, corrente massima), e non differisce formalmente dal caso meccanico di un pendolo (od altro analogo sistema oscillante) *senza attrito*.

Se la resistenza R non è nulla, ma è sufficientemente piccola, il fenomeno conserva lo stesso carattere oscillatorio; senonchè, durante ogni oscillazione, viene dissipata parte dell'energia inizialmente conferita al condensatore, per modo che l'energia magnetica che trovasi immagazzinata in L quando il condensatore è scarico è minore di quella che questa aveva al precedente massimo di carica, e successivamente l'energia di carica al prossimo massimo di carica (in senso opposto) è ancora minore, e così via. Il fenomeno, analogamente a quel che avviene in un pendolo a piccolo attrito, non cessa di avere il carattere oscillatorio, ma va smorzandosi mediante trasformazione graduale in calore di tutta l'energia iniziale, pur permanendo il fatto degli scambi periodici di energia fra L e C.

Se poi R supera quel valore che abbiamo denominato resistenza critica, le dissipazioni raggiungono fino dalla prima oscillazione valori tali che, raggiunto l'annullamento della carica, si è esaurita tutta l'energia iniziale, ed allora il fenomeno si spegne senza che si possano essere verificati scambi d'energia fra L e C; analogamente a quel che si verificherebbe in un pendolo a forte attrito.

5. - Significato del decremento. — Ad un primo significato del decremento perveniamo calcolando il rapporto fra l'energia dissipata durante una mezza oscillazione — corrispondente all'intervallo fra due successivi massimi di carica in senso opposto — e quella che, nello stesso intervallo di tempo, viene scambiata fra la L e la C. Si trova invero che tale rapporto è uguale al decremento δ.

Ci limiteremo a dimostrarlo nell'ipotesi approssimata in cui si possa

ritenere trascurabile l'effetto dello smorzamento durante il tempo $\frac{T}{2}$ [1].

Con tale semplificazione le oscillazioni della corrente e della tensione vengono ad assumere carattere sinusoidale, e pertanto, detto I_0 il valore massimo della corrente durante quel tempo, si ha che l'energia scambiata fra L e C vale $\frac{LI_0^2}{2}$. Quanto all'energia che nel frattempo si dissipa in R, essa si otterrà moltiplicando R pel quadrato $\frac{I_0^2}{2}$ del valore efficace della corrente e per il tempo $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}$, onde segue che il rapporto di questa energia a quella vale $\frac{R\pi}{\omega L}$, cioè precisamente δ, c. d. d. Così, del decremento δ si viene ad avere una importante definizione energetica.

Un altro notevole significato spetta al decremento — ed è anzi questo che ne giustifica la denominazione — in quanto che uno sguardo alla (10'') mostra come la funzione v vada variando fra una successione di massimi e di minimi. La distanza nel tempo fra questi è uguale a quella che intercede fra due successivi annullamenti della derivata $\frac{dv}{dt}$, cioè della corrente $i = C\frac{dv}{dt}$; essa quindi vale $\frac{T}{2}$. Ne segue che il rapporto fra due massimi (o due minimi) successivi vale e^{δ}, e pertanto δ può definirsi come logaritmo (naturale) del rapporto fra due massimi successivi della tensione, od anche fra due massimi successivi della carica, od anche della corrente. Esso dà quindi una precisa nozione della rapidità con cui tali grandezze decrescono, onde il nome di *decremento.*

Il decremento risulta proporzionale alla resistenza ed alla radice quadrata della capacità, ed inversamente proporzionale alla radice quadrata dell'induttanza, del che ci si può rendere ragione quando si pensi che esso sostanzialmente dipende dall'entità della dissipazione durante una oscillazione, e quindi, mentre ovviamente cresce con la resistenza, cresce pure con la capacità, in quanto da questa ultima dipende la carica del condensatore e di conseguenza l'intensità media della corrente; l'induttanza invece, in quanto tende a deprimere la rapidità della scarica e della carica, cioè l'intensità della corrente, determina una minorazione della dissipazione stessa.

Come nei casi trattati ai nn. prece., noto il decremento, è facile calcolare il tempo necessario affinchè la tensione (o la corrente) si riducano ad una predeterminata frazione del valore iniziale (rispettivamente del valore corrispondente al primo massimo).

---

[1] Avvertiamo che la cosa può rigorosamente dimostrarsi anche tenendo conto dello smorzamento.

Per es., per un circuito avente $R = 0{,}1\ \Omega$, $L = 10^{-6}$ H, $C = 10^{-3}$ F, si avrebbe:

$$\omega = 10^7\,, \qquad \delta \cong \pi R \sqrt{\frac{C}{L}} = 0{,}0314\,.$$

Se la tensione applicata all'inizio fosse di 40 000 = $4 \cdot 10^4$ V, il primo massimo di corrente sarebbe approssimativamente (ritenendo sinusoidale senza smorzamento l'andamento della prima oscillazione):

$$I_1 = C\omega V_0 = 4000 \text{ amp.}\,,$$

e tale valore si riduce alla sua centomillesima parte, cioè a 0,04 amp., dopo un numero di oscillazioni n dato da:

$$n\delta \operatorname{Log} e = \operatorname{Log} 100000\,, \quad n = \frac{5}{0{,}0314 \cdot 0{,}43} \cong 370\,,$$

cioè dopo $370 \cdot \dfrac{2\pi}{\omega} \cong 2{,}3 \cdot 10^{-4}$ sec.

6. - Carica di un condensatore attraverso resistenza e induttanza. — Nel caso in cui nel circuito sia presente una sede di f. e. m. costante E, con procedimento identico a quello usato al n. 1, si vede subito che la tensione ai capi del condensatore tende, al solito, a raggiungere il valore E attraverso una serie infinita di oscillazioni del tipo (10″), cioè la legge

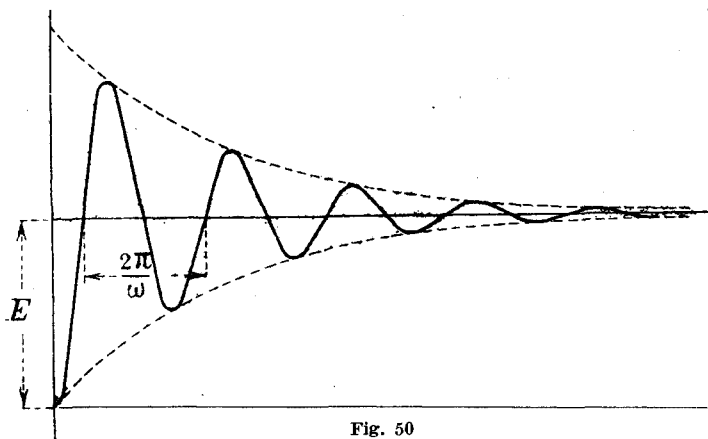



Fig. 50

di variazione di v è rappresentabile con un diagramma che si svolge attorno alla retta $v = E$ così come il precedente si svolge attorno alla retta $v = 0$. Esso però comincia con $v = 0$ per $t = 0$, e pertanto l'ampiezza della prima oscillazione vale E, quindi la massima tensione ai capi del condensatore può raggiungere valori prossimi a $2E$. In fig. 50 un tale

diagramma è stato tracciato nell'ipotesi $R = 1\Omega$, $L = 4 \cdot 10^{-6}$ H, $C = 25 \cdot 10^{-8}$ F.

Qualora la f. e. m. applicata fosse variabile, per es. alternativa sinusoidale E_m sen Ωt, di pulsazione Ω qualunque (in generale diversa da ω), si avrebbe uno stato di cose corrispondente alla sovrapposizione di quello pertinente al regime, quale si studia in Elettrotecnica, e di quello rappresentato da una legge del tipo studiato nei nn. precc. Il relativo andamento del fenomeno è illustrato in fig. 51, che si riferisce ad un circuito avente $R = 25\Omega$, $L = 10^{-4}$H, $C = 10^{-8}$F (e quindi $\omega = 0{,}984 \cdot 10^{6}$) cui viene applicata una d. d. p. di pulsazione $\Omega = 2\pi \cdot 125\,000$; le linee a tratti rappresentano i diagrammi corrispondenti allo stato di regime ed a quello transitorio, e con linea continua è indicato quello degli effettivi valori di v (somma dei due precedenti). È interessante rilevare che l'andamento della v comporta anche dei massimi maggiori della ampiezza della d. d. p. impressa, il che è in relazione con un fatto di cui avremo occasione di parlare successivamente (n. 18).

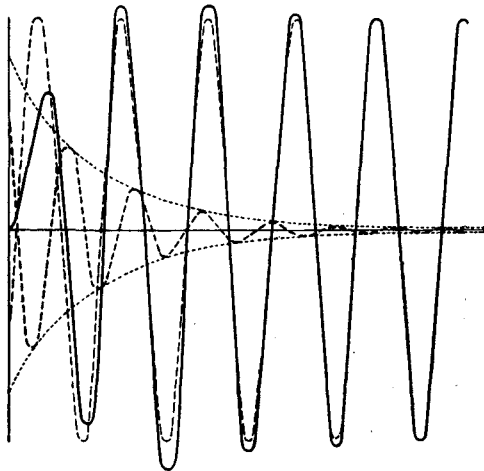



Fig. 51

7. - Regime forzato. - Coefficiente di risonanza. - Coefficiente di sovratensione. - Selettività. — Quando un circuito come quello studiato nei nn. precc., costituito cioè da resistenza R, induttanza L e capacità C in serie, è alimentato da una d. d. p. alternata, in esso, dopo il periodo transitorio di cui sopra, praticamente breve, si stabilisce, come è noto, una corrente alternata permanente avente la stessa pulsazione ω della d. d. p. impressa, da non confondersi, bene inteso, con la pulsazione di cui ci siamo occupati nei nn. precc. In tal caso cioè il circuito diviene sede di oscillazioni che si chiamano *forzate*, laddove il regime precedentemente esaminato si chiama *libero*.

In tali condizioni, le grandezze da noi denominate decremento e resistenza critica, e che indicammo con δ ed R_c, perdono il significato che loro abbiamo precedentemente attribuito. Invece acquista notevole importanza il coefficiente di risonanza ε, di cui al n. 3 abbiamo veduto le relazioni con quelle.

Come sappiamo dall'Elettrotecnica, la corrente che si stabilisce nel circuito stesso per una d. d. p. applicata di valore (massimo o efficace) E, e di pulsazione ω qualunque, ha per valore (massimo o efficace rispett.):

$$I = \frac{E}{Z} \quad \text{con} \quad Z^2 = R^2 + X^2, \quad X = L\omega - \frac{1}{C\omega}.$$

Per i nostri fini, è utile considerare le variazioni di I al variare di ω, ferma restando E, oltre, ben inteso, gli elementi strutturali R, L, C del circuito.

Per $\omega = 0$ l'impedenza Z è infinitamente grande, e quindi è $I = 0$, poi, col crescere di ω, I aumenta fino ad un valor massimo $\left(= \frac{E}{R}\right)$ corrispondente al minimo di Z, che ovviamente vale R, e si verifica per ω uguale alla pulsazione propria $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ del circuito; poi, per $\omega > \omega_0$, I torna a decrescere e tende a 0 per $\omega \to \infty$.

Quando è $\omega = \omega_0$, si dice che il circuito è *in risonanza* con la pulsazione impressa, con la quale locuzione si vuole asserire che in tali condizioni la reattanza s'annulla, e pertanto la corrente assume il suo massimo valore ed è in fase con la d. d. p. applicata.

In tal caso la tensione ai capi dell'induttanza, uguale a quella ai capi del condensatore, vale:

$$L\omega_0 I = \frac{I}{C\omega_0} = \frac{L\omega_0 E}{R} = \frac{E}{C\omega_0 R},$$

ed il suo rapporto alla tensione impressa E, o, ciò che è lo stesso, alla tensione ai capi della resistenza, corrisponde al coefficiente di risonanza ε:

$$\frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{C\omega_0 R} = \varepsilon. \tag{11}$$

Per questa ragione a tale rapporto si dà talvolta il nome di *coefficiente di sovratensione* [1].

Se ε è abbastanza grande, la tensione εE è la massima realizzabile, al variare di ω, ai capi di L o di C. Infatti, la tensione ai capi di L vale in generale:

$$L\omega I = \frac{L\omega E}{Z} = \frac{LE\omega}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} = \frac{LE}{\sqrt{\frac{R^2}{\omega^2} + \left(L - \frac{1}{C\omega^2}\right)^2}},$$

---

[1] Se si opera con pulsazione diversa da ω_0, si può ancora parlare di sovratensione ai capi di L e di C; ma le due non sarebbero uguali. Pertanto il rapporto definito dalla (11) dovrebbe denominarsi coefficiente di sovratensione « alla risonanza ».

ed il suo massimo si verifica per quel valore di ω che rende minimo il denominatore, cioè:

$$R^2x + L^2 + \frac{x^2}{C^2} - 2\frac{L}{C}x,$$

dove si è posto $x = \dfrac{1}{\omega^2}$.

Annullando la derivata rispetto ad x, si trova:

$$x = LC\left(1 - \frac{R^2C}{2L}\right), \quad \text{cioè} \quad \omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{2\varepsilon^2}}},$$

e siccome il secondo membro, per ε sufficientemente grande, differisce poco da ω_0, resta provato l'asserto.

E così, per la tensione ai capi di C, che in generale vale:

$$C\omega \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2}},$$

si trova analogamente che essa diviene massima per

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2\varepsilon^2}},$$

e pertanto si conclude come precedentemente.

Come si vede dalla (11) moltiplicando numeratore e denominatore per I^2, il coefficiente di risonanza ε corrisponde al rapporto fra la potenza reattiva pertinente, alla pulsazione ω_0, a ciascuno dei due elementi reattivi del circuito, e la potenza attiva, o, ciò che è lo stesso, si ha:

$$\varepsilon = \operatorname{tg} \varphi,$$

essendo φ l'angolo dell'impedenza costituita, alla pulsazione ω_0, da ognuno dei due sistemi L, R e C, R.

Oppure ancora, si può definire ε come rapporto fra la *impedenza caratteristica* del sistema (L, C) e la resistenza R, intendendo per impedenza caratteristica il valore di ciascuna delle reattanze $L\omega_0$, $\dfrac{1}{C\omega_0}$ alla pulsazione di risonanza, il qual valore poi coincide con la media geometrica $\sqrt{L\omega \cdot \dfrac{1}{C\omega}} = \sqrt{\dfrac{L}{C}}$ dei valori assoluti delle reattanze offerte da L e da C per una pulsazione *qualunque* (1).

---

(1) Confrontando con la (9), si deduce che quella che abbiamo definito *resistenza critica* R_c non è che il doppio della impedenza caratteristica.

Ad un altro importante significato fisico di ε (ed è precisamente quello che giustifica il nome di coefficiente di risonanza) si perviene considerando più da vicino la legge di variazione della corrente I (o dell'impedenza Z, che ad essa è inversamente proporzionale) al variare della pulsazione ω.

Il corrispondente diagramma che, come abbiamo veduto, presenta un massimo I_{max} in corrispondenza di ω_0 ed ha ordinata nulla per $\omega = 0$ ed $\omega = \infty$, non è simmetrico rispetto alla ordinata massima (vedi fig. 52 *a*), che si riferisce ad un sistema avente $R = 50\Omega$, $L = 40\text{mH}$, $C = 1\mu\text{F}$ e quindi $\omega_0 = 5000$). In altri termini, i due valori di ω pei quali alla I spettano valori uguali (necessariamente $< I_{max}$) non hanno ω_0 per media aritmetica (¹).

Si può invece agevolmente dimostrare che ω_0 è la loro media geometrica. Innanzi tutto osserviamo che una reattanza come la $L\omega - \dfrac{1}{C\omega}$ ha valori di segno contrario per due pulsazioni di cui l'una è minore, l'altra maggiore di ω_0 (²). Ciò premesso, se ω_1 ed ω_2 sono due pulsazioni tali che sia $\omega_1\omega_2 = \omega_0^2$, e Z_1, Z_2 le corrispondenti impedenze, si verifica subito che è $Z_1 = Z_2$, o, ciò che è lo stesso, che i valori delle corrispondenti reattanze X_1 e X_2 sono uguali in valore assoluto e, in virtù dell'osservazione precedente, di segno contrario. Infatti da

$$X_1 = L\omega_1 - \frac{1}{C\omega_1}, \quad X_2 = L\omega_2 - \frac{1}{C\omega_2},$$

si deduce:

$$X_1 + X_2 = L(\omega_1 + \omega_2) - \frac{1}{C}\left(\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2}\right) = (\omega_1 + \omega_2)\left(L - \frac{1}{C\omega_1\omega_2}\right),$$

e l'ultimo fattore, per essere $LC\omega_1\omega_2 = LC\omega_0^2 = 1$, è nullo.

Si può dunque dire che, se si costruisce un diagramma analogo al precedente, assumendo per ascisse $\log\omega$ anzichè ω, la curva corrispondente (fig. 52 *b*)), riesce simmetrica rispetto alla ordinata relativa alla pulsazione ω_0.

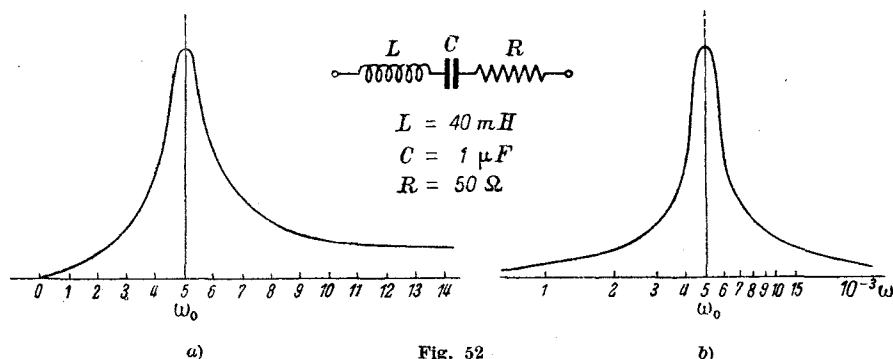
Ciò premesso, proponiamoci di ricercare i valori di ω pei quali la corrente I assume un valore n volte minore di I_{max}, cioè di risolvere l'equazione (in ω):

$$Z = nR\,. \tag{12}$$

(¹) Nelle ordinarie applicazioni r. t. però, avendo in generale a considerare pulsazioni ω per le quali la differenza $\omega - \omega_0$ è molto piccola rispetto ad ω_0 (dell'ordine di alcuni millesimi, o tutt'al più dei centesimi di ω_0), il diagramma, così limitato, risulta sensibilmente simmetrico rispetto all'ordinata ω_0.

(²) Infatti, i due termini $L\omega$ e $-\dfrac{1}{C\omega}$ che compongono la reattanza stessa sono entrambi crescenti con ω e quindi tale è la loro somma: ne segue che, essendo $X = 0$ per $\omega = \omega_0$, si avrà $X < 0$ per $\omega < \omega_0$ ed $X > 0$ per $\omega > \omega_0$.

La conoscenza di tali valori di ω per un dato n ci consentirà di giudicare del grado di *acuità* della curva descritta — che si chiama *curva di risonanza* —, in quanto è atta a darci la precisa nozione di quanto occorre allontanarsi dalla pulsazione ω_0 per realizzare una data riduzione della corrente rispetto ad I_{max}.

a) Fig. 52 b)

Talè nozione corrisponde alla valutazione quantitativa di quella che si chiama la *selettività* del circuito, da intendersi nel modo seguente. Poichè per $\omega = \omega_0$ la corrente ha il suo massimo valore, si può dire che il circuito *favorisce* la pulsazione ω_0 più di ogni altra. Scostando ω da ω_0, la corrente decresce, e si dice che il circuito è più o meno selettivo a seconda che minore o maggiore è lo scarto da ω_0 necessario per realizzare una certa e predeterminata riduzione della corrente, a parità, ben inteso, di tensione.

Per misura della selettività si assumerà appunto l'inverso del valore *relativo* di tale scarto, cioè il rapporto di ω_0 ad esso, calcolato per un determinato coefficiente di riduzione.

In altri termini, si tratta di valutare l'inverso del rapporto $\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$, essendo ω una delle pulsazioni soddisfacenti alla (12).

Per semplicità, ci limiteremo al caso in cui $\omega - \omega_0$ è sufficientemente piccolo rispetto ad ω_0, talchè tale differenza si possa assimilare al differenziale $d\omega$ calcolato in corrispondenza di $\omega = \omega_0$. In tali limiti di approssimazione, i *due* valori di $\omega - \omega_0$ che ci interessano risultano uguali e di segno contrario (1).

(1) In generale, quando la differenza fra due numeri x_1 e x_2 è piccola in confronto a ciascuno di essi, per modo che si possano trascurare le potenze di $\frac{x_1 - x_2}{x_2}$, $\frac{x_1 - x_2}{x_1}$ superiori alla prima, nonchè i prodotti di tali rapporti, si può dimostrare che qualunque loro media coincide con la loro media aritmetica x_0.

Posto $x_1 = x_0 + a$, con che si avrà $x_2 = x_0 - a$, si ha per es. per la media geome-

Differenziando rispetto ad ω la:

$$\mathbf{Z}_\omega = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right),$$

dove per chiarezza si è apposto l'indice ω a $\mathbf{Z}$, per metter in evidenza la pulsazione alla quale essa si riferisce, si ha:

$$d\mathbf{Z}_\omega = j\left(L + \frac{1}{C\omega^2}\right) d\omega,$$

quindi l'impedenza corrispondente ad $\omega + d\omega$ vale:

$$\mathbf{Z}_\omega + j\left(L + \frac{1}{C\omega^2}\right) d\omega .$$

In particolare, se la pulsazione ω di partenza è la ω_0, ricordando che è $\mathbf{Z}_{\omega_0} = R$ ed $LC\omega_0^2 = 1$, questa ultima espressione equivale a

$$R + j\left(L + \frac{1}{C\omega_0^2}\right) d\omega = R + 2jL\omega_0 \frac{d\omega}{\omega_0} .$$

Scrivendo che, secondo la (12), il quadrato del modulo di questo numero complesso vale n^2R^2, si deduce:

$$(n^2 - 1)\, R^2 = 4L^2\omega_0^2 \left(\frac{d\omega}{\omega_0}\right)^2,$$

da cui:

$$\frac{d\omega}{\omega_0} = \sqrt{n^2 - 1}\, \frac{R}{2L\omega_0} = \frac{\sqrt{n^2-1}}{2\varepsilon} . \tag{13}$$

Ritenendo $\sqrt{n^2 - 1} \cong n$, il che può approssimativamente farsi appena n supera poche unità, si ha per la cercata espressione della selettività s (inverso del rapporto predetto):

$$s = \frac{2\varepsilon}{n} \text{ [1]} .$$

---

trica m:

$$m = \sqrt{x_1x_2} = \sqrt{x_0^2 - a^2} = x_0 \sqrt{1 - \left(\frac{a}{x_0}\right)^2} \cong x_0 .$$

Così per la media armonica M, si avrebbe:

$$M = \frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2} = \frac{2(x_0^2 - a^2)}{2x_0} = x_0\left(1 - \frac{a^2}{x_0^2}\right) \cong x_0 ,$$

e analogamente per qualunque altra.

[1] Ovviamente, tale valutazione della selettività non ha carattere assoluto, in quanto che è strettamente legata al valore (arbitrario) scelto per n.

Per es. per un circuito con $R = 5\Omega$, $L = 2 \cdot 10^{-4}$H, $C = 8 \cdot 10^{-10}$F, si avrebbe $\omega_0 = 2{,}5 \cdot 10^6$ $\left(\text{cioè } f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \cong 400 \text{ kHz}\right)$, $\varepsilon = \frac{L\omega_0}{R} = 100$; per cui, facendo ad es. $n = 10$, si avrebbe $s = 20$. Ciò significa che occorrerebbe scostarsi di circa $\frac{1}{20}$ di 400 kHz (vale a dire di 20 kHz in più o in meno) dalla frequenza f_0, per ridurre la corrente ad $\frac{1}{10}$, ferma restando la tensione.

La formola (13) suggerisce un metodo per misurare il coefficiente di risonanza, deducendolo da misure di frequenze. Invero, note le frequenze $f_1 = f_0 + df$, $f_2 = f_0 - df$ corrispondenti ad una corrente uguale ad $\frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$, dalla (13), posto $n = \sqrt{2}$, tenuto presente che è $\frac{d\omega}{\omega_0} = \frac{df}{f_0}$, si ha:

$$\frac{f_1 - f_2}{f_0} = \frac{1}{\varepsilon}, \quad \text{cioè} \quad \varepsilon = \frac{f_1 + f_2}{2(f_1 - f_2)}.$$

Infine, da quanto precede si deduce che ε è un indice dell'acutezza della curva di risonanza, e da ciò appunto deriva la denominazione di coefficiente di risonanza.

8. - Diagramma universale di risonanza. — Nel n. prec. abbiamo osservato che se, anzichè riferirsi alla pulsazione ω, ci si riferisce al suo logaritmo, la curva di risonanza, cioè il diagramma della funzione

$$I = \frac{RI_{max}}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \tag{14}$$

assume un aspetto simmetrico rispetto all'ordinata pertinente alla pulsazione di risonanza $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Questo è un modo di conferire alla curva un aspetto simmetrico, ma evidentemente non è il solo. Si perviene ad es. a risultato analogo assumendo per ascissa il rapporto:

$$x = \frac{X}{R} = \frac{L\omega}{R} - \frac{1}{C\omega R} = \varepsilon\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) \tag{15}$$

equivalente alla tangente dell'angolo φ che misura il *ritardo* della corrente rispetto alla tensione applicata [1]. Se poi per ordinata si assume

[1] Si ha cioè ritardo per $x > 0$, anticipo per $x < 0$.

il rapporto

$$y = \frac{I}{I_{\max}} = \frac{R}{Z},$$

la curva di risonanza diventa quella la cui equazione è

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}, \tag{16}$$

e che, a causa dell'identità $\cos \varphi = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 \varphi}}$, coincide col diagramma che dà la variazione del coseno in funzione della tangente. Una tale curva essendo ovviamente la stessa per qualsivoglia circuito, potrà chiamarsi *curva universale di risonanza*. Essa è disegnata in fig. 53.

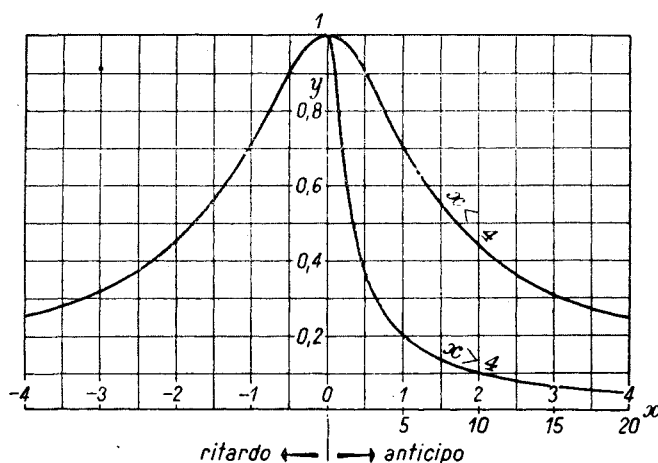



Fig. 53

Per l'uso pratico di tale diagramma, cioè per la determinazione del valore di y corrispondente ad un dato valore di ω, occorre però far uso della relazione (15) che permette di dedurre ω in funzione di ε e di x. Da essa, detto σ lo scarto relativo della frequenza considerata rispetto a quella di risonanza, cioè posto

$$\sigma = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \text{ (1)},$$

si ha agevolmente

$$x = \sigma\varepsilon \frac{\sigma + 2}{\sigma + 1} \quad \text{cioè} \quad \frac{x}{\varepsilon} = \sigma\left(1 + \frac{1}{\sigma + 1}\right). \tag{17}$$

---

(1) Tale rapporto potrebbe chiamarsi « lo scorrimento » (cfr. El., XIV, 3) della pulsazione ω rispetto alla ω_0.

La relazione fra $\frac{x}{\varepsilon}$ e σ è dunque rappresentata dall'iperbole di cui questa è l'equazione. Il relativo diagramma è rappresentato in fig. 54.

Mediante l'uso delle curve di figg. 53 e 54 si possono agevolmente apprezzare tutte le particolarità esaminate nel num. prec. In particolare si può notare che la non simmetria della curva di fig. 54 rispetto all'ordinata $\sigma = 0$ accusa senz'altro il comportamento asimmetrico della corrente rispetto alle pulsazioni sopra e sotto la risonanza.

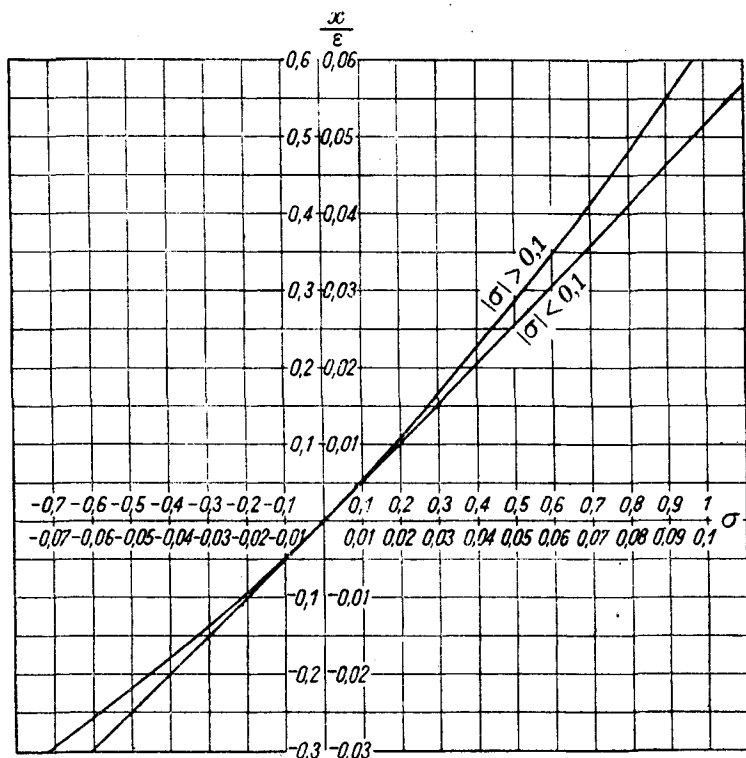



Fig. 54

A titolo di esempio, per il circuito considerato nel n. prec., si vede che per una riduzione della corrente ad 1/10, cioè per $y = 0{,}1$, si ha $x = 10$, cui, per $\varepsilon = 100$, corrisponde $\sigma = 0{,}05$.

È utile osservare che nella maggior parte dei problemi che ricorrono nelle applicazioni pratiche si ha a che fare con valori assai piccoli di σ, talchè, del diagramma di fig. 54, viene ad essere utilizzata la porzione situata nelle immediate prossimità dell'origine. Tale porzione coincide sensibilmente con la retta di coefficiente angolare 2, cioè per tali valori

di σ, la relazione fra σ ed x si riduce ad una semplice proporzionalità:

$$x \cong 2\varepsilon\sigma \,. \tag{15'}$$

In particolare, per scarti piccoli dalla risonanza, si ha simmetria rispetto a $\sigma = 0$.

Possiamo anche stabilire i limiti entro i quali è lecita tale approssimazione. All'uopo osserviamo che ben di rado i valori dei parametri circuitali R, L, C sono conosciuti con precisione superiore a quella che consente di calcolare ε ed ω_0 con errori inferiori all' 1%, e che, in calcoli di tal genere, si assumono generalmente per i parametri stessi valori costanti (valutati alla frequenza di risonanza), mentre, a causa dell'effetto pellicolare, i primi due sono essenzialmente variabili con la frequenza. Accettando un errore relativo dell' 1%, si vede subito che σ dovrà non superare il 2% in valore assoluto (1).

Così si può in generale asserire che, entro i predetti limiti di approssimazione, il valore x della tangente dell'angolo di sfasamento si realizza per uno scarto relativo $\frac{x}{2\varepsilon}$ dalla frequenza di risonanza. In particolare, le pulsazioni alle quali lo sfasamento è $\pm 45^\circ$ sono le $\omega_0\left(1 \pm \frac{1}{2\varepsilon}\right)$ e ad esse corrisponde il valore $\sqrt{2}$ del rapporto $\frac{I_{max}}{I}$, ecc.

Giova rilevare che la curva di fig. 53 presenta due punti di flesso, e precisamente in corrispondenza dei valori $|x| = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707$, cui corrisponde $y = 0{,}816$, e la derivata in tali punti vale 0,385 in valore assoluto (2). Quindi in vicinanza dei flessi $|x| = 0{,}707$ si può approssimativamente ritenere

$$y = 0{,}816 + 0{,}385(0{,}707 - |x|) = 1{,}088 - 0{,}385\,|x| \,. \quad (3)$$

---

(1) Basta por mente all'identità (App., A, 2)

$$1 + \frac{1}{1+\alpha} = 2\left(1 - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{2} - \ldots\right).$$

(2) Infatti, calcolando le prime due derivate y' e y'' del secondo membro di (16), si ha:

$$y' = -x\,(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}, \quad y'' = -(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} + 3x^2(1+x^2)^{-\frac{5}{2}},$$

dopo di che l'equazione $y'' = 0$ porge

$$1 + x^2 = 3x^2, \quad \text{da cui} \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}},$$

ed i valori di y e y' per tali valori di x sono

$$y = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0{,}816, \quad y' = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} = \mp\frac{2}{3\sqrt{3}} = \mp\ 0{,}385 .$$

(3) Si può verificare che per $0{,}36 < x < 1{,}10$ l'errore è inferiore all'1%.

9. - Variazione della corrente al variare di L o di C. — Finora abbiamo esaminato il comportamento del circuito al variare della frequenza della d. d. p. impressa.

Spesso però, segnatamente nei circuiti riceventi r. t., accade che tale frequenza è imposta, ed allora si presenta l'opportunità di realizzare il massimo della corrente, oppure della tensione, in qualcuna delle parti del circuito, mediante opportune variazioni degli elementi di questo.

Per lo più l'elemento su cui si opera è la capacità; meno spesso si agisce sull'induttanza, anche perchè, in generale, le variazioni di induttanza si accompagnano con variazioni della resistenza (1).

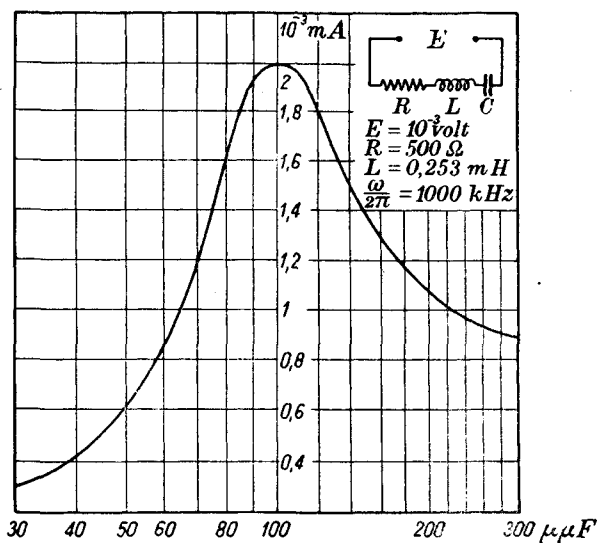



Fig. 55

Pertanto conviene esaminare come variano gli elementi funzionali elettrici (correnti, tensioni) del circuito al variare della capacità, ferme restando la tensione impressa E e la pulsazione ω_0.

Per quanto riguarda la corrente I, essa varierà da zero (per $C = 0$) ad un massimo I_{max} raggiungibile per quel valore C_0 della capacità pel quale la data pulsazione ω_0 soddisfa alla condizione:

$$L\omega_0 - \frac{1}{C_0\omega_0} = 0\,,$$

cioè per $C_0 = \frac{1}{L\omega_0^2}$; poi andrà indefinitamente decrescendo per valori di

(1) Non sempre però; chè anzi si possono realizzare, ad es. coi variometri (II, 9), delle induttanze variabili aventi resistenza costante.

C superiori a questo e tendenti all'infinito, come indicato nella curva indicata in fig. 55 (che si suol chiamare « curva di risonanza in funzione della capacità »).

Anche qui si ha che, con ogni valore C_1 della capacità $> C_0$, si realizza un valore di I, necessariamente minore della I_{max}, che si può pure realizzare con un secondo valore $C_2 < C_0$. Questi valori C_1 e C_2 sono tali che C_0 ne è la media *armonica*. Infatti da

$$L\omega_0 - \frac{1}{C_1\omega_0} = -\left(L\omega_0 - \frac{1}{C_2\omega_0}\right) \text{ (1)}$$

si ricava:

$$\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = 2L\omega_0^2 = \frac{2}{C_0}.$$

Lo scarto dC da C_0 occorrente per realizzare la diminuzione di I da I_{max} a $\frac{I_{max}}{n}$ si calcola imitando l'analogo procedimento del n. prec., e partendo da:

$$\mathbf{Z} + d\mathbf{Z} = \mathbf{Z} + j\frac{dC}{C_0^2\omega_0}.$$

Si trova così:

$$\frac{dC}{C_0} = \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{\varepsilon}.$$

Facendo $n = \sqrt{2}$, si deduce, con procedimento analogo a quello del n. prec., che dette $C_1 = C_0 + dC$, $C_2 = C_0 - dC$ (2) le capacità occorrenti per ridurre la corrente a $\frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$, il coefficiente di risonanza ε è dato da:

$$\varepsilon = \frac{2C_0}{C_1 - C_2} = \frac{C_1 + C_2}{C_1 - C_2},$$

dalla qual formola si deduce un metodo per ridurre la misura di ε a misure di capacità.

La tensione V_c ai capi del condensatore

$$V_c = \frac{E}{C\omega_0\sqrt{R^2 + \left(L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0}\right)^2}} = \frac{E}{\omega_0\sqrt{R^2C^2 + \left(LC\omega_0 - \frac{1}{\omega_0}\right)^2}}$$

sarà massima per quel valore di C per cui è:

$$R^2 + L^2\omega_0^2 = \frac{L}{C},$$

(1) Occorre premettere il segno negativo al secondo membro, perchè, essendo ω_0 pulsazione di risonanza del sistema L, C_0, ne segue che con capacità $C_1 > C_0$ la reattanza è positiva, con $C_2 < C_0$, negativa.

(2) Cfr. nota a pag. 95.

cioè, ricordando che si ha $LC_0\omega_0^2 = 1$,

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_0}\left(\frac{R^2C_0}{L} + 1\right) = \frac{1}{C_0}\left(1 + \frac{1}{\varepsilon^2}\right).$$

Quando, come spesso accade, interessa render massima la tensione V_C, si procede alla regolazione di C fino a raggiungere tale valore, ma è bene osservare che è inesatto dire che ciò corrisponde ad « accordare » o « sintonizzare » il circuito sulla pulsazione ω_0 impressa, perchè il valore della capacità corrispondente alla risonanza è C_0 e non C. Ed è sempre $C < C_0$.

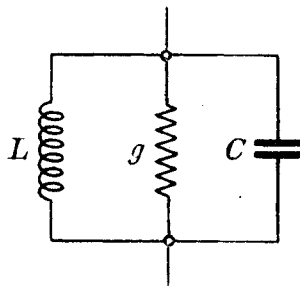
10. - Circuiti con resistenza, induttanza e capacità in parallelo. — Considerazioni e deduzioni del tutto analoghe a quelle svolte nei nn. 3 e segg. possono farsi per un sistema circuitale costituito con tre elementi g, C, L in parallelo (fig. 56).

Ma, a tal proposito, basta una osservazione fondamentale per consentirci di enunciare senz'altro, come faremo, i risultati, senza darne la dimostrazione.

Fig. 56

L'osservazione consiste semplicemente in ciò, che un sistema di tre elementi g, C, L in parallelo è *duale* (nel senso spiegato in I, 10) del sistema R, L, C in serie, e pertanto si può senz'altro asserire che tutto quanto è stato detto nei nn. prece. è valido pel sistema g, C, L, quando si abbia cura di sostituire ovunque ad ogni elemento il suo duale, quale risulta dalla nota tabella (I, 10).

Per maggiore chiarezza vogliamo mettere effettivamente a confronto una parte dei ragionamenti riguardanti i due casi, come segue:

L'equazione che governa il funzionamento di un sistema circuitale comprendente una resistenza R in serie con una induttanza L ed una capacità C, si ottiene scrivendo che in ogni istante è nulla la somma della f. e. m. $-L\frac{di}{dt}$ generata dalle variazioni della corrente i, con la f. e. m. $-Ri$ dovuta alla resistenza, con la tensione v ai capi di C, intesa positiva se, considerata come una f. e. m., tende a produrre cor-

L'equazione che governa il funzionamento di un sistema circuitale comprendente una conduttanza g in parallelo con una capacità C ed una induttanza L, si ottiene scrivendo che in ogni istante è nulla la somma delle tre correnti affluenti ai nodi, e cioè: la corrente $-C\frac{dv}{dt}$ generata dalle variazioni della tensione v ai nodi, con la $-gv$ del ramo resistente, e con la corrente i circolante in L, intesa positiva se co-

rente positiva, cioè:

$$L\frac{di}{dt} + Ri + v = 0 .$$

Siccome poi, detta q (funzione del tempo) la carica (¹) alle armature di C, si ha:

$$q = Cv ,$$

e quindi (tenuto conto delle convenzioni sui segni):

$$i = \frac{dq}{dt} = C\frac{dv}{dt} ,$$

la precedente può scriversi:

$$LC\frac{d^2q}{dt^2} + RC\frac{dq}{dt} + q = 0 ,$$

e sostituendo a q la tensione v ai capi di C, che ad essa è proporzionale, si vede che anche tale v soddisfa alla stessa equazione, cioè si ha:

$$LC\frac{d^2v}{dt^2} + RC\frac{dv}{dt} + v = 0 ,$$

ecc. ecc.

Nel caso in cui R è inferiore alla resistenza critica $R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, l'andamento di v è oscillatorio con pulsazione:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \omega_0\sqrt{1 - \left(\frac{R}{R_c}\right)^2},$$

essendo $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, e con smorzamento definito dalla costante di tempo $\frac{R}{2L}$ o dal decremento

$$\frac{RT}{2L} = \pi\frac{R}{L\omega} ,$$

spirante con la v ai nodi, cioè:

$$C\frac{dv}{dt} + gv + i = 0 .$$

Siccome poi, detto Φ (funzione del tempo) il flusso magnetico (¹) in L, si ha:

$$\Phi = Li ,$$

e quindi (tenuto conto delle convenzioni sui segni):

$$v = \frac{d\Phi}{dt} = L\frac{di}{dt} ,$$

la precedente può scriversi:

$$LC\frac{d^2\Phi}{dt^2} + gL\frac{d\Phi}{dt} + \Phi = 0 ,$$

e sostituendo a Φ la corrente i nel ramo L, che ad essa è proporzionale, si vede che anche tale i soddisfa alla stessa equazione, cioè si ha:

$$LC\frac{d^2i}{dt^2} + gL\frac{di}{dt} + i = 0 ,$$

ecc. ecc.

Nel caso in cui g è inferiore alla conduttanza critica $g_c = 2\sqrt{\frac{C}{L}}$, l'andamento di i è oscillatorio con pulsazione:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \omega_0\sqrt{1 - \left(\frac{g}{g_c}\right)^2} ,$$

essendo $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, e con smorzamento definito dalla costante di tempo $\frac{g}{2C}$ o dal decremento

$$\frac{gT}{2C} = \pi\frac{g}{C\omega} ,$$

(¹) q e Φ si intendono misurati in amperesec = coulomb e voltsec rispettivamente.

legato al « coefficiente di risonanza »

$$\varepsilon = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$$

dalla relazione:

$$\frac{\pi}{\delta} = \sqrt{\varepsilon^2 - \frac{1}{4}},$$

e così via.

legato al « coefficiente di risonanza »

$$\varepsilon = \frac{C\omega_0}{g} = \frac{1}{gL\omega_0}$$

dalla relazione:

$$\frac{\pi}{\delta} = \sqrt{\varepsilon^2 - \frac{1}{4}},$$

e così via.

Come si vede, per le grandezze che non hanno carattere elettrico, non mutano le reciproche relazioni, mentre le loro definizioni cambiano, dall'uno all'altro caso, secondo la legge generale di dualità. Così la pulsazione ω_0, che nel caso di sinistra è definita dalla condizione di annullamento della reattanza, nel caso di destra corrisponderà invece a quella di annullamento della suscettanza.

Il lettore, potrà, a titolo di utile esercizio, ripetere nel caso del sistema in parallelo le considerazioni fisiche, energetiche, ecc., contenute nei nn. prece., e lo studio del comportamento di un sistema g, C, L alimentato da una data *corrente* alternativa di frequenza variabile, considerazioni e studio che è assai utile aver presenti per le applicazioni, nelle quali ricorrono molto più frequentemente i sistemi in parallelo che quelli in serie.

In particolare, si avrà che il coefficiente di risonanza dà una misura della selettività del sistema, cioè della sua attitudine a presentare un maggiore o minore scarto fra la ammettenza per la pulsazione di risonanza ω_0 e quella per pulsazione ω diversa, cioè a determinare un più o meno sentito massimo di tensione ai capi, intorno alla pulsazione ω_0. Precisamente, lo scarto relativo di frequenza occorrente per realizzare la riduzione ad $\frac{1}{n}$ della tensione ai capi, quando n sia abbastanza grande, è

$$\cong \frac{n}{2\varepsilon}.$$

Al coefficiente di risonanza spetta il significato di coefficiente di *sovracorrente* nei rami L e C rispetto a quella del ramo g, in corrispondenza della pulsazione ω_0, nonchè quello di $\operatorname{tg}\varphi$, essendo φ l'angolo della ammettenza costituita, alla pulsazione ω_0, da ciascuno dei due sistemi g, C e g, L; oppure ancora quello di rapporto della *ammettenza caratteristica* $\sqrt{\frac{C}{L}}$ alla conduttanza g.

Se L è variabile, ogni valore di $v < v_{max}$ ai capi del sistema che può ottenersi con un $L_1 > L_0$, può anche ottenersi con un $L_2 < L_0$, essendo $CL_0\omega_0^2 = 1$, e tali L_1, L_2 hanno L_0 per media armonica, ecc.

È particolarmente interessante osservare che per un sistema siffatto

si possono costruire delle *curve di risonanza*, le quali non differiscono minimamente da quelle considerate nei nn. prec., salvo il mutamento dei simboli riferentisi a grandezze di carattere non elettrico. In particolare, nella curva universale di fig. 53 occorrerà interpretare le ordinate come rapporti fra la tensione alla pulsazione generica e quella relativa alla risonanza, mentre nulla muta di quanto si riferisce alle grandezze ivi indicate con ε, ω_0, σ, x.

11. - Caratterizzazione di un circuito serie (o parallelo) mediante ε, ω_0, ed R (o g). — Prima di lasciare queste considerazioni generali, vogliamo osservare che un sistema in serie, o in parallelo, il quale è sempre definito dai valori delle sue tre costanti circuitali R, L, C, rispettivamente g, L, C, può ritenersi altrettanto bene indentificato da tre numeri dai quali sia possibile risalire alle costanti stesse.

Orbene, per due di questi si possono sempre assumere la pulsazione ω_0 ed il coefficiente di risonanza ε, ottenendosi così il vantaggio di avere a che fare con elementi i quali, avendo carattere *non elettrico* (ω_0 misura l'inversa di un tempo ed ε è un numero), sono tali da adattarsi tanto all'uno quanto all'altro caso, *salvo*, ben inteso, *il diverso significato della nozione di risonanza*. Come terzo elemento, che deve necessariamente avere carattere elettrico, può assumersi l'elemento circuitale dissipativo, cioè la R (rispettivamente g) oppure la resistenza caratteristica $\sqrt{\frac{L}{C}}$ $\left(\text{rispettivamente la conduttanza } \sqrt{\frac{C}{L}}\right)$.

Dati ε, ω_0 ed R, rispettivamente g, è facile dedurre i valori di L e C. E precisamente, nel caso del sistema in serie, si ha:

$$L = \frac{R\varepsilon}{\omega_0}, \quad C = \frac{1}{\varepsilon\omega_0 R},$$

e nel caso del sistema in parallelo:

$$C = \frac{g\varepsilon}{\omega_0}, \quad L = \frac{1}{\varepsilon\omega_0 g}.$$

12. - Sistema costituito da capacità e induttanza in parallelo, con resistenze in serie in uno o in entrambi i rami. — In pratica, per le ragioni spiegate al Cap. II, non possono realizzarsi sistemi di costituzioni corrispondenti a quelle tipiche considerate; perchè non è possibile realizzare induttanze o capacità senza la presenza di resistenze. E se tuttavia talvolta, specialmente se si opera con frequenze non molto elevate, si può, con discreta approssimazione, ritenere di aver a che fare con capacità pure, altrettanto non può pensarsi per le induttanze. Finchè si

tratta dello studio di circuiti con gli elementi R, L, C in serie, la relativa trattazione non si scosta da quella generale dianzi esposta; soltanto viene a mancare la possibilità di pensare la L separata dalla R, ed altrettanto potrebbe farsi anche per circuiti con elementi in parallelo. Se non chè, il fatto che la induttanza è necessariamente accompagnata da una resistenza, fa sì che occorre in generale ritenere i valori della conduttanza g' ed induttanza L', equivalenti ad una data induttanza effettiva — cioè costituita da R, L in serie —, dipendenti essenzialmente dalla frequenza con cui si opera, secondo le note formole:

$$g' = \frac{R}{R^2 + L^2\omega^2}, \qquad L' = \frac{R^2 + L^2\omega^2}{L\omega^2}.$$

Specialmente nelle applicazioni r. t., sistemi di tale tipo si presentano con valori di R notevolmente inferiori ad $L\omega$, essendo ω la pulsazione di lavoro, e siccome questa è prossima — anzi spesso addirittura uguale — a quella definita da $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, ciò equivale a dire che il sistema, considerato composto degli elementi R, L, C *in serie*, ha elevato il coefficiente di risonanza

$$\varepsilon = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

L'alimentazione di un tale sistema potrà esser fatta direttamente, cioè mediante applicazione ai nodi A e B di una certa d. d. p. (alternativa) costante $\mathbf{E}$, oppure, come indicato in fig. 57, mediante l'interposizione di una impedenza $\mathbf{Z}_1$ (che potrebbe p. es. essere l'impedenza interna del generatore di f. e. m. $\mathbf{E}$), nel qual caso la tensione ai nodi stessi sarà $\mathbf{E} - \mathbf{Z}_1\mathbf{I}$, essendo $\mathbf{I}$ la corrente nel ramo principale.

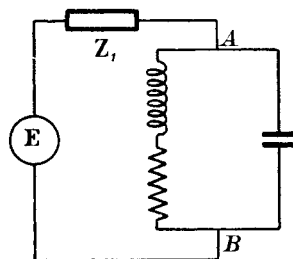
Fig. 57

La suscettanza complessiva del sistema può risultare nulla, e precisamente ciò si verifica per la pulsazione ω_r definita da

$$(18) \qquad \omega_r^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2} = \frac{1}{LC}\left(1 - \frac{R^2C}{L}\right) = \frac{1}{LC}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon^2}\right).$$

Come si vede, essa, per ε sufficientemente elevato, coincide sensibilmente con la pulsazione di risonanza ω_0 del sistema L, C.

In tali condizioni, il sistema dato si riduce ad equivalere ad una pura resistenza, il cui valore R_0 è

$$R_0 = \frac{L}{RC} = R\varepsilon^2,$$

quindi cresce rapidamente, a parità di R, coll'aumentare dell'acutezza di risonanza.

Ad es., per il circuito considerato al n. 7, in cui $R = 5\ \Omega$, la disposizione di C in parallelo con R, L adduce ad $R_0 = 50\,000\ \Omega$.

Se R fosse addirittura nulla, il sistema si ridurrebbe ad equivalere ad una pura reattanza, che per $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ è infinitamente grande: esso costituisce allora quello che si chiama un *circuito d'arresto* per tale pulsazione che, giova ripeterlo, è quella per la quale lo stesso sistema, considerato in serie, presenta reattanza nulla.

In tale caso si realizza ovviamente il massimo valore della impedenza fra A e B. Ma se R non è nulla, la pulsazione ω_r dianzi definita non è quella cui corrisponde la massima impedenza fra A e B (e quindi la massima tensione qualora sia assegnata la corrente di linea). Si potrebbe però facilmente dimostrare che tale pulsazione vale:

$$\frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{\sqrt{1+\frac{2}{\varepsilon^2}}-\frac{1}{\varepsilon^2}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{1+\frac{1}{\varepsilon^2}-\frac{1}{2\varepsilon^4}+\ldots-\frac{1}{\varepsilon^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{LC}}\left(1-\frac{1}{4\varepsilon^4}+\ldots\right) \text{ [1]},$$

e quindi la sua differenza relativa rispetto ad ω_0 è dell'ordine della quarta potenza di $\frac{1}{\varepsilon}$. Scostandosi, in un senso o nell'altro, da tale pulsazione, l'impedenza decresce, e tanto più rapidamente quanto maggiore è ε.

A identici risultati si perviene supponendo che la resistenza R sia invece localizzata nel ramo contenente la capacità.

---

[1] Infatti il valore (complessivo) dell'inversa di tale impedenza è:

$$\frac{1}{R+jL\omega}+jC\omega = \frac{1}{R}\left(\frac{1}{1+j\varepsilon\sqrt{x}}+j\frac{\sqrt{x}}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{R}\,\frac{1-x+j\dfrac{\sqrt{x}}{\varepsilon}}{1+j\varepsilon\sqrt{x}}$$

con $x = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = \omega^2 LC$. Trascurando il fattore costante $\frac{1}{R}$, si ha dunque da render minimo il modulo del complesso a terzo membro, il cui quadrato è

$$\frac{(1-x)^2+\dfrac{x}{\varepsilon^2}}{1+\varepsilon^2 x}.$$

Annullando la derivata rispetto ad x, si trova l'equazione

$$x^2+\frac{2x}{\varepsilon^2}-1-\frac{2}{\varepsilon^2}+\frac{1}{\varepsilon^4}=0,$$

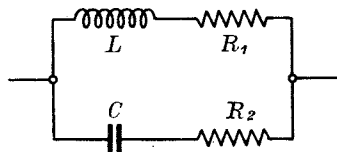
la cui radice positiva è $\sqrt{1+\frac{2}{\varepsilon^2}}-\frac{1}{\varepsilon^2}$.

Se, più generalmente, si suppone che ciascuno dei rami L e C contenga in serie una resistenza, di rispettivi valori R_1, R_2, un tale sistema (fig. 58) equivale ad una impedenza $\mathbf{Z}$ la cui espressione è:

$$\mathbf{Z} = \frac{(R_1 + jX_1)(R_2 + jX_2)}{(R_1 + R_2) + j(X_1 + X_2)},$$

Fig. 58

avendo posto:

$$X_1 = L\omega, \quad X_2 = -\frac{1}{C\omega}.$$

Moltiplicando i due termini della precedente per il complesso coniugato del denominatore, si ottiene:

$$\mathbf{Z} = \frac{(R_1 + R_2)(R_1R_2 - X_1X_2) + (X_1 + X_2)(R_1X_2 + R_2X_1)}{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2} +$$
$$+ j\,\frac{(X_1 + X_2)(X_1X_2 - R_1R_2) + (R_1 + R_2)(R_1X_2 + R_2X_1)}{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2}.$$

Al numeratore del coefficiente di j (valore della reattanza) si può dare l'aspetto:

$$X_1X_2 \left\{ X_1\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_1^2}\right) + X_2\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_2^2}\right) \right\},$$

dove si è posto:

$$\varepsilon_1 = \frac{X_1}{R_1}, \quad \varepsilon_2 = -\frac{X_2}{R_2}.$$

La pulsazione ω_r per la quale tale reattanza si annulla è prossimamente quella per cui è $X_1 + X_2 = 0$, cioè quella definita da $LC\omega_0^2 = 1$, se, come qui vogliamo supporre, per tale pulsazione i rapporti ε_1, ε_2 sono sufficientemente grandi, talchè gli inversi dei loro quadrati si possano trascurare di fronte all'unità (¹). Tali rapporti potranno così intendersi rappresentare i « coefficienti di risonanza » dei due rami.

In tali condizioni, $\mathbf{Z}$ si riduce ad equivalere ad una pura resistenza, il cui valòre R_0 è dato dall'espressione:

$$R_0 = \frac{R_1R_2 - X_1X_2}{R_1 + R_2} \cong -\frac{X_1X_2}{R_1 + R_2} = \frac{L}{C(R_1 + R_2)},$$

cui può ancora darsi la forma:

$$R_0 = \frac{L}{RC} = R\varepsilon^2,$$

(¹) In effetto, tali ε_1 ed ε_2 equivalgono alle tangenti degli argomenti delle impedenze dei due rami, che, quando sono sufficientemente grandi, coincidono sensibilmente con gli inversi degli « angoli di perdita » misurati in radianti, o, il che equivale, dei fattori di potenza dei rami stessi.

intendendo per R la resistenza totale $R_1 + R_2$ e attribuendo (quindi) al coefficiente di risonanza del sistema il valore ε fornito dalla relazione:

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2},$$

e che corrisponde effettivamente al coefficiente di risonanza dell'intero circuito considerato composto degli elementi R_1, R_2, L, C in serie, conformemente alla formola di definizione $\varepsilon = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Si conclude pertanto che, quando ε_1 ed ε_2 siano convenientemente elevati, le resistenze possono pensarsi raccolte in uno solo dei due rami.

13. - Resistenza e reattanza in serie equivalenti ai sistemi del n. prec. — Dei sistemi qui considerati, che, sotto le riserve or ora enunciate, possono pensarsi costituiti da una reattanza pura in parallelo con una reattanza di opposto segno e accompagnata da resistenza, conviene valutare gli elementi dell'equivalente sistema serie, cioè calcolare i valori della parte reale R_1 e del coefficiente d'immaginario X_1 della espressione corrispondente alla impedenza **Z**.

Ritenendo la resistenza localizzata nel ramo induttivo, costituito da R, L in serie, basta scrivere:

$$\frac{1}{R_1 + jX_1} = \frac{1}{R + jL\omega} + jC\omega,$$

e risolvere rispetto ad R_1 ed X_1. Posto il secondo membro sotto l'equivalente forma:

$$\frac{1}{R + jL\omega} - \frac{1}{\dfrac{j}{C\omega}} = \frac{R + j\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)}{\dfrac{L}{C} - j\dfrac{R}{C\omega}},$$

si ha

$$R_1 + jX_1 = \frac{\dfrac{L}{C} - j\dfrac{R}{C\omega}}{R + j\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)},$$

da cui, moltiplicando numeratore e denominatore pel coniugato di quest'ultimo si ricava subito

$$(19) \qquad R_1 = \frac{R}{C^2\omega^2\left[R^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2\right]}, \qquad X_1 = \frac{\dfrac{L}{C^2\omega^2} - \dfrac{L^2\omega}{C} - \dfrac{R^2}{C\omega}}{R^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2}.$$

In vista di future applicazioni, giova studiare come varia la X_1 al variare di ω. Per lo scopo, posto per brevità:

$$a = 1 - \frac{1}{\varepsilon^2}, \tag{20}$$

con che, conformemente alla (18), si ha

$$\omega_r^2 = \frac{a}{LC},$$

introduciamo, in luogo della pulsazione generica ω, il parametro x ad essa legato da

$$x = \frac{\omega^2 - \omega_r^2}{\omega_r^2}, \tag{21}$$

cioè poniamo

$$\omega^2 = \omega_r^2(1 + x) \quad \text{da cui} \quad \omega = \omega_r\sqrt{1 + x}. \tag{21'}$$

Se nella espressione di X_1 sostituiamo ad ω ed R^2 i loro valori $\omega_0\sqrt{1+x}$ e $\frac{L}{C} - L^2\omega_r^2$, otteniamo, con facili passaggi:

$$X_1 = -aL\omega_r \frac{x}{\sqrt{1+x}\left(a^2x + \frac{1}{1+x} - a\right)}, \tag{22}$$

espressione abbastanza comoda pel calcolo effettivo dei valori di X_1 per ogni dato x, cioè per ogni data pulsazione. Si noti che alle pulsazioni comprese fra 0 ed ω_r e fra ω_r e ∞ corrispondono i valori di x fra -1 e 0, rispettivamente fra 0 e infinito.

La (22) mette chiaramente in evidenza che la reattanza X_1 si annulla non solo, come già sapevamo, per $x = 0$ (cioè per $\omega = \omega_r$), ma anche per $x = -1$ (cioè per $\omega = 0$) e per $x \to \infty$ cioè per $\omega \to \infty$ [1], il che del resto è fisicamente evidente se si pensa alla struttura del dato sistema circuitale. La X_1 è inoltre sempre positiva per $x < 0$, cioè per pulsazioni inferiori ad ω_r, e negativa per $x > 0$ ($\omega > \omega_r$). Tale reattanza passa dunque dai valori positivi ai negativi in corrispondenza alla pulsazione ω_r, ed è chiaro che essa raggiungerà un massimo per una conveniente $\omega < \omega_r$ ed un minimo per una certa $\omega > \omega_r$.

Vogliamo qui calcolare tali massimi e minimi nonchè i valori delle pulsazioni a cui esse si verificano.

---

[1] Per x molto grande, il denominatore della frazione vale sensibilmente $a^2x\sqrt{x}$, quindi si ha $X_1 \cong -\frac{L\omega_r}{a\sqrt{x}}$ e pertanto $\lim_{x\to\infty} X_1 = 0$.

Uguagliando a zero la derivata della frazione a secondo membro della (22), si trova per x l'equazione:

$$-a^2x^3 - x^2(a^2 + a) + 3x(1 - a) + 2(1 - a) = 0 .$$

Siccome il primo membro di questa equazione di terzo grado presenta variazione di segno agli estremi di ognuno degli intervalli $(-\infty, -1)$, $(-1,0)$, $(0,1)$, essa avrà tre radici reali di cui una < -1 cui non corrisponde alcuna pulsazione reale, e le altre due comprese tra -1 e 0, fra 0 ed 1 rispettivamente, e sono quelle cui corrispondono i massimi e minimi cercati. Per mettere i valori di tali radici in relazione col coefficiente di risonanza ε, conviene cercare di soddisfare l'equazione stessa con una serie procedente per le potenze di $\frac{1}{\varepsilon}$, cioè con

$$x = m_0 + \frac{m_1}{\varepsilon} + \frac{m_2}{\varepsilon^2} + \frac{m_3}{\varepsilon^3} + \ldots$$

Con la effettiva sostituzione, e ricordando il valore (20) di a, si calcolano successivamente i valori dei coefficienti m_0, m_1, m_2, m_3, ... e così si trova che il massimo ed il minimo si verificano per i seguenti valori di x:

$$-\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{3\varepsilon^2} - \frac{11}{8\varepsilon^3} + \ldots \text{ (massimo)},$$

$$\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2\varepsilon^2} + \frac{5}{8\varepsilon^3} + \ldots \text{ (minimo)},$$

talchè, trascurando in prima approssimazione i termini in $\frac{1}{\varepsilon^2}$ in confronto a quelli in $\frac{1}{\varepsilon}$, si può ritenere che la massima e minima reattanza si verifichino per $x = \pm \frac{1}{\varepsilon}$, cioè per

$$\omega = \omega_r \sqrt{1 \pm \frac{1}{\varepsilon}} \cong \omega_r \left(1 \pm \frac{1}{2\varepsilon}\right).$$

I valori assoluti di tali massima e minima reattanza, negli stessi limiti di approssimazione, coincidono, ed il loro comune valore è:

$$\frac{aL\omega_r}{\varepsilon\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{a^2}{\varepsilon} + \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1} - a\right]} ,$$

che, sostituendo ad a il suo valore, sviluppando in serie $\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}$ e $\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1}$ e conservando, nel denominatore, i soli termini di minor grado

in $\frac{1}{\varepsilon}$, si riduce ad $\frac{aL\omega_r\varepsilon}{2} \backsimeq \frac{L\omega_r\varepsilon}{2}$, sensibilmente uguale alla metà del valore della resistenza spettante alla pulsazione ω_r (1).

La variazione del valore di R_1 al variare della frequenza è fornita dalla prima delle (19), che converrà trasformare per farvi comparire, in luogo di ω, il rapporto x definito dalla (21). Con le solite sostituzioni per ω ed R^2, un semplice calcolo conduce a

$$R_1 = \frac{R}{a^2x(1+x) - a(1+x) + 1},$$

dalla quale si vede subito che per $x = 0$ ($\omega = \omega_r$) si ha $R_1 = \frac{R}{1-a} = R\varepsilon^2 = \frac{L}{RC}$; per $x = \pm \frac{1}{\varepsilon}$, cioè per le pulsazioni di massima e minima reattanza; la resistenza, trascurando le potenze di $\frac{1}{\varepsilon}$ superiori alla seconda, vale $R_1 = \frac{R\varepsilon^2}{2}$; essa uguaglia quindi il valore assoluto della reattanza X_1, e pertanto l'angolo di sfasamento fra la corrente totale e la tensione ai capi è di $\pm 45^\circ$, e l'impedenza $\sqrt{R_1^2 + X_1^2}$ riesce uguale alla massima resistenza $\frac{L}{RC}$ divisa per $\sqrt{2}$ (2).

La fig. 59 (v. pag. seg.) mostra il diagramma di R_1 ed X_1 in funzione della frequenza per un circuito rispondente ai seguenti dati:

$R = 12{,}7\ \Omega$, $L = 253\ \mu\text{H}$, $C = 100\ \mu\mu\text{F}$, $\omega_r = 2\pi \cdot 10^6$, $\varepsilon = 125$.

14. — Sistemi circuitali derivabili dai precedenti. — Nelle applicazioni si incontrano spesso circuiti analoghi a quelli considerati nei precc. nn. 11 e 12, in cui però gli elementi reattivi sono diversamente localizzati; precisamente tali che, mentre un ramo contiene sola induttanza (capacità). l'altro contiene capacità con induttanza.

Lo studio di tali sistemi si fa agevolmente immaginandoli dedotti da altri del tipo descritto nel n. 11, mediante divisione di uno dei due rami in due parti, dello stesso tipo, disposte in serie, e supponendo che una delle due parti venga poi portata nell'altro ramo. Potrà cioè pensarsi che l'induttanza L venga divisa in due induttanze L_1 ed L_2 tali

(1) Tale resistenza vale $\frac{L}{CR} = L\omega_0\varepsilon$ con $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; quindi differisce da $L\omega_r\varepsilon$ pel fattore $1 - \frac{1}{\varepsilon^2}$ che, nei limiti d'approssimazione in cui ci siamo posti, può ritenersi uguale all'unità.

(2) Si noti l'analogia di questi risultati con quelli relativi al caso dei circuiti ideali in parallelo a tre rami, quali possono dedursi leggendo dualmente quelli esposti al n. 9.

che sia $L_1 + L_2 = L$ [1], oppure la capacità C in due capacità C_1, C_2 tali che sia $\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{C}$ (fig. 60, *a*) talchè il circuito modificato si presenterà come in fig. *b*), rispettivamente *c*), dove con A, B sono indicati i capi del circuito stesso, mentre pel circuito originario tali capi sono M, N.

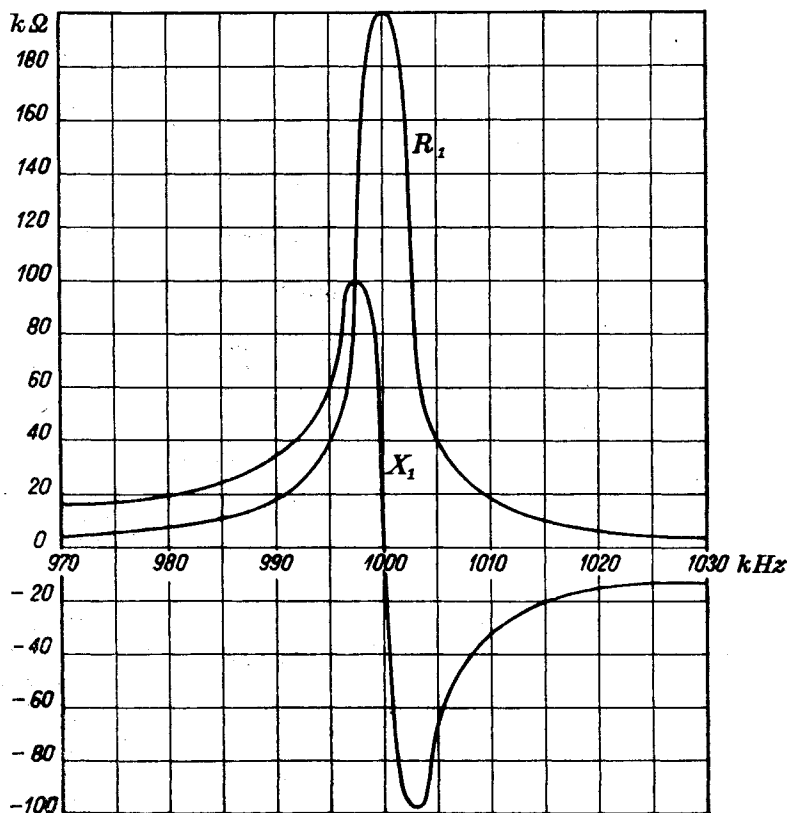



Fig. 59

Se, come al solito, riteniamo sufficientemente elevato il coefficiente di risonanza ε del sistema costituito da tutti gli elementi in serie (cioè R, L_1, L_2, C nel primo caso, R, L, C_1, C_2 nel secondo, essendo R il complessivo valore delle resistenze presenti nei due rami), si avrà che la pul-

[1] Ciò equivale a supporre che sia nullo il coefficiente di mutua induzione M fra le due parti L_1 ed L_2 in cui vien divisa l'induttanza. Successivamente (n. 27) vedremo che, ove sia $M \neq 0$, i risultati si modificano soltanto in ciò, che ad L_1, L_2 bisogna pensare sostituiti $L_1 + M$, $L_2 + M$.

sazione di risonanza ω_r risulterà approssimativamente inalterata rispetto al sistema di partenza contenente L_1, L_2 in un ramo e C_1, C_2 nell'altro, ma la resistenza R_e equivalente al complesso per $\omega = \omega_r$ varierà, e precisamente in modo proporzionale al quadrato della variazione intervenuta nella reattanza di ciascun ramo. Diciamo « reattanza di ciascun ramo » perchè è chiaro che avendosi (approssimativamente) $L\omega_r = \frac{1}{C\omega_r}$, risulterà anche $L_1\omega_r = \frac{1}{C\omega_r} - L_2\omega_r \left(\text{rispettivamente } \frac{1}{C_1\omega_r} = L\omega_r - \frac{1}{C_2\omega_r}\right)$. Per convincersene, basta pensare che la resistenza equivalente R_e può rappresentarsi con

$$\frac{(L_1\omega_r)^2}{R} \quad \text{rispettivamente} \quad \frac{1}{R(C_1\omega_r)^2},$$

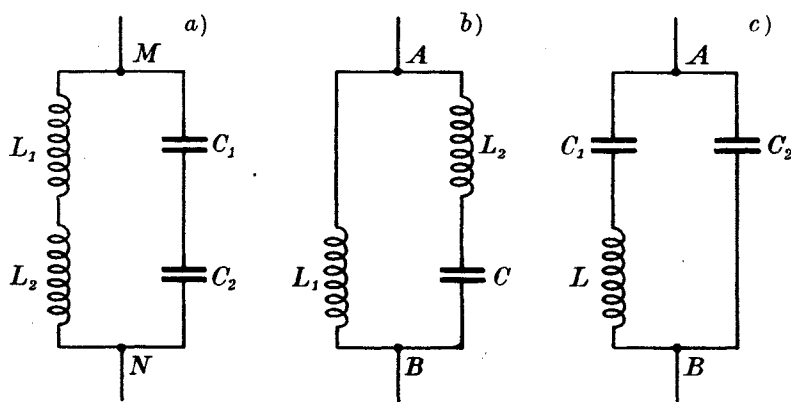



Fig. 60

e che le accennate modificazioni non alterano nè la totale R, nè la pulsazione ω_r (1).

Non bisogna però credere che il coefficiente di risonanza del nuovo sistema si possa considerare coincidente con quello del primitivo, in quanto che con le accennate modificazioni si sono sostanzialmente costruiti due circuiti, il primo dei quali equivale ad uno con una induttanza L_1 ed una capacità $\frac{C}{1 - L_2C\omega_r^2} = C\frac{L_1 + L_2}{L_2}$ e l'altro ad uno con una capacità C_2 ed una induttanza $L - \frac{1}{C_1\omega_r^2} = L\frac{C_2}{C_1 + C_2}$: entrambi i rami

(1) Si perviene allo stesso risultato se si considera la espressione $\frac{L}{RC}$ di R_e. Bisogna allora pensare che, ad es., la prima delle accennate modificazioni equivalga ad avere costituito un ramo con l'induttanza L_1 e l'altro con la capacità $C - \frac{1}{L_2\omega_r^2}$.

presentano dunque, alla risonanza, induttanza e capacità ridotte, rispetto alle primitive, secondo il rapporto $\frac{L_1}{L}$ nel primo caso e $\frac{C}{C_1}$ nel secondo. Tali riduzioni adducono ad una riduzione secondo lo stesso rapporto dell'*effettivo* coefficiente di risonanza (definito come al n. 10) e conseguentemente, essendo invariata la resistenza effettiva R, la resistenza equivalente viene ridotta secondo il quadrato dello stesso rapporto, come sopra si è veduto.

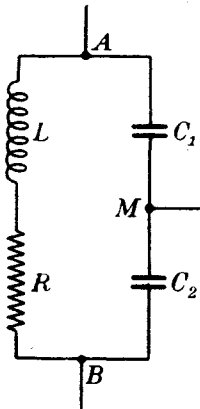



Fig. 61

Se però ad ε si conserva il significato di coefficiente di risonanza del sistema formato con *tutti* gli elementi disposti in serie, si può dire che il sistema modificato, presenta, rispetto al primitivo, le stesse curve di risonanza (cioè gli stessi diagrammi di resistenza e reattanza in funzione della frequenza), salvo riduzione delle ordinate nel rapporto $\frac{L_1}{L}$, rispettivamente $\frac{C}{C_1}$.

Sistemi siffatti sono largamente usati nelle applicazioni radiotecniche quando occorra alimentare un circuito del tipo *a*) con una tensione inferiore a quella effettivamente richiesta ai suoi capi, o viceversa quando da un tale circuito occorra ricavare una tensione minore di quella esistente ai suoi capi.

Il rapporto fra le tensioni MN ed AB corrisponde ad $\frac{L}{L_1}$, rispettivamente $\frac{C}{C_1}$, e, poichè, a parità di correnti nei rami, la potenza in giuoco è la stessa, il rapporto fra le correnti alimentatrici sarà inverso di quello fra le tensioni, onde resta confermato che la resistenza equivalente (rapporto fra tensione ai capi e corrente alimentatrice) varia secondo il quadrato dello stesso rapporto.

Tali sistemi, nel caso *b*), corrispondono, come agevolmente si comprende, agli ordinari autotrasformatori.

A titolo di esempio, si consideri il sistema di fig. 61 costituito da una bobina di 200μH e da un gruppo di due condensatori in serie, e supponiamo che per esso sia $\varepsilon = 100$, $\omega_r = 5 \cdot 10^6$. La resistenza equivalente R_e misurata fra i terminali A e B si calcola agevolmente: essendo $L\omega = 10^3\Omega$, sarà $R = \frac{L\omega}{\varepsilon} = 10\Omega$, e quindi $R_e = 10 \cdot 100^2 = 10^5\Omega$. La capacità complessiva del ramo capacitivo si calcola mediante la

$$C = \frac{1}{L\omega^2} = 0{,}2 \cdot 10^{-9}\text{F}\,.$$

Si voglia costituire il ramo stesso con due condensatori C_1, C_2 in serie in guisa tale che tra i terminali di C_1 il sistema presenti una resistenza equivalente $R'_e = 15\,000\Omega$. Se con ε' si indica il coefficiente di risonanza di tale sistema, dovrà risultare:

$$R'_e = R\varepsilon'^2, \quad \text{quindi} \quad \varepsilon' = \sqrt{\frac{R'_e}{R}} = 38{,}73\,,$$

dopo di che, da

$$\frac{1}{C_1 \omega R} = \varepsilon'\,,$$

si deduce subito $C_1 = \dfrac{1}{\varepsilon' \omega R} = \dfrac{1}{1937 \cdot 10^6}\,\text{F} = 516\,\mu\mu\text{F}$. La capacità C_2 del secondo condensatore si calcolerà, in $\mu\mu$F, mediante

$$\frac{1}{200} = \frac{1}{516} + \frac{1}{C_2}, \quad \text{donde} \quad C_2 = 327\,\mu\mu\text{F}\,.$$

Se ai terminali A ed M si applica ad es. una tensione di 1000 V, la tensione fra A e B sarà di $1000 \cdot \dfrac{516}{200} = 2580$ V, ed altrettanta sarà la tensione ai capi della bobina, in opposizione di fase rispetto a quella. La corrente assorbita alimentando fra A ed M sarà di $\dfrac{1000}{15000} = 0{,}0666\,A$, e la corrente in ciascun ramo sarà ε' volte maggiore, cioè $0{,}0666 \cdot 38{,}73 = 2{,}58$ A.

Alimentando invece fra A e B, per ottenere le stesse condizioni di funzionamento bisognerà applicare 2580 volt, la corrente assorbita sarà di $\dfrac{2580}{R_e} = 0{,}0258$ A e la corrente in ciascun ramo sarà, come dianzi, di 2,58 A. La potenza in giuoco è sempre quella che viene dissipata nella resistenza effettiva $R = 10\Omega$ percorsa da 2,58 A, cioè $10 \cdot 2{,}58^2 = 66$ watt. Nel primo caso essa viene fornita con una corrente di 0,066 A a 1000 V, nel secondo caso con 0,0258 A a 2580 V ($1000 \cdot 0{,}066 = 0{,}0258 \cdot 2580 = 66$).

Riassumendo e generalizzando ancora, si può asserire che se un sistema costituito da due rami in parallelo di impedenze $R_1 + jX$, $R_2 - jX$ (cioè tali che, per una data pulsazione ω_r sia nulla la somma delle reattanze, vale a dire che, considerato come sistema serie, sia risonante rispetto ad ω_r) e se i rapporti $\dfrac{R_1}{X}$, $\dfrac{R_2}{X}$ sono abbastanza piccoli perchè il loro prodotto sia trascurabile rispetto all'unità, il sistema stesso alla pulsazione ω_r equivale ad una resistenza, il cui valore R_r è sempre dato dall'espressione

$$R_e = \frac{X^2}{R_1 + R_2}\,.$$

Ciò si vede immediatamente calcolando l'impedenza complessiva il cui modulo ovviamente è

$$\frac{R_1R_2 + X^2}{R_1 + R_2} = \frac{X^2}{R_1 + R_2}\left(1 + \frac{R_1R_2}{X^2}\right),$$

e quindi, nei posti limiti di approssimazione, equivale all'espressione dianzi scritta.

15. - Selettività dei circuiti precedenti. - Artifici per modificarla. — Anche nel caso considerato nei nn. prece. si può definire, in modo analogo al caso di n. 7, la selettività, come rapporto fra la frequenza corrispondente al massimo dell'impedenza — o minimo dell'ammettenza — e lo scarto occorrente per realizzare un *dato* aumento della ammettenza stessa, per es. secondo il rapporto 1 : n.

Se, per semplificare, supponiamo che ε sia sufficientemente grande, sì che la pulsazione di massima impedenza coincida sensibilmente con $\frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$, e riteniamo che, per una ω diversa, si possa, nella espressione dell'ammettenza, trascurare la conduttanza rispetto alla suscettanza, si avrà, assimilando i differenziali alle variazioni:

$$\mathbf{Y}_0 = \frac{CR}{L}, \quad d\mathbf{Y} = j\left(C + \frac{1}{L\omega_0^2}\right)d\omega,$$

da cui, per essere $LC\omega_0^2 = 1$:

$$\mathbf{Y}_0 + d\mathbf{Y} = \frac{CR}{L} + 2jCd\omega,$$

il quadrato del cui modulo vale:

$$Y_0^2\left(1 + 4\frac{L^2}{R^2}d\omega^2\right) = Y_0^2\left\{1 + \frac{4L^2\omega_0^2}{R^2}\left(\frac{d\omega}{\omega_0}\right)^2\right\} = Y_0^2\left\{1 + 4\varepsilon^2\left(\frac{d\omega}{\omega_0}\right)^2\right\}.$$

Uguagliando tale espressione ad $n^2Y_0^2 = n^2\frac{C^2R^2}{L^2}$ e risolvendo rispetto a $\frac{d\omega}{\omega_0}$, si ottiene:

$$\frac{d\omega}{\omega_0} = \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{2\varepsilon},$$

donde, per la cercata selettività, si deduce lo stesso valore

$$\cong \frac{2\varepsilon}{n}$$

trovato nei casi tipici dei circuiti in serie ed in parallelo.

Del fatto che l'impedenza di un circuito in parallelo ad elevato coefficiente ε decresce rapidamente coll'allontanarsi dalla pulsazione di risonanza ω_r, si può trarre partito per migliorare la selettività di un circuito del tipo R, L, C in serie, mediante l'artificio di disporre in derivazione su di esso un sistema del tipo in parallelo, avente un elevato coefficiente di risonanza ε, e regolato in guisa che la sua ω_r coincida con la pulsazione di risonanza del primo. Invero, così facendo, si ha che, per $\omega = \omega_r$, il rapporto della impedenza del secondo sistema a quello del primo risulta grandissimo, mentre, scostandosi da ω_r, tale rapporto decresce rapidamente; e pertanto, supposto tutto il gruppo alimentato ad intensità costante, oppure anche da un generatore a tensione costante, ma attraverso una precedente impedenza (¹) — che potrà essere anch'essa accordata sulla stessa pulsazione —, la corrente che percorre il primo ramo risente delle variazioni di pulsazione in misura assai diversa di quel che avverrebbe in assenza del secondo, il che appunto equivale a dire che si è variata la selettività del primo ramo.

Consideriamo ad es. il secondo caso, e siano R_1, L_1, C_1 gli elementi della prima impedenza, R_2, L_2, C_3 quelli della seconda, R_0, L_0, C_0 quelli della impedenza attraverso la quale il generatore alimenta il sistema (fig. 62).

Fig. 62

Ponendo:

$$X_0 = L_0\omega - \frac{1}{C_0\omega}, \quad X_1 = L_1\omega - \frac{1}{C_1\omega}, \quad \mathbf{Z}_0 = R_0 + jX_0, \quad \mathbf{Z}_1 = R_1 + jX_1,$$

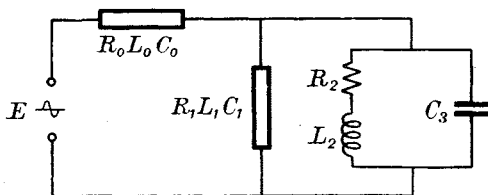
$$X_2 = L_2\omega, \quad \mathbf{Z}_2 = R_2 + jX_2 = \frac{1}{g_2 - jb_2}, \quad jX_3 = -\frac{j}{C_3\omega} = \frac{1}{jC_3\omega},$$

si ha per l'impedenza totale del circuito l'espressione:

$$\mathbf{Z}_0 + \mathbf{Z} \quad \text{con} \quad \frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{1}{\mathbf{Z}_1} + \frac{1}{\mathbf{Z}_2} + \frac{1}{jX_3}.$$

Dividendo la tensione $\mathbf{E}$ del generatore per tale $\mathbf{Z}_0 + \mathbf{Z}$ si otterrà la corrente totale; questa, moltiplicata per $\mathbf{Z}$, darà la tensione ai capi di $\mathbf{Z}_1$, e dividendo finalmente questa per $\mathbf{Z}_1$ si avrà la corrente nel ramo *1*. Tale corrente equivale dunque al rapporto di $\mathbf{E}$ a:

$$\frac{\mathbf{Z}_1(\mathbf{Z} + \mathbf{Z}_0)}{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_0 \cdot \frac{1}{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z}_0 + \mathbf{Z}_1 + \frac{\mathbf{Z}_0\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_2} + \frac{\mathbf{Z}_0\mathbf{Z}_1}{jX_3},$$

(¹) Se questa impedenza è sufficientemente elevata, questo caso (I, 12) equivale sensibilmente al precedente.

mentre, nel caso in cui non esistessero i rami *2* e *3*, la stessa corrente si calcolerebbe con $\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_0 + \mathbf{Z}_1}$.

Dati i valori delle costanti circuitali in guisa da soddisfare alle condizioni indicate, cioè tali che per un certo valore di ω si abbia $X_0 = X_1 = 0$, $\frac{1}{b_2} + X_3 = 0$, e piccolo valore di $R_2\sqrt{\frac{C_3}{L_2}}$, si può verificare che, per un determinato scarto da tale ω, la riduzione della corrente nel ramo *1* è assai più notevole quando si suppongono presenti i rami *2* e *3* che non nel caso in cui tali rami siamo esclusi.

Abbiasi ad esempio (valori in ohm, henry, farad):

$$R_0 = 25\,, \quad L_0 = 2{,}5 \cdot 10^{-5}\,, \quad C_0 = 1{,}6 \cdot 10^{-9}\;;$$
$$R_1 = 10\,, \quad L_1 = 1{,}6 \cdot 10^{-4}\,, \quad C_1 = 2{,}5 \cdot 10^{-10}\,.$$

Le reattanze delle impedenze $\mathbf{Z}_0$ e $\mathbf{Z}_1$ si annullano così per la pulsazione $\omega_0 = 5 \cdot 10^6$; talchè, considerando, insieme a questa, anche le $\omega' = 4 \cdot 10^6$, $\omega'' = 6 \cdot 10^6$, si ha, con ovvio significato dei simboli:

$$(\mathbf{Z}_0 + \mathbf{Z}_1)_0 = 35\,, \quad (\mathbf{Z}_0 + \mathbf{Z}_1)' = 35 - j416\,, \quad (\mathbf{Z}_0 + \mathbf{Z}_1)'' = 35 + j339\,,$$

i cui moduli sono rispettivamente 35, 418, 341, onde, dette $\mathbf{I}_0$, $\mathbf{I}'$, $\mathbf{I}''$ le corrispondenti correnti, si hanno fra i moduli di esse i rapporti:

$$\frac{I'}{I_0} = \frac{35}{418} \cong \frac{1}{11{,}9}\,, \quad \frac{I''}{I_0} = \frac{35}{341} \cong \frac{1}{9{,}7}\,,$$

dai quali possiamo trarre una nozione della selettività del sistema.

In parallelo su $\mathbf{Z}_1$ disponiamo ora un sistema $\mathbf{Z}_2$, X_3 con:

$$R_2 = 0{,}01\,, \quad L_2 = 2 \cdot 10^{-7}\,, \quad C_3 = 2 \cdot 10^{-7}\,,$$

e ricalcoliamo gli analoghi rapporti. All'uopo osserviamo che si ha:

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}_2} + \frac{1}{jX_3} = \frac{1}{R_2 + jL_2\omega} + jC_3\omega = \frac{R_2 - jL_2\omega}{R_2^2 + L_2^2\omega^2} + jC_3\omega \cong$$
$$\cong \frac{R_2}{L_2^2\omega^2} + j\left(C_3\omega - \frac{1}{L_2\omega}\right),$$

l'ultimo passaggio giustificandosi con l'osservare che, per le frequenze che ci interessano, è $R_2^2 \ll L_2^2\omega^2$.

Per le tre pulsazioni dianzi considerate, si trova:

$$\mathbf{Y}_0 = 0{,}01\,, \quad \mathbf{Y}' = 0{,}0156 - j\,0{,}450\,, \quad \mathbf{Y}'' = 0{,}007 + j\,0{,}366\,.$$

Inoltre si ha:

$$(\mathbf{Z}_0\mathbf{Z}_1)_0 = 250\,, \quad (\mathbf{Z}_0\mathbf{Z}_1)' = -20000 - j9562\,, \quad (\mathbf{Z}_0\mathbf{Z}_1)'' = -13197 + j7792.$$

Moltiplicando questi numeri ordinatamente per i corrispondenti valori di **Y**, dopo avere osservato che si può sensibilmente ritenere $\mathbf{Y}' \cong -j\,0{,}450$, $\mathbf{Y}'' \cong j\,0{,}366$, si trovano finalmente i tre seguenti valori della espressione $\mathbf{Z}_0 + \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_0\mathbf{Z}_1\mathbf{Y}$:

$$37{,}5\ ;\quad -4268 + j\,8584\ ;\quad -2817 - j\,4491\ ,$$

i cui rispettivi moduli sono:

$$\cong 37{,}5\ ;\quad 9586\ ;\quad 5310\ .$$

Ne segue che i nuovi valori dei rapporti fra i moduli delle correnti sono:

$$\frac{I'}{I_0} = \frac{37{,}5}{9586} \cong \frac{1}{256}\,,\quad \frac{I''}{I_0} = \frac{37{,}5}{5310} \cong \frac{1}{142}\,.$$

Come si vede, l'aumento della selettività è notevole.

B) Circuiti accoppiati a costanti concentrate.

16. - Sistema costituito da due circuiti. - Accoppiamento. — Vogliamo ora esaminare quel che accade quando, anzichè un solo circuito, se ne abbiano due, elettricamente distinti (fig. 63), ma capaci di influire l'uno sull'altro per via magnetica. Ciò equivale a dire che per tali circuiti, oltre ai valori delle resistenze, induttanze e capacità, che indicheremo con R_1, L_1, C_1; R_2, L_2, C_2, si abbia a considerare un coefficiente di induzione mutua M.

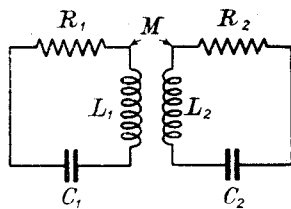



Fig. 63

Supponiamo che in uno solo di essi, per es. il primo, che chiameremo *primario*, sia inserita una sede di f. e. m. alternata sinusoidale **E** (non indicata in figura) di una certa pulsazione ω, mentre l'altro, il *secondario*, è chiuso.

Prescindendo per ora dal periodo che precede lo stabilirsi del regime, nei due circuiti si avranno due correnti $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$, entrambe alternate sinusoidali di pulsazione ω, la cui determinazione riesce agevole se si riflette che l'azione di ciascun circuito sull'altro si esplica mediante il sorgere, in ciascuno di essi, di una f. e. m. dovuta alle variazioni del flusso provocato dalla corrente circolante nell'altro, e che ovviamente sarà rappresentabile mediante i numeri complessi $-jM\omega\mathbf{I}_2$ pel primo, $-jM\omega\mathbf{I}_1$ pel secondo.

Scriviamo per ciascuno di essi l'equazione che esprime la legge di Ohm, avendo cura di mettere in conto anche queste ultime f. e. m. Si avrà senz'altro:

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathbf{E} - jM\omega\mathbf{I}_2 &= \mathbf{Z}_1\mathbf{I}_1 \\ -jM\omega\mathbf{I}_1 &= \mathbf{Z}_2\mathbf{I}_2\,, \end{aligned}\right.$$

essendo

$$\mathbf{Z}_1 = R_1 + jX_1, \quad \mathbf{Z}_2 = R_2 + jX_2 \quad \left(X_1 = L_1\omega - \frac{1}{C_1\omega}, \quad X_2 = L_2\omega - \frac{1}{C_2\omega} \right)$$

le impedenze dei due circuiti.

Risolvendo le (23) rispetto ad $\mathbf{I}_1$ ed $\mathbf{I}_2$ si ottiene:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_1'}, \tag{24}$$

$$\mathbf{I}_2 = -\frac{jM\omega\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_1'\mathbf{Z}_2}, \tag{25}$$

dove si è posto:

$$\mathbf{Z}_1' = \mathbf{Z}_1 + \frac{M^2\omega^2}{\mathbf{Z}_2} = \mathbf{Z}_1 + \frac{M^2\omega^2}{Z_2^2}(R_2 - jX_2) = R_1' + jX_1', \tag{26}$$

cioè:

$$R_1' = R_1 + \frac{M^2\omega^2}{Z_2^2}R_2, \quad X_1' = X_1 - \frac{M^2\omega^2}{Z_2^2}X_2. \tag{26'}$$

In vista di successivi sviluppi, conviene introdurre anche una impedenza $\mathbf{Z}_2'$ definita analogamente alla $\mathbf{Z}_1'$ mediante la:

$$\mathbf{Z}_2' = \mathbf{Z}_2 + \frac{M^2\omega^2}{\mathbf{Z}_1} = R_2' + jX_2', \tag{27}$$

cioè

$$R_2' = R_2 + \frac{M^2\omega^2}{Z_1^2}R_1, \quad X_2' = X_2 - \frac{M^2\omega^2}{Z_1^2}X_1.$$

Moltiplicando la (26) per $\mathbf{Z}_2$ e la (27) per $\mathbf{Z}_1$, e confrontando, si ha:

$$\mathbf{Z}_1'\mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + M^2\omega^2 = \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2', \tag{28}$$

cosicchè alla espressione di $\mathbf{I}_2$ può anche darsi la forma:

$$\mathbf{I}_2 = -\frac{jM\omega\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2'}. \tag{25'}$$

La (24) dimostra che la corrente primaria $\mathbf{I}_1$ può calcolarsi come se il circuito secondario non esistesse, ma la resistenza e la reattanza del primario, anzichè essere R_1, X_1, fossero R_1' e X_1'. Si ha cioè che la presenza del secondario determina un apparente aumento della resistenza, la quale si accresce di $\frac{M^2\omega^2R_2}{Z_2^2}$, ed una apparente variazione della reattanza, dal cui primitivo valore X_1 viene a sottrarsi $\frac{M^2\omega^2X_2}{Z_2^2}$ (che può essere positivo o negativo).

In relazione alla apparente variazione dell'impedenza primaria varia la corrente rispetto a quella che si avrebbe in assenza del secondario, e varia pure la potenza erogata da **E**. Precisamente, moltiplicando scalarmente per $\mathbf{I}_1$ la prima delle (23) e per $\mathbf{I}_2$ la seconda, e sommando membro a membro, dopo avere osservato che è

$$\mathbf{Z}_1\mathbf{I}_1 \times \mathbf{I}_1 = R_1 I_1^2 , \quad \mathbf{Z}_2\mathbf{I}_2 \times \mathbf{I}_2 = R_2 I_2^2 ,$$

$$jM\omega\mathbf{I}_2 \times \mathbf{I}_1 = j \cdot jM\omega\mathbf{I}_2 \times j\mathbf{I}_1 \text{ (1)} = -M\omega\mathbf{I}_2 \times j\mathbf{I}_1 = -jM\omega\mathbf{I}_1 \times \mathbf{I}_2 ,$$

si trova che tale potenza vale:

$$\mathbf{E} \times \mathbf{I}_1 = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 ;$$

essa corrisponde cioè a tutta quella che, sotto forma di calore Joule, si manifesta complessivamente nei due circuiti.

Si ha dunque *trasmissione* di energia dal primario al secondario, e tale trasmissione si effettua a mezzo di quella parte del campo magnetico che interessa ambo i circuiti, cioè di quella alla quale si commisura il coefficiente d'induzione mutua M.

Il sistema dei due circuiti qui considerati non è che una generalizzazione di quello che costituisce un ordinario trasformatore; la grandezza $\frac{M^2\omega^2}{Z_2^2}(R_2 - jX_2)$ che s'aggiunge alla impedenza primaria $\mathbf{Z}_1$ corrisponde a quella che, nella teoria dei trasformatori, si chiama la impedenza secondaria *ridotta a primario* (El., XIII, 6); ed il rapporto $\frac{M\omega}{Z_2}$ che, per la seconda delle (23), uguaglia il rapporto fra i moduli delle correnti secondaria e primaria, funge qui da « rapporto di trasformazione ».

Analogamente $\mathbf{Z}_2'$ equivale alla impedenza $\mathbf{Z}_2$ del secondario aumentata del termine $\frac{M^2\omega^2}{\mathbf{Z}_1}$ corrispondente alla impedenza primaria ridotta a secondario (2). Essa corrisponde all'impedenza apparente che, nell'ipo-

---

(1) Si osservi che il prodotto scalare di due vettori non muta ruotando i due fattori di uno stesso angolo; in particolare quindi moltiplicandoli per j, in quanto tale moltiplicazione equivale ad una rotazione di 90°.

(2) Il corrispondente rapporto di trasformazione $\frac{M\omega}{Z_1}$ non è in generale il reciproco del precedente. Ciò però si verifica approssimativamente nel caso degli ordinari trasformatori, pei quali, intendendo per X_1, X_2 le sole parti di tipo magnetico $L_1\omega$, $L_2\omega$, ordinariamente accade che i rapporti $\frac{R_1^2}{X_1^2}$, $\frac{R_2^2}{X_2^2}$ sono trascurabili in confronto dell'unità, ed il rapporto $\frac{M^2}{L_1L_2}$ ha praticamente valore unitario. Invero, in tal caso $\frac{M\omega}{Z_1}$, $\frac{M\omega}{Z_2}$ equivalgono sensibilmente a $\frac{M}{L_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$ e $\frac{M}{L_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$.

Per una più razionale definizione del rapporto di trasformazione, veggasi il successivo n. 27.

tesi di alimentazione del secondario, questo presenterebbe per effetto della presenza del primario. Ed anzi, a senso della (25′), la corrente secondaria coincide con quella che si avrebbe in un circuito dotato di tale impedenza $\mathbf{Z}_2'$, ma alimentato, non dalla **E** agente nel primario, bensì da questa moltiplicata pel rapporto $-\frac{jM\omega}{\mathbf{Z}_1}$ il cui modulo corrisponde precisamente al rapporto di trasformazione da primario a secondario.

Infine, per la calcolazione diretta della corrente secondaria, può convenire servirsi della stessa (25′), interpretata nel senso che l'espressione

$$\frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2'}{-jM\omega} = \frac{\mathbf{Z}_2'\mathbf{Z}_2}{-jM\omega} = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + M^2\omega^2}{-jM\omega}$$

rappresenti, in certo qual modo, l'impedenza del secondario « rispetto alla tensione applicata al primario ».

17. - Coppia di circuiti non dissipativi senza d. d. p. applicata. — Riservandoci di riprendere più tardi lo studio di un tale sistema, esaminiamo ora quel che in esso può verificarsi quando non vi sia alcuna d. d. p. impressa.

Se, in primo luogo, riteniamo nulle (trascurabili) le resistenze primaria e secondaria, le formole precedenti ci dicono che è possibile una circolazione di corrente alternata nel primario — e quindi anche nel secondario, dappoichè la situazione di due circuiti essendo in tale caso simmetrica, ciascuno di essi può considerarsi come primario —, ed una tale corrente potrà essere diversa da zero soltanto se, oltre la resistenza, è nulla anche la reattanza. Naturalmente occorre però qui riferirsi non alla reattanza effettiva, ma a quella apparente, cioè a quella grandezza che abbiamo indicato con X_1' e la cui espressione, nel caso attuale, per essere $R_1 = R_2 = 0$, si riduce a:

$$X_1' = X_1 - \frac{M^2\omega^2}{X_2}.$$

Dovrà dunque aversi:

$$X_1X_2 = M^2\omega^2,$$

cioè

$$\left(L_1\omega - \frac{1}{C_1\omega}\right)\left(L_2\omega - \frac{1}{C_2\omega}\right) = M^2\omega^2. \tag{29}$$

Questa è una equazione quadratica rispetto ad ω^2, le cui radici sono i quadrati delle possibili pulsazioni. Sviluppando il prodotto indicato a primo membro e ponendo:

$$\omega_1^2 = \frac{1}{L_1C_1}, \quad \omega_2^2 = \frac{1}{L_2C_2}, \quad k^2 = \frac{M^2}{L_1L_2},$$

cioè indicando con ω_1 e ω_2 le pulsazioni proprie dei due circuiti, e con k quello che si chiama il loro *fattore* (o *coefficiente*) *d'accoppiamento* (1), essa si trasforma in:

$$(1-k^2)\frac{\omega^4}{\omega_1^2\omega_2^2}-\left(\frac{1}{\omega_1^2}+\frac{1}{\omega_2^2}\right)\omega^2+1=0\,,$$

cioè

$$(1-k^2)\omega^4-(\omega_1^2+\omega_2^2)\omega^2+\omega_1^2\omega_2^2=0\,,$$

le cui radici sono:

$$\left.\begin{matrix}\omega'^2\\ \omega''^2\end{matrix}\right\}=\frac{\omega_1^2+\omega_2^2\mp\sqrt{(\omega_1^2-\omega_2^2)^2+4k^2\omega_1^2\omega_2^2}}{2(1-k^2)}\,.$$

Le ω' ed ω'' così determinate sono dunque le possibili pulsazioni della supposta corrente alternata, la quale effettivamente potrà verificarsi quando, ben inteso, il sistema sia stato inizialmente sottratto alla sua condizione di riposo, ad es. mediante una carica attribuita al condensatore di uno dei due circuiti.

18. - Caso particolare dei circuiti isocroni. - Pulsazioni di risonanza. - Battimenti. — È particolarmente interessante per le applicazioni il caso in cui i due circuiti, a sè considerati, siano, come si dice, *isocroni*, vale a dire abbiamo la stessa pulsazione propria ω_0, cioè sia $\omega_1=\omega_2=\omega_0$. In tale caso le precedenti espressioni si riducono a:

$$\omega'=\frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}}\,,\quad \omega''=\frac{\omega_0}{\sqrt{1-k}}\,. \tag{30}$$

Tali due pulsazioni sono tanto meno diverse l'una dall'altra quanto più piccolo è k, cioè, come si dice, quanto più *lasco* è l'accoppiamento. Quando k è sufficientemente piccolo in confronto all'unità, talchè (App., A, 6) si possa ritenere $\frac{1}{\sqrt{1\pm k}}=(1\pm k)^{-1/2}\cong 1\mp\frac{k}{2}$, la differenza $\omega''-\omega'$ vale sensibilmente $k\omega_0$ e pertanto, per $k\to 0$, le due pulsazioni tendono a coincidere entrambe con ω_0, il che era facilmente prevedibile, riflettendo che in tal caso i due circuiti non si influenzano reciprocamente.

Quando l'accoppiamento è molto *stretto* (cioè k molto prossimo all'unità), le due pulsazioni differiscono moltissimo. Per $k\to 1$, l'una tende

(1) Si ricordi che è sempre $M^2\leqq L_1L_2$ (II, 9, nota), quindi $k^2\leqq 1$. Il fattore d'accoppiamento si considera sempre positivo, quindi il suo valore è $\frac{|M|}{\sqrt{L_1L_2}}$, che, invertendo ove occorra il senso positivo assunto su uno dei due circuiti, può sempre ridursi $=\frac{M}{\sqrt{L_1L_2}}$.

a divenire infinitamente grande e pertanto la corrispondente oscillazione svanisce, mentre l'altra s'avvicina ad $\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$.

Da quanto precede risulta che correnti di pulsazioni ω' e ω'' possono entrambe stabilirsi, ed in effetto esse si stabiliscono e pertanto *coesistono* in ciascuno dei due circuiti.

Se il sistema è stato attivato mediante una carica attribuita inizialmente al condensatore C_1, l'andamento della tensione ai capi di questo potrà ad esempio risultare rappresentato da una espressione del tipo:

$$v_1 = V_1 \cos \omega' t + V_1 \cos \omega'' t\,,$$

e la corrispondente corrente i_1 si comporrà di due parti, ciascuna in quadratura anticipo sulla rispettiva tensione, cioè precisamente:

$$i_1 = - C_1 \omega' V_1 \operatorname{sen} \omega' t - C_1 \omega'' V_1 \operatorname{sen} \omega'' t\,.$$

La corrente i_2 si comporrà pure di due parti, ciascuna da determinarsi con la seconda delle (14), cioè moltiplicando per $-\frac{M\omega}{X_2}$ la corrispondente parte di i_1.

Ora si ha:

$$\frac{M\omega}{X_2} = \frac{M}{L_2 - \frac{1}{C_2 \omega^2}} = \frac{M}{L_2\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)}\,,$$

quindi, ricordando le (21):

$$-\frac{M\omega}{X_2} = \frac{M}{kL_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \qquad \text{per } \omega = \omega'\,,$$

$$-\frac{M\omega}{X_2} = -\sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \qquad \text{per } \omega = \omega''\,.$$

Pertanto in definitiva si avrà:

$$i_2 = V_1 \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}\,(C_1 \omega'' \operatorname{sen} \omega'' t - C_1 \omega' \operatorname{sen} \omega' t)\,.$$

Di qui si conclude agevolmente che la tensione v_2 ai capi del condensatore C_2 si comporrà anch'essa di due parti, delle quali la prima, quella di pulsazione minore ω', è in fase, la seconda, di pulsazione maggiore ω'', in opposizione con la corrispondente parte di v_1. Le relative ampiezze si otterranno dividendo per $C_2\omega'$, $C_2\omega''$ quelle delle rispettive correnti, cioè si avrà:

$$v_2 = V_2 \cos \omega' t - V_2 \cos \omega'' t\,,$$

avendo posto:

$$V_2 = V_1 \sqrt{\frac{L_1}{L_2}\,\frac{C_1}{C_2}} = V_1 \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}\,,$$

l'ultimo passaggio giustificandosi per essere $C_1L_1 = C_2L_2$, e quindi $\sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \sqrt{\frac{C_2}{C_1}}$.

L'andamento delle tensioni v_1 e v_2 si otterrà dunque facendo la somma di due funzioni sinusoidali di diversa pulsazione ω' e ω''.

A tale scopo, si osservi che una grandezza $A \cos \omega'' t$ alternativa di pulsazione ω'', in virtù dell'identità

$$A \cos \omega'' t = A \cos \{ \omega' t + (\omega'' - \omega') t \},$$

può considerarsi come avente la pulsazione ω' e la fase φ variabile linearmente col tempo secondo la legge $\varphi = (\omega'' - \omega')t$. Pertanto, una grandezza come la $A(\cos \omega' t + \cos \omega'' t)$ corrisponde alla proiezione su una retta della somma di due vettori OM, MN di grandezza A e rotanti entrambi con velocità angolare ω', il secondo dei quali sia contemporaneamente animato di moto rotatorio rispetto alla sua origine M, con velocità Ω tale da compiere un intero giro in un tempo T dato da $(\omega'' - \omega')T = 2\pi$, cioè $\Omega = \frac{2\pi}{T} = \omega'' - \omega'$, vale a dire con velocità angolare uguale alla differenza delle pulsazioni ω'' e ω' (fig. 64).

Fig. 64

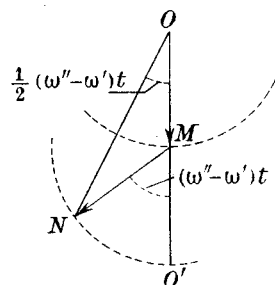
La successione dei valori della grandezza in esame corrisponderà quindi alle ordinate di una specie di « sinusoide » di pulsazione ω' la cui ampiezza vada variando come variano i segmenti NO mentre MN ruota con velocità angolare Ω intorno ad M. Siccome ovviamente è:

$$\widehat{NOM} = \frac{1}{2} \widehat{NMO'} = \frac{1}{2} (\omega'' - \omega')t, \quad ON = 2MO \cos \widehat{NOM},$$

tale ampiezza uguaglia il prodotto di $2A$ pel valore assoluto di $\cos \frac{\omega'' - \omega'}{2} t$.

La corrispondente curva ha la forma della *a*) di fig. 65 dove la linea $ABCDEFG...$, ha un andamento *periodico* con pulsazione $\omega'' - \omega' = \Omega$ (1).

È questo un caso particolare del noto fenomeno dei *battimenti*, in virtù del quale la coesistenza (somma) di due fatti di pulsazione ω' e ω'' dà luogo ad un fatto di pulsazione $\Omega = \omega'' - \omega'$.

La curva rappresentativa di v_1 sarà dunque del tipo *a*). Per v_2, si avrà una curva perfettamente analoga, ma siccome la componente di pulsazione ω'' è per essa in opposizione di fase rispetto alla analoga della v_1, il corrispondente vettore MN occuperà la posizione MO quando per la

(1) Si osservi che, mentre $\cos \alpha$ è funzione periodica di α con periodo 2π, il suo valore assoluto ha invece periodo π.

prima è in *MO'* e così via. Pertanto i massimi d'ampiezza di v_2 si verificheranno in corrispondenza dei minimi di v_1 e viceversa, come indicato in fig. 65 *b*).

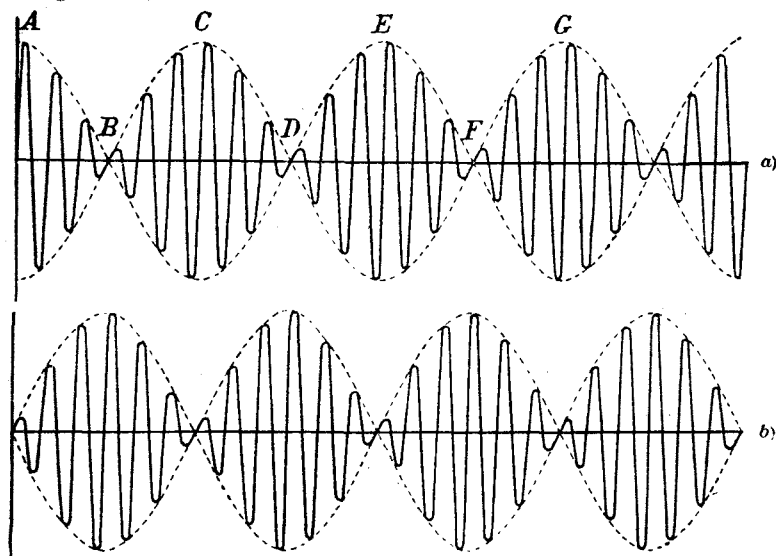



Fig. 65

Che tale sia la forma del diagramma di v_1 può anche intuitivamente comprendersi pensando che, sommando le ordinate di due diagrammi

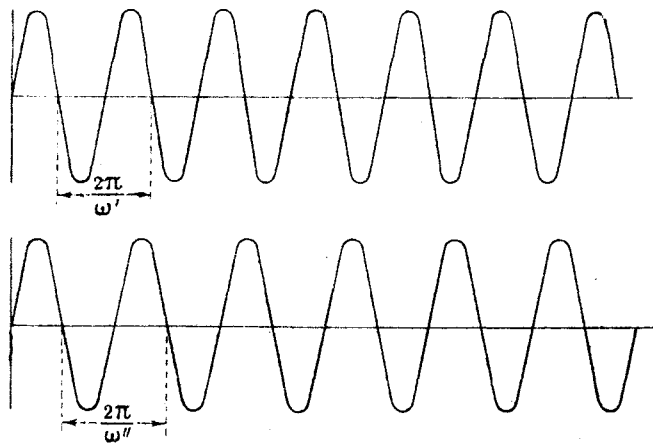



Fig. 66

sinusoidali come quelli indicati in fig. 66, di uguale ampiezza ma di periodo poco diverso, si ottiene una curva (non indicata in figura)

la quale inizialmente corrisponde approssimativamente alla somma di due sinusoidi in fase, e quindi ad un arco di sinusoide di ampiezza doppia, poi, a causa del progressivo spostamento relativo degli zeri dei due diagrammi, va deformandosi per corrispondere alla somma di due sinusoidi via via spostate di fase, talchè l'ampiezza della loro somma è inferiore alla somma delle ampiezze, fino a che, quando le due sinusoidi sono all'incirca in opposizione, la somma raggiunge ampiezza pressochè nulla, per poi gradatamente riavvicinarsi all'ampiezza iniziale, ecc. Ed è anche chiaro che la variazione graduale di ampiezza avviene con ritmo tanto più lento quanto più prossime sono le pulsazioni delle sinusoidi addende [1].

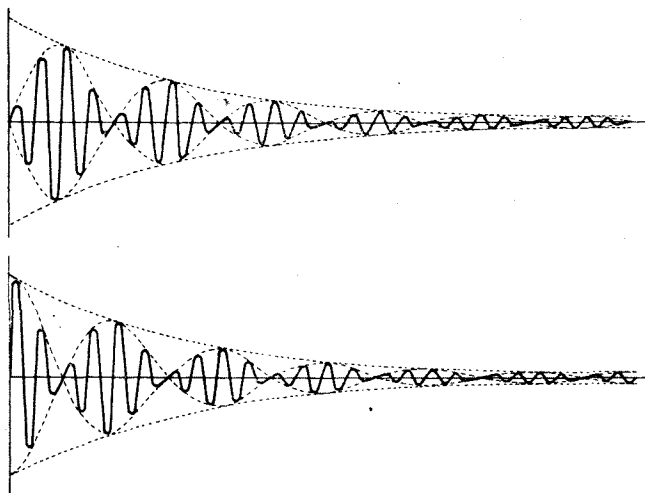



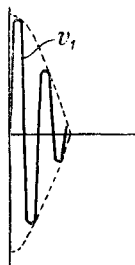
Fig. 67

Dal punto di vista fisico, si potrebbe dire che la tensione v_1 nel tratto fra A e B (fig. 65 *a*)) va oscillando con andamento « smorzato » *come se* le successive oscillazioni si accompagnassero con *dissipazione* di energia, quantunque con legge di smorzamento diversa da quella descritta al n. 3.

Ma ciò non è, perchè cause di dissipazione non vi sono, essendo supposte nulle le resistenze. Non vi sono, è vero, dissipazioni, nel senso usuale della parola, ma v'è però ugualmente *uscita* d'energia dal circuito primario, e più precisamente *trasferimento* d'energia al circuito secondario, nel quale infatti le oscillazioni di tensione vanno, nello stesso intervallo di tempo, gradatamente aumentando. Poi la vicenda si inverte e così via.

---

[1] Si confronti col comportamento descritto al n. 6 pel caso illustrato in fig. 51.

19. - Circuiti accoppiati con resistenza, in regime libero. — Abbiamo fin qui supposto che i due circuiti siano privi di resistenza. Qualora questa invece vi sia e perciò i decrementi δ_1 e δ_2 dei due circuiti non siano nulli, l'andamento delle cose è sostanzialmente analogo a quello sopra descritto; la sola differenza sta in ciò, che al periodico scambio di energia fra i due circuiti si accompagna anche una uscita effettiva, cui consegue una degradazione delle ampiezze, cioè il diagramma inviluppante, anzichè fra due rette parallele all'asse dei tempi, è invece iscritto fra due curve del tipo esponenziale (fig. 67), e precisamente tali da corrispondere ad un decremento che, se i due circuiti hanno pulsazioni proprie uguali e decrementi δ_1, δ_2 piccoli, si dimostra essere sensibilmente uguale alla media di δ_1 e δ_2.

Con ragionamento analogo a quello esposto ai nn. 1, 2, 3 e che fa capo al teorema generale (App., *A*, 9) sulle equazioni differenziali lineari non omogenee, si verifica che, nel periodo (transitorio) che precede lo stabilirsi del regime, in un sistema come quello considerato al n. 16 si ha sovrapposizione dello stato di regime ad uno stato di cose del tipo or ora esaminato.

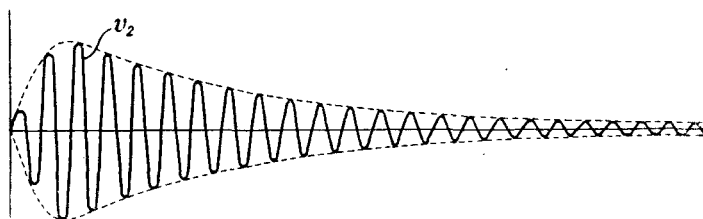



Fig. 68

Per le applicazioni r. t., ci importa rilevare che l'andamento del fenomeno implica sempre la presenza di due frequenze di oscillazione in entrambi i circuiti, il che può in molti casi essere indesiderabile.

Per ovviare a ciò, non vi sarebbe che fare avvicinare k allo zero, ma evidentemente, così facendo, verrebbe frustrato tutto il processo, la cui essenza risiede nella possibilità di *trasferire energia* dall'uno dei due circuiti all'altro.

Per ottenere la soppressione della doppia oscillazione nel secondario, pur conservando il vantaggio di un accoppiamento stretto, si ricorre all'artificio (realizzabile con mezzi che apprenderemo in seguito) di provocare la estinzione del processo primario dopo la prima semioscillazione delle ampiezze (fig. 68). In tale momento è massima la v_2; d'altra parte, a partire da tale istante il secondario non è più a considerarsi accoppiato al primario, perchè questo viene sostanzialmente ad aprirsi; ne segue che il secondario va a comportarsi come un circuito isolato cui sia stata appli-

cata una eccitazione corrispondente al massimo raggiunto da v_2; in esso prende allora origine un processo oscillatorio smorzato, la cui pulsazione ed il cui smorzamento dipendono unicamente dalle costanti circuitali del secondario stesso.

In ciò consiste la così detta *eccitazione per urto* di quest'ultimo.

20. - Regolazione della corrente secondaria. — Riprendendo lo studio della coppia di circuiti magneticamente accoppiati quando uno di essi sia alimentato da una d. d. p. alternativa **E**, vogliamo ora esaminare da quali elementi dipende la intensità della corrente secondaria e come si possa quindi influire su di essa.

Tale questione riveste grandissima importanza nelle pratiche applicazioni radiotecniche, ove si presenta spesso l'opportunità di disporre, ai capi di un elemento determinato del circuito secondario (per lo più un condensatore), della massima tensione compatibile con gli altri dati della questione, per il che evidentemente è necessario che nel circuito secondario stesso circoli la massima corrente, con che sarà massima anche la potenza.

Siccome gli elementi su cui generalmente si opera per regolare i circuiti sono quelli di carattere reattivo, andiamo a studiare come la corrente $\mathbf{I}_2$ dipenda dalle due reattanze X_1, X_2 e dalla induttanza mutua M.

Dalla (25), che scriveremo per disteso sotto la forma:

$$\mathbf{I}_2 = -\frac{jM\omega\mathbf{E}}{\left(\mathbf{Z}_1 + \dfrac{M^2\omega^2}{\mathbf{Z}_2}\right)\mathbf{Z}_2} = -\frac{jM\omega\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + M^2\omega^2},$$

cioè:

$$\mathbf{I}_2 = \frac{-jM\omega\mathbf{E}}{(R_1 + jX_1)(R_2 + jX_2) + M^2\omega^2} = \frac{-jM\omega\mathbf{E}}{a + jb + M^2\omega^2},$$

dove per brevità si è posto:

$$a = R_1R_2 - X_1X_2\,, \quad b = R_1X_2 + R_2X_1\,, \quad (\text{e quindi } Z_1^2Z_2^2 = a^2 + b^2)\,,$$

si deduce che il quadrato I_2^2 del modulo di $\mathbf{I}_2$ vale:

$$I_2^2 = \frac{M^2\omega^2E^2}{(a + M^2\omega^2)^2 + b^2} = \frac{E^2}{\dfrac{a^2 + b^2}{M^2\omega^2} + M^2\omega^2 + 2a} = \tag{31}$$

$$= \frac{E^2}{\dfrac{Z_1^2\,Z_2^2}{M^2\omega^2} + M^2\omega^2 + 2a}.$$

Questa espressione dipende dalle tre variabili X_1, X_2, M della questione. Per studiare le condizioni di massimo, esamineremo separatamente l'influenza di ciascuna delle tre variabili. Cominciando da M, supporremo allora fissati X_1 e X_2, e quindi a, b, Z_1 e Z_2. Il denominatore dell'ultima frazione varia con M e precisamente, poichè, a parte il termine $2a$ che è indipendente da M, esso consta della somma di due termini il cui prodotto ($= Z_1^2 Z_2^2$) non dipende da M, raggiunge un minimo quando tali termini sono uguali, cioè per

$$M^2\omega^2 = Z_1 Z_2 \,. \tag{32}$$

Pertanto si ha che, al variare di $M\omega$ da 0 a $\sqrt{Z_1 Z_2}$, la I_2 cresce, poi, per $\omega M > \sqrt{Z_1 Z_2}$, decresce.

In vista di successive deduzioni, occorre osservare che il prodotto $Z_1 Z_2$ è necessariamente $\geq R_1 R_2$ perchè è $Z_1 \geq R_1$, $Z_2 \geq R_2$.

Concludiamo intanto che, per *dati* valori di X_1 e X_2, ove si possa far variare M, converrà sceglierlo il più vicino possibile a $\dfrac{\sqrt{Z_1 Z_2}}{\omega}$.

Vediamo ora come varia I_2 al variare di X_1, supponendo invece *dato* M.

All'uopo basta osservare che, in virtù della (23), il massimo di I_2 si avrà per il minimo del modulo di $\mathbf{Z}_1'\mathbf{Z}_2$, cioè, dato che $\mathbf{Z}_2$ non dipende dagli elementi del circuito *1*, per il minimo del modulo di $\mathbf{Z}_1'$. Ora, ricordando che, secondo la (24), è:

$$\mathbf{Z}_1' = R_1 + \frac{M^2\omega^2}{Z_2^2} R_2 + j\left(X_1 - \frac{M^2\omega^2}{Z_2^2} X_2\right),$$

si vede subito che la parte reale di $\mathbf{Z}_1$ non è influenzata dagli elementi variabili del circuito *1*, per cui il minimo cercato corrisponderà al minimo valore assoluto del coefficiente di j, cioè a quella condizione circuitale per cui tale coefficiente si annulla. Tale condizione è dunque la:

$$X_1 = \frac{M^2\omega^2}{Z_2^2} X_2 \,. \tag{33}$$

In modo analogo, partendo dalla espressione (23') di $\mathbf{I}_2$, si deduce che se invece si ritengono variabili gli elementi L_2, C_2 del circuito *2*, la condizione di massimo per I_2 è la:

$$X_2 = \frac{M^2\omega^2}{Z_1^2} X_1 \,. \tag{34}$$

Possiamo pertanto concludere che il più elevato valore di I_2 potrà ottenersi soddisfacendo contemporaneamente alle (32), (33), (34). Ora alle due ultime si può soddisfare con valori non nulli di X_1, X_2 soltanto quando

sia $Z_1 Z_2 = M^2\omega^2$ (1), ed in tal caso da esse, dividendo membro a membro, si deduce:

$$\frac{X_1^2}{X_2^2} = \frac{Z_1^2}{Z_2^2},$$

da cui, pensando che è $Z_1^2 = R_1^2 + X_1^2$, $Z_2^2 = R_2^2 + X_2^2$, discende:

$$\frac{X_1^2}{X_2^2} = \frac{R_1^2}{R_2^2}, \quad \text{cioè} \quad \frac{X_1}{X_2} = \frac{R_1}{R_2} \ (2).$$

Qualora invece sia $Z_1 Z_2 = M^2\omega^2$, non si può soddisfare contemporaneamente alle (33) e (34) se non assumendo:

$$X_1 = X_2 = 0,$$

cioè *accordando* i due circuiti sulla pulsazione della tensione applicata **E**.

Questa è dunque la condizione di massima corrente secondaria ogni qualvolta non sia possibile soddisfare alla (32). Tenendo presente quanto sopra è stato rilevato, che cioè il prodotto $Z_1 Z_2$ non può essere inferiore ad $R_1 R_2$, si conclude che questa è la soluzione del nostro problema finchè è $\omega M < R_1 R_2$.

Se invece è $\omega M \geq R_1 R_2$, il massimo di I_2 si verifica per

$$\omega M = \sqrt{Z_1 Z_2}, \quad X_1 : X_2 = R_1 : R_2;$$

per realizzarlo occorre dunque che i due circuiti vengano, per così dire, *ugualmente disaccordati* rispetto alla pulsazione ω, intendendo con ciò dire che, alla pulsazione ω, le loro impedenze siano *simili* (cioè abbiano il medesimo argomento), o se si vuole, che i due circuiti abbiano, separatamente considerati, il medesimo « fattore di potenza ».

Il massimo valore di I_2 in tale caso è sempre (3)

$$I_{2\,\max} = \frac{E}{2\sqrt{R_1 R_2}}$$

---

(1) In generale, due equazioni lineari omogenee

$$ax + by = 0, \quad a'x + b'y = 0$$

sono soddisfatte soltanto da $x = y = 0$ se è $ab' \neq a'b$; mentre, per $ab' = a'b$, le due equazioni sono equivalenti e pertanto ogni coppia di numeri x, y soddisfacenti l'una di esse soddisfa anche l'altra.

(2) La soluzione $\frac{X_1}{X_2} = -\frac{R_1}{R_2}$ non può essere accettata perchè, in virtù delle (33) e (34), X_1 e X_2 debbono avere lo stesso segno.

(3) Infatti, il denominatore dell'ultimo membro della (31) vale in tal caso $2M^2\omega^2 + 2a = 2Z_1Z_2 + R_1R_2 - 2X_1X_2 = 4R_1R_2$, come subito si riconosce ponendo $m = \frac{X_1}{R_1} = \frac{X_2}{R_2}$ e quindi $Z_1 = R_1\sqrt{1 + m^2}$, $Z_2 = R_2\sqrt{1 + m^2}$, $X_1X_2 = R_1R_2m^2$.

ed il minimo valore di M per cui esso è raggiungibile è $\frac{\sqrt{R_1R_2}}{\omega}$, e corrisponde a quello che si chiama l'*accoppiamento critico*. Introducendo il coefficiente d'accoppiamento k ed i coefficienti di risonanza

$$\varepsilon_1 = \frac{L_1\omega}{R_1} = \frac{1}{R_1C_1\omega}, \quad \varepsilon_2 = \frac{L_2\omega}{R_2} = \frac{1}{R_2C_2\omega}$$

dei due circuiti (1), la relazione che definisce l'accoppiamento critico assume l'aspetto notevole:

$$k^2\varepsilon_1\varepsilon_2 = 1 .$$

Per accoppiamenti *ipocritici*, cioè inferiori a quello critico, la realizzazione del massimo di I_2 esige sempre, come si è visto, che i due circuiti siano separatamente accordati sulla pulsazione impressa, ma il massimo stesso riesce tanto più piccolo quanto minore è M, cioè il coefficiente di accoppiamento k.

Infatti, essendo in tal caso $Z_1 = R_1$, $Z_2 = R_2$, dalla prima espressione di I_2 fornita dalla (29) si deduce:

$$I_{2\max} = \frac{E}{\frac{R_1R_2}{M\omega} + M\omega},$$

il cui denominatore, per $\omega^2M^2 < R_1R_2$, supera $2\sqrt{R_1R_2}$.

È opportuno notare che nei casi *ipercritici* ($\omega^2M^2 > R_1R_2$), una volta che i due circuiti siano regolati per il massimo di I_2, le differenze fra le loro pulsazioni proprie e quelle di eccitazione, qualora siano sufficientemente piccole, risultano inversamente proporzionali ai rispettivi coefficienti di risonanza (2). In particolare, i due circuiti non potranno essere isocroni se non quando abbiano uguale coefficiente di risonanza.

21. - Potenza corrispondente all'accoppiamento critico. — L'accoppiamento critico corrisponde anche alla condizione di massima potenza erogabile nel secondario per una data tensione agente sul primario.

Dallo studio compiuto nel n. prec. si deduce che, per dati valori di R_1 ed R_2, l'accoppiamento critico è il minimo che consente di realizzare il massimo di corrente e quindi di potenza secondaria; e, in considerazione di ciò, gli accoppiamenti ipocritici vengono anche talvolta chiamati

(1) Poichè, nel caso qui esaminato, i circuiti sono accordati sulla pulsazione ω della E, i coefficienti di risonanza ε_1, ε_2 possono esprimersi con le formole indicate nel testo, dove ω rappresenta appunto quella pulsazione.

(2) Si ricordi che il rapporto $\frac{X}{R}$ di un circuito, per pulsazioni prossime a quella di risonanza, vale (n. 8) $2\varepsilon \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \backsimeq 2\varepsilon \frac{\omega - \omega_0}{\omega}$.

insufficienti, tale insufficienza essendo appunto intesa con riguardo alla possibilità di consentire la massima erogazione energetica nel secondario per una data tensione applicata al primario.

Nei casi ipocritici, quantunque non si possa raggiungere nel secondario la massima potenza compatibile con la data tensione ed i dati valori di R_1 ed R_2 (in quanto che, per un dato R_1, tal massimo si ha quando la impedenza equivalente alla presenza del secondario, cioè $\frac{M^2\omega^2}{Z_2}$, uguaglia R_1), si vede agevolmente che, se gli elementi reattivi del primario e del secondario sono suscettibili di modificazione, converrà regolarli ai valori nulli di X_1 ed X_2, cioè in guisa che ciascuno dei due circuiti sia risonante per la pulsazione ω di funzionamento.

Ciò può vedersi considerando la espressione

$$I_2^2 = \frac{M^2\omega^2E^2}{(a + M^2\omega^2)^2 + b^2}$$

il cui prodotto per R_2 dà la potenza secondaria. Siccome è

$$a + M^2\omega^2 = R_1R_2 - X_1X_2 + M^2\omega^2 < 2R_1R_2 - X_1X_2\,;$$
$$b^2 = R_1^2X_2^2 + R_2^2X_1^2 + 2R_1R_2X_1X_2\,,$$

il denominatore vale meno di

$$4R_1^2R_2^2 + X_1^2X_2^2 - 2R_1R_2X_1X_2 + R_1^2X_2^2 + R_2^2X_1^2 =$$
$$= 4R_1^2R_2^2 + X_1^2X_2^2 + (R_1X_2 - R_2X_1)^2\,,$$

e pertanto il massimo valore di $R_2I_2^2$ per dati valori di R_1 ed R_2 si avrà per tali X_1 ed X_2 che annullino i numeri non negativi $X_1^2X_2^2$ e $(R_1X_2 - R_2X_1)^2$. La prima condizione porta all'annullamento di X_1 (o di X_2), dopo di che l'altra conduce ad $X_2 = 0$ (risp. $X_1 = 0$).

22. - Caso di primario e secondario accordati. - Filtri di banda. — Poichè nelle applicazioni si presenta spesso il caso dell'accoppiamento magnetico di due circuiti regolati entrambi alla risonanza su una certa pulsazione ω_0, vogliamo qui studiare come variano in tal caso le correnti secondaria e primaria al variare della pulsazione ω della tensione applicata in uno di essi, ferma restando la sua ampiezza.

Al solito indicheremo con σ lo scarto relativo di ω dalla ω_0, cioè porremo

$$\sigma = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \quad \text{e quindi} \quad \omega = \omega_0(1 + \sigma)\,,$$

e, poichè ci limiteremo a valori di σ opportunamente piccoli, potremo ritenere, secondo la (15′):

$$X_1 = 2R_1\varepsilon_1\sigma\,, \quad X_2 = 2R_2\varepsilon_2\sigma\,,$$

essendo ε_1, ε_2 i coefficienti di risonanza dei due circuiti, ed X_1, X_2 le loro reattanze valutate alla pulsazione ω. Introducendo poi il coefficiente d'accoppiamento k, potremo porre

$$M^2\omega^2 = R_1 R_2 k^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 (1 + \sigma)^2 .$$

Con tali posizioni, la (31) si scrive:

$$\frac{k\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\mathbf{E}}{j\sqrt{R_1R_2}\mathbf{I}_2} = \frac{(1 + 2j\varepsilon_1\sigma)(1 + 2j\varepsilon_2\sigma) + k^2\varepsilon_1\varepsilon_2(1 + \sigma)^2}{1 + \sigma} ,$$

per cui lo studio delle variazioni di I_2 si riduce a quello del modulo del numero complesso a secondo membro. Siccome i numeri ε_1 ed ε_2 sono per lo più dell'ordine delle centinaia, non trascureremo il secondo termine dei binomi $1 + 2j\varepsilon_1\sigma$, $1 + 2j\varepsilon_2\sigma$, mentre potremo sostituire l'unità a $1 + \sigma$ e al suo quadrato. Con tale semplificazione, il modulo del secondo membro può ritenersi sensibilmente uguale a

$$(1 + k^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 4\varepsilon_1\varepsilon_2\sigma^2)^2 + 4(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2\sigma^2 . \tag{35}$$

È facile vedere che questa espressione ammette in generale dei massimi e dei minimi nelle vicinanze del valore $\sigma = 0$ corrispondente alla risonanza. Infatti, uguagliando a zero la derivata rispetto a σ, si ha l'equazione di terzo grado

$$\frac{\sigma\,(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2}{2\varepsilon_1\varepsilon_2} - \sigma(1 - 4\varepsilon_1\varepsilon_2\sigma^2 + k^2\varepsilon_1\varepsilon_2) = 0 , \tag{36}$$

che è sempre soddisfatta da $\sigma = 0$ (cioè per $\omega = \omega_0$) ed inoltre dai numeri

$$\sigma_m = \pm \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}} \sqrt{k^2\varepsilon_1\varepsilon_2 + 1 - \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2}{2\varepsilon_1\varepsilon_2}} \tag{37}$$

cui corrispondono due pulsazioni reali ugualmente distanti da ω_0 ogni qualvolta sia positivo il numero che compare sotto il radicale [1]. Se, per semplificare, supponiamo che i coefficienti di risonanza non siano molto diversi, si potrà ritenere

$$\frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2}{2\varepsilon_1\varepsilon_2} \backsimeq 2 \ (^2) ,$$

[1] È utile osservare che il minimo valore di k soddisfacente a tale condizione non è mai inferiore a quello corrispondente all'accoppiamento critico perchè, qualunque siano ε_1 ed ε_2, è sempre $\frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2}{2\varepsilon_1\varepsilon_2} > 2$ (infatti $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 - 4\varepsilon_1\varepsilon_2 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2$ non è mai negativo).

[2] Per es. per $\varepsilon_1 < 1{,}15\,\varepsilon_2$ (o $\varepsilon_2 < 1{,}15\,\varepsilon_1$) l'espressione a primo membro risulta $< 2{,}02$.

e quindi

$$\sigma_m \cong \pm \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}} \sqrt{k^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 1}\,.$$

Se è $k^2\varepsilon_1\varepsilon_2 > 1$, cioè se l'accoppiamento supera quello critico, questi valori di σ sono reali e, come si può verificare, ad essi corrispondono due massimi della corrente I_2, mentre a $\sigma = 0$ corrisponde un minimo. Diminuendo k, il valore di $|\sigma_m|$ si riduce e pertanto le pulsazioni di massimo si avvicinano a quella di minimo, finchè, per $k^2\varepsilon_1\varepsilon_2 = 1$, i due massimi coincidono col minimo in $\sigma = 0$, ed altrettanto avviene per $k^2\varepsilon_1\varepsilon_2 < 1$, cioè per accoppiamenti ipocritici.

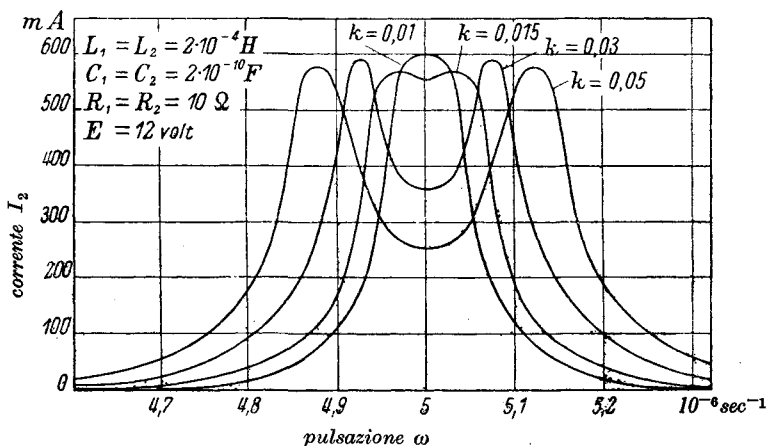



Fig. 69

In particolare, per $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$, la precedente si riduce rigorosamente a

$$\sigma_m = \pm \frac{1}{2\varepsilon} \sqrt{k^2\varepsilon^2 - 1}\,, \tag{37'}$$

che, non appena $k\varepsilon$ raggiunge il valore di poche unità, equivale sensibilmente a $\sigma_m = \pm \dfrac{k}{2}$, e ciò sta ad indicare che le pulsazioni di massima I_2 corrispondono prossimamente a quelle che abbiamo indicato con ω', ω'' al n. 18 (1). La fig. 69 mostra l'andamento della curva di I_2 in funzione di ω (detta *curva di risonanza*) per la coppia di circuiti le cui costanti sono indicate nella figura stessa e per diversi valori di k non inferiori all'accoppiamento critico, il quale, per essere $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 100$, è quello definito da $k = 0{,}01$.

(1) Infatti, per $\sigma = \pm \dfrac{k}{2}$, si ha $\omega = \omega_0\left(1 \pm \dfrac{k}{2}\right) \cong \dfrac{\omega_0}{\sqrt{1 \mp k}}$.

La curva di risonanza di sistemi circuitali ad accoppiamento ipercritico accusa dunque un andamento relativamente poco variabile nell'intervallo fra i due massimi e variazione piuttosto rapida a sinistra del primo e a destra del secondo, il che corrisponde ad un'attitudine del sistema a favorire tutta la « gamma » di frequenze compresa fra i due massimi, presentando così una certa selettività *rispetto ad una gamma* anzichè rispetto ad una sola frequenza, il che è particolarmente utile specialmente nelle applicazioni alla radiotelefonia.

A tali dispositivi si dà perciò il nome di *filtri di banda*; e la *larghezza* della gamma o banda favorita corrisponde prossimamente a $k\omega_0$.

La nostra indagine può completarsi esaminando l'andamento della corrente primaria. Nel modo più breve vi si arriva ricordando che il modulo di tale corrente si ottiene da quello della secondaria moltiplicando quest'ultimo per $\frac{Z_2}{M\omega}$, e pertanto, con le semplificazioni adottate, il quadrato del modulo I_1 è inversamente proporzionale al rapporto fra la espressione (35) e il modulo di $1 + 2j\varepsilon_2\sigma$, cioè si ha

$$AI_1^2 = \frac{1 + 4\varepsilon_2^2\sigma}{(1 + k^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 4\varepsilon_1\varepsilon_2\sigma^2)^2 + 4(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2\sigma^2},$$

dove A indica un fattore indipendente da σ. Nel caso di ε_1, ε_2 poco diversi, potremo ritenere $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 \backsimeq 4\varepsilon_1\varepsilon_2$, con che si avrà:

$$AI_1^2 = \frac{1 + 4\varepsilon_2\sigma}{(1 + k^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 4\varepsilon_1\varepsilon_2\sigma^2)^2 + 16\varepsilon_1\varepsilon_2\sigma^2},$$

Uguagliando a zero la derivata rispetto a σ, si trova che i massimi e minimi di I_1 si verificano per $\sigma = 0$ e per

$$\sigma = \pm \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}} \left(-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} + \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_2^2} - 2\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} + 2k^2\varepsilon_1^2 + (k^2\varepsilon_1\varepsilon_2 + 1)^2} \right)^{\frac{1}{2}},$$

quando questi ultimi valori siano reali. In tale caso a questi corrispondono effettivamente due massimi, mentre per $\sigma = 0$ si ha un minimo; quando invece la quantità entro parentesi è negativa, si ha soltanto un massimo, e questo per $\sigma = 0$.

Ad es. per $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$, la condizione affinchè vi siano due massimi si riduce a

$$4k^2\varepsilon^2 + k^4\varepsilon^4 > 1,$$

che è soddisfatta da $k^2\varepsilon^2 > \sqrt{5} - 2$, cioè da $k > \frac{0,48}{\varepsilon}$. In particolare si ha che, all'accoppiamento critico ($k^2\varepsilon^2 = 1$), mentre la curva di I_2 presenta un solo massimo, quella di I_1 ne presenta due simmetricamente disposti rispetto alla pulsazione ω_0, cui corrisponde un minimo, e la loro distanza relativa da ω_0 è misurata da $\sigma = \pm \frac{\sqrt{5} - 1}{2\varepsilon} = \pm \frac{0,61}{\varepsilon}$.

23. - Curva di risonanza dei filtri di banda. — Per rendersi meglio conto dell'andamento della corrente secondaria in un sistema come quello che stiamo esaminando, usato come filtro di banda, conviene innanzi tutto esaminare il caso che chiameremo *pseudocritico*, in cui coincidono le pulsazioni σ_m definite dalle (37) (o 37'), cioè quello in cui si ha

$$k^2\varepsilon_1\varepsilon_2 + 1 = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2}{2\varepsilon_1\varepsilon_2}. \tag{38}$$

In tal caso, l'espressione (35), cui è inversamente proporzionale il quadrato di I_2, si può scrivere:

$$\left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon} - 4\varepsilon_1\varepsilon_2\sigma^2\right)^2 + 4(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2\sigma^2, \tag{39}$$

avendo indicato con

$$\varepsilon = \frac{2\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$$

la media armonica dei due coefficienti di risonanza ε_1 ed ε_2.

Il minimo dell'espressione (39), corrispondente a $\sigma = 0$, è $\left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon}\right)^2$, talchè pel rapporto $\varrho = \frac{I_2}{I_{2\,max}}$ si ha:

$$\varrho^2 = (1 - 2\varepsilon^2\sigma^2)^2 + 4\varepsilon^2\sigma^2 = 1 + 4\varepsilon^4\sigma^4, \tag{40}$$

mentre, per l'analogo rapporto, che indicheremo con ϱ', nel caso di un circuito semplice di coefficiente di risonanza ε, si avrebbe (formola (16) in cui si ponga $x \cong 2\varepsilon\sigma$):

$$\varrho'^2 = 1 + 4\varepsilon^2\sigma^2.$$

Il confronto delle espressioni di ϱ e ϱ' mostra che la curva di risonanza del sistema attuale è molto più appiattita di quella relativa al circuito semplice di coefficiente di risonanza ε finchè σ è abbastanza piccolo, mentre, per valori di σ sufficientemente elevati, essa presenta discesa assai più rapida di quella. Più precisamente, finchè è $\sigma^4\varepsilon^4 < \sigma^2\varepsilon^2$ cioè $|\sigma| < \frac{1}{\varepsilon}$, la curva attuale si mantiene tutta al di sopra dell'altra mentre, per $|\sigma| > \frac{1}{\varepsilon}$, la diminuzione delle ordinate è notevolmente più sentita nella prima che nella seconda.

Però, per un esatto apprezzamento di tale risultato, bisogna tener presente che il numero ε è la media armonica di ε_1 ed ε_2, e pertanto, se ε_1, ε_2 sono poco differenti fra loro, ε differisce poco da entrambe, mentre, per ε_1, ε_2 molto diversi, ε è invece vicino al doppio del minore.

La semilarghezza $\sigma\omega_0$ della banda entro la quale la diminuzione rela-

tiva della corrente, rispetto al massimo, ha valori minori di un prefissato (piccolo) numero β, si determinerà mediante la

$$\varrho = \sqrt{1 + 4\varepsilon^4\sigma^4} \cong 1 + 2\varepsilon^4\sigma^4$$

da cui, per $\varrho = 1 + \beta$, si deduce

$$\sigma = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\beta}{2}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Abbiansi ad es. due circuiti caratterizzati da $\varepsilon_1 = 50$, $\varepsilon_2 = 300$ e quindi $\varepsilon = 86$. L'accoppiamento pseudocritico risulta per essi definito, conformemente alla (38), da $k = 0{,}014$. Se ci si propone di realizzare correnti secondarie differenti non più del 5% dalla massima, sarà da porre $\beta = \frac{1}{0{,}95} - 1 = 0{,}05$, con che si ha

$$\sigma = \frac{1}{86}\sqrt[4]{0{,}025} = 0{,}00462 \ ;$$

la larghezza della banda così delimitata risulterà di $2\sigma\omega_0 = 0{,}0092\,\omega_0$. Si osserverà che per lo stesso scarto di frequenza la riduzione relativa della corrente rispetto al massimo, sarebbe, pel circuito di risonanza meno acuta ($\varepsilon_1 = 50$) supposto eccitato direttamente:

$$\sqrt{1 + (2 \cdot 50 \cdot 0{,}00462)^2} - 1 = 0{,}11\,,$$

cioè più che doppia di quella ottenuta col sistema dei due circuiti accoppiati.

Si vede dunque come, mediante l'artificio dell'accoppiamento, si possano ottenere sensibili modificazioni nella forma della curva di risonanza del secondario in confronto a quella che potrebbe aversi con alimentazione diretta. Così, in generale, da un secondario a selettività molto (oppure poco) acuta, accoppiandolo ad un primario a basso (rispettivamente elevato) coefficiente di risonanza potrà ottenersi un sistema che presenta scarsa selettività per una certa banda, e per contro selettività assai sentita fuori della banda stessa.

Per assicurare un più deciso effetto filtrante, converrà utilizzare valori di k superiori a quello fornito dalla (38). In tal caso la curva di I_2 presenterà due massimi (pei valori (37) di σ) ed un minimo (per $\sigma = 0$). Un criterio per la scelta di k potrà allora aversi prefissando il rapporto $m(< 1)$ fra il minimo ed il massimo di ϱ.

È facile calcolare il valore che dovrà assegnarsi alla espressione

$$y = k^2\varepsilon_1\varepsilon_2 + 1$$

per realizzare un dato valore di m. Sostituendo in (35) il valore di σ fornito dalla (36), si ha, pel minimo di ϱ^2:

$$\frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\,y-\frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^4}{4\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2},$$

mentre il massimo (per $\sigma = 0$) vale y^2. Essendo ε, come sopra, la media armonica di ε_1, ε_2, poniamo

$$\beta=\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{\varepsilon y}.$$

Siccome all'accoppiamento pseudocritico è $\beta = 1$, nel caso che qui ci occupa dovrà essere $\beta < 1$. Uguagliando ad m il rapporto fra il minimo ed il massimo di ϱ, si ha per β l'equazione:

$$\beta^2-2\beta+m^2=0,$$

delle cui soluzioni dovremo scegliere quella che è minore dell'unità, cioè $1-\sqrt{1-m^2}$. Dunque il valore m del rapporto fra la minima e la massima corrente si realizza per

$$k^2\varepsilon_1\varepsilon_2+1=\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{\varepsilon(1-\sqrt{1-m^2})}.$$

In particolare, per $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon$, si trova $k=\dfrac{1{,}38}{\varepsilon}$ per $m = 0{,}95$, $k=\dfrac{1{,}58}{\varepsilon}$ per $m = 0{,}9$, ecc.

24. - Coefficiente apparente di risonanza. - Coefficiente di trasferimento. — In generale, quando i due circuiti primario e secondario sono separatamente accordati sulla pulsazione impressa, avendosi $X_1 = X_2 = 0$, la prima delle (26′) si riduce a

$$R_1' = R_1+\frac{M^2\omega^2}{R_2}, \tag{26″}$$

che, introducendo i coefficienti di risonanza ε_1, ε_2 dei due circuiti separatamente considerati, ed osservando che è:

$$M^2\omega^2=k^2L_1\omega L_2\omega=R_1R_2k^2\varepsilon_1\varepsilon_2,$$

si può scrivere:

$$R_1'=R_1(1+k^2\varepsilon_1\varepsilon_2).$$

Essa mostra che la presenza del secondario accordato determina una modificazione del coefficiente di risonanza del primario, il cui valore da ε_1 passa ad

$$\varepsilon_1'=\frac{\varepsilon_1}{1+k^2\varepsilon_1\varepsilon_2},$$

che potrà così chiamarsi *coefficiente apparente di risonanza.*

La grandezza $k^2\varepsilon_1\varepsilon_2$ è strettamente legata al così detto *coefficiente di trasferimento* energetico, per il quale intendiamo il rapporto η fra la potenza trasmessa al secondario e quella assorbita dal primario, cioè, in sostanza, il *rendimento* del sistema trasformatorico costituito dalla coppia di circuiti, quando si consideri come potenza utile tutta quella che si manifesta nel secondario.

Essendo $R_1 I_1^2$ la potenza dissipata nel primario ed $R_1' I_1^2$ quella erogata dal generatore, la potenza trasferita al secondario equivale alla differenza $(R_1' - R_1) I_1^2$, dal che segue per η il valore:

$$\eta = \frac{R_1' - R_1}{R_1} = \frac{k^2\varepsilon_1\varepsilon_2}{1 + k^2\varepsilon_1\varepsilon_2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{k^2\varepsilon_1\varepsilon_2}}.$$

Come si vede, il coefficiente η è tanto più prossimo all'unità quanto maggiori sono i coefficienti di risonanza dei due circuiti ed il loro coefficiente d'accoppiamento.

Dalla precedente si ricavano agevolmente le relazioni:

$$(41) \qquad k^2\varepsilon_1\varepsilon_2 = \frac{\eta}{1 - \eta}, \quad 1 + k^2\varepsilon_1\varepsilon_2 = \frac{1}{1 - \eta},$$

l'ultima delle quali permette di calcolare il rapporto di riduzione del coefficiente di risonanza, noto che sia il coefficiente di trasferimento η. Ad es. per $\eta = 0{,}8$; $0{,}9$; $0{,}95$ si avrebbe rispettivamente $\varepsilon_1' = \frac{\varepsilon_1}{5}, \frac{\varepsilon_1}{10}, \frac{\varepsilon_1}{20}$.

Per un dato valore della tensione applicata al primario, la potenza secondaria varia, al variare della resistenza secondaria, con la stessa legge parabolica (v. El., IV, 9) che si verifica in un circuito avente una resistenza fissa R_1 in serie con una $R_1' - R_1$ variabile; in particolare essa è massima per $R_1' - R_1 = R_1$, cioè per $k^2\varepsilon_1\varepsilon_2 = 1$, nel qual caso il rendimento vale 0,5, cioè soltanto metà della potenza erogata dal generatore viene trasferita al secondario.

Talvolta si presenta il caso di un primario *aperiodico*, cioè costituito da una resistenza accompagnata soltanto dall'induttanza a mezzo della quale si effettua l'accoppiamento con un secondario, essendo questo invece costituito da un circuito accordato su una certa pulsazione ω.

Interessa particolarmente in talune applicazioni radiotecniche (amplificazione in ricezione) il caso in cui la resistenza R_1 del primario (resistenza interna di un tubo elettronico) è molto elevata in confronto alla sua reattanza $L_1\omega$. Il calcolo della corrente secondaria può allora condursi abbastanza comodamente appoggiandosi alla (25'), secondo la quale, come già si è osservato, il secondario si comporta come un circuito ali-

mentato da una tensione di modulo $\frac{M\omega}{Z_1} E \cong \frac{M\omega}{R_1} E$ e dotato di impedenza

$$\mathbf{Z}_2' = \mathbf{Z}_2 + \frac{M^2\omega^2}{\mathbf{Z}_1} \cong \mathbf{Z}_2 + \frac{M^2\omega^2}{R_1},$$

la cui costituzione risulta così essere uguale a quella della impedenza effettiva $\mathbf{Z}_2$ salvo l'aumento di $\frac{M^2\omega^2}{R_1}$ che incide sulla sola resistenza. Si può quindi concludere che l'accoppiamento ha l'effetto di ridurre il coefficiente di risonanza del secondario nel rapporto

$$\left(R_2 + \frac{M^2\omega^2}{R_1}\right) : R_2 .$$

Per esempio, con un secondario avente $L_2 = 200\ \mu\text{H}$, $C_2 = 200\ \mu\mu\text{F}$, $R_2 = 12{,}5\ \Omega$, e quindi $\omega_0 = 5 \cdot 10^6$, accoppiato con $k = 0{,}8$ ad un primario avente $R_1 = 10\,000\ \Omega$, $L_1 = 50\ \mu\text{H}$, si avrebbe

$$\frac{M^2\omega^2}{R_1} = \frac{k^2 L_1 L_2 \omega^2}{R_1} = \frac{0{,}8^2 \cdot 200 \cdot 50 \cdot 5^2}{10^4} = 16\ \Omega\ ;$$

pertanto l'effetto dell'accoppiamento si concreta in una riduzione del coefficiente di risonanza che dall'originario valore $\varepsilon = 80$ scende a $\frac{80 \cdot 12{,}5}{12{,}5 + 16} = 35.$

25. - Rendimento dei filtri di banda. — Nel caso dei filtri realizzati mediante circuiti accoppiati, possiamo dimostrare che, quando questi hanno coefficienti di risonanza sensibilmente diversi, si consegue, insieme al desiderato effetto filtrante, anche il non lieve vantaggio di consentire il trasferimento di potenza dall'uno all'altro in buone condizioni di rendimento. Invero, da quanto si è veduto, risulta che l'andamento della curva di I_2 non dipende che dalla media armonica dei due coefficienti di risonanza; in particolare esso è indipendente dal coefficiente d'accoppiamento k. Siccome, d'altra parte, con valori di ε_1, ε_2 abbastanza lontani l'uno dall'altro, il valore di k corrispondente al caso pseudocritico può risultare sensibilmente maggiore di quello pertinente al caso critico, segue che il prodotto $k^2\varepsilon_1\varepsilon_2$ può raggiungere valori anche sensibilmente maggiori dell'unità, e ciò appunto consente di realizzare rendimenti maggiori del valore 0,5 spettante al caso critico.

Possiamo anzi precisare la cosa, determinando senz'altro qual valore deve attribuirsi al rapporto $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$ affinchè il rendimento di trasmissione ri-

sulti uguale ad un dato numero $\eta < 1$. Invero, se nella (38) si sostituisce a $k^2\varepsilon_1\varepsilon_2$ il valore $\frac{\eta}{1-\eta}$ fornito dalla prima delle (41), si ottiene

$$\frac{\eta}{1-\eta} = \frac{x}{2} + \frac{1}{2x} \quad \text{con } x = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \left(\text{oppure } \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right).$$

La minore delle due radici di questa equazione reciproca, cioè

$$x = \frac{1}{1-\eta}(\eta - \sqrt{2\eta - 1})$$

fornisce il cercato rapporto fra il minore ed il maggiore dei due coefficienti ε_1, ε_2. Scelti opportunamente questi, il corrispondente valore di k si determinerà poi mediante la

$$k^2\varepsilon_1\varepsilon_2(1-\eta) = \eta .$$

Così, per un rendimento $\eta = 0{,}8$, si avrà $x = 0{,}1275$, quindi, fissati ad es. $\varepsilon_1 = 25{,}5$, $\varepsilon_2 = 200$, si dovrà poi assumere $k = 0{,}028$.

26. - Rami in parallelo accoppiati magneticamente. — Vogliamo ora completare lo studio della prima delle trasformazioni indicate al n. 14 esaminando il caso di due impedenze in parallelo contenenti delle induttanze L_1, L_2 fra loro magneticamente accoppiate mediante una mutua induttanza M. In tal caso, assunti, come generalmente si suole, i sensi positivi delle correnti $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ come indicato in fig. 70, si potranno scrivere relazioni analoghe alle (23) del n. 16, alle quali ci converrà ora dare la forma

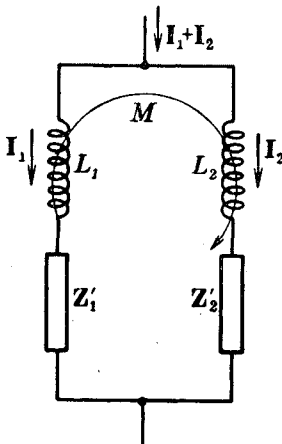
Fig. 70

$$\mathbf{E} = \mathbf{Z}_1'\mathbf{I}_1 + j(L_1 - M)\omega\mathbf{I}_1 + j\omega M(\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2)$$
$$\mathbf{E} = \mathbf{Z}_2'\mathbf{I}_2 + j(L_2 - M)\omega\mathbf{I}_2 + j\omega M(\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2)\,,$$

per mettere in evidenza la corrente $\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2$ affluente al sistema, di cui con $\mathbf{E}$ si è indicata la tensione ai capi.

Ricavando $\mathbf{I}_1$ dalla prima, $\mathbf{I}_2$ dalla seconda e sommando, si perviene alla relazione

$$\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2} = j\omega M + \frac{1}{\dfrac{1}{\mathbf{Z}_1' + j(L_1 - M)\omega} + \dfrac{1}{\mathbf{Z}_2' + j(L_2 - M)\omega}}\,,$$

secondo la quale il sistema disegnato equivale a quello di fig. 71 che da

esso differisce in quanto nei due rami figurano le induttanze $L_1 - M$, $L_2 - M$ in luogo delle L_1, L_2, ed in serie con l'arco doppio figura l'induttanza M, essendo le tre induttanze $L_1 - M$, $L_2 - M$, M da ritenersi prive di reciproca influenza magnetica.

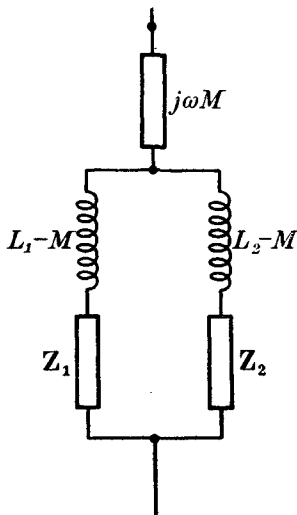



Fig. 71

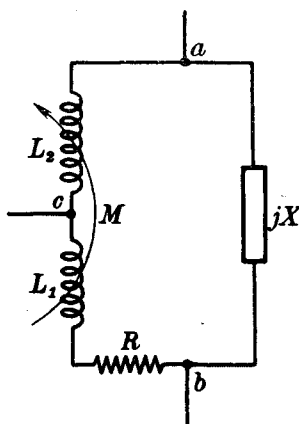
Un caso particolarmente importante in pratica è quello che si ottiene da un sistema del tipo *ab* indicato in fig. 72, spostando la presa dal punto *a* ad un punto intermedio *c* dell' (unica) bobina. Se, come appare naturale di fare, si assumono i due sensi positivi in modo che siano concordi lungo la bobina, nelle precedenti si dovranno mutare i segni ad $\mathbf{I}_2$ e ad M ed il valore M che così figura nelle formole risulta positivo. Già sappiamo che se il sistema di partenza è risonante per una certa pulsazione ω ed i rapporti $\frac{|X|}{R}$ di ciascun ramo sono sufficientemente elevati, esso, alla pulsazione ω, equivale alla resistenza $\frac{L^2\omega^2}{R}$. Ora, richiamando quanto fu veduto al n. 14, siamo in grado di asserire che, alla stessa pulsazione, il sistema fra *b* e *c* equivale pure ad una resistenza R_e, e precisamente, trascurando al solito termini dell'ordine del quadrato di $\frac{R}{(L_1 + M)\omega}$, si ha:

$$R_e = \frac{(L_1 + M)^2\omega^2}{R},$$

Fig. 72

semprechè si possa trascurare il contributo che all'impedenza totale $\mathbf{Z}$ dà la reattanza $j\omega M$ che, secondo le precedenti considerazioni, va ad aggiungersi in serie col sistema stesso. Ora ciò è effettivamente lecito, come si può riconoscere osservando che si ha

$$\mathbf{Z} \cong j\omega M + R_e = R_e\left(1 + \frac{j\omega M}{R_e}\right) =$$
$$= R_e\left(1 + \frac{j\omega MR}{(L_1 + M)^2\omega^2}\right) = R_e\left(1 + j\frac{\alpha}{\varepsilon}\right),$$

dove $\alpha = \frac{M}{L_1 + M}$ è certamente < 1 (perchè, come si è osservato, M è positivo) ed $\varepsilon = \frac{(L_1 + M)\omega}{R}$ rappresenta il coefficiente di risonanza del

sistema *bc*. Il modulo di **Z** vale

$$Z \cong R_e\left(1 + \frac{\alpha^2}{2\varepsilon^2}\right),$$

cioè sensibilmente R_e, nei soliti limiti d'approssimazione [1].

27. - Trasformazione dei sistemi precedenti. — Se si esamina attentamente il funzionamento del sistema di due circuiti accoppiati che ha formato l'oggetto del nostro precedente studio, si comprende che l'intima essenza dei fenomeni in esso riscontrati riposa nel particolare comportamento dell'energia magnetica.

In un circuito semplice, che sia sede di corrente alternata, quell'energia viene alternativamente fornita dal generatore e ad esso restituita, in guisa che questo scambio interessa necessariamente l'unico circuito presente. Invece, nel caso di una coppia di circuiti, pur non venendo meno tale carattere fondamentale, quell'energia è altresì impegnata in fluttuazioni fra i due circuiti; essa anzi costituisce il tramite per il quale l'uno dei circuiti riesce ad alimentare l'altro.

Lasciandosi guidare da tali considerazioni, si comprende come si possa realizzare una analoga situazione in una coppia di circuiti per la quale, anche con mezzi diversi, le cose siano disposte in guisa che una parte dell'energia magnetica complessiva interessi contemporaneamente i due circuiti.

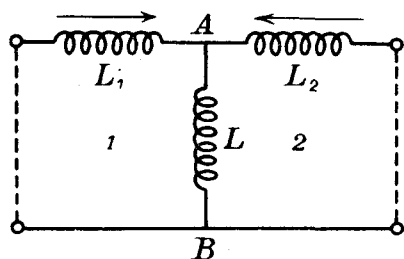



Fig. 73

Una tale disposizione potrebbe essere quella rappresentata in fig. 73; si tratta in sostanza di un unico circuito con una induttanza L derivata fra due punti A e B di esso. Sopprimendo la branca di destra oppure quella di sinistra si vengono ad avere due circuiti, che chiameremo *1* e *2*, di ciascuno dei quali fa parte la induttanza L. Se i campi magnetici in L_1, L_2, L non hanno linee comuni, cioè se sono nulle (trascurabili) le m. i. fra L_1, L_2, ed L, si può dire che il primo di essi ha induttanza complessiva $L + L_1$, l'altro $L + L_2$.

Orbene, si può agevolmente dimostrare che il comportamento di tale sistema è in tutto e per tutto identico a quello di due circuiti come *1* e *2*, pensati senza parti comuni, ed aventi un coefficiente di induzione mutua precisamente uguale ad L. Infatti, se con i_1 ed i_2 si indicano i valori istantanei delle correnti nelle due branche (intese positive nel senso indi-

[1] Con ciò è dimostrato quanto era stato asserito a pag. 114 nota.

cato dalle frecce di fig. 73) in un qualunque regime elettrico in cui il sistema venga a trovarsi, sarà $i_1 + i_2$ il valore nello stesso istante della corrente nella branca comune, ed allora gli effetti induttivi nei due circuiti si concretano nel sorgere di due f. e. m. i cui valori sono rispettivamente:

$$-L_1 \frac{di_1}{dt} - L \frac{d(i_1 + i_2)}{dt} \quad \text{e} \quad -L_2 \frac{di_2}{dt} - L \frac{d(i_1 + i_2)}{dt},$$

cioè:

$$-(L + L_1) \frac{di_1}{dt} - L \frac{di_2}{dt} \quad \text{e} \quad -(L + L_2) \frac{di_2}{dt} - L \frac{di_1}{dt},$$

quindi identiche a quelle che si avrebbero in due circuiti separati di induttanze $L_1 + L$ ed $L_2 + L$ e magneticamente legati da una mutua induttanza L.

Pertanto il sistema circuitale della fig. 73 può pensarsi equivalente ad uno di quelli del tipo studiato nei nn. precc., e per esso si potrebbero ripetere tutte le considerazioni ed i calcoli allora fatti, sostituendo al fattore d'accoppiamento il rapporto

$$k = \frac{L}{\sqrt{(L_1 + L)(L_2 + L)}} \tag{42}$$

fra la induttanza comune e la media geometrica delle induttanze totali dei due circuiti *1* e *2*.

Tale rapporto, in regime di corrente alternata di qualunque pulsazione ω, equivale a quello

$$\frac{X}{\sqrt{(X + X_1)(X + X_2)}} \tag{43}$$

fra la reattanza comune $X = L\omega$ e la media geometrica delle reattanze induttive singole $X + X_1 = (L + L_1)\omega$, $X + X_2 = (L + L_2)\omega$ dei due circuiti.

È per questa ragione che ad una disposizione come quella della fig. 73 si dà ancora il nome di *accoppiamento* fra i due circuiti *1* e *2* (mentre una tale denominazione dovrebbe propriamente riservarsi soltanto alle disposizioni del tipo di fig. 63).

Nel num. successivo avremo occasione di ritornare su circuiti siffatti; qui vogliamo subito rilevare una circostanza fondamentale, che cioè queste considerazioni sono invertibili; vale a dire che ad un sistema come quello di fig. 63 può sempre sostituirsene uno, ad esso equivalente, del tipo di fig. 73.

Interessa pertanto procurarsi le espressioni effettive degli elementi di tale sistema equivalente, note che siano quelle del dato sistema di due circuiti ad accoppiamento magnetico, che qui semplificheremo, come alla

fig. 74, allo scopo di mettere in evidenza la sola parte che interessa l'accoppiamento, vale a dire le due induttanze L_1 ed L_2 e la mutua induttanza M.

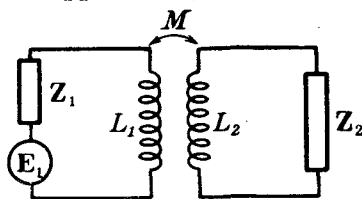



Fig. 74

Per lo scopo cui ora tendiamo ci torna comodo assumere come senso positivo, nel secondario, l'opposto di quello assunto nel primario, intendendo con ciò significare che correnti positive nei due circuiti tendono a produrre flussi opposti in ogni circuito magnetico concatenato con entrambi. Con tale convenzione, le relazioni fondamentali assumeranno l'aspetto:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{Z}_1\mathbf{I}_1 - jM\omega\mathbf{I}_2$$
$$0 = \mathbf{Z}_2\mathbf{I}_2 - jM\omega\mathbf{I}_1 .$$

Alla trasformazione accennata perveniamo immediatamente se osserviamo che queste relazioni possono scriversi identicamente:

$$\mathbf{E}_1 = (\mathbf{Z}_1 - jM\omega)\mathbf{I}_1 + jM\omega(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2)$$
$$0 = (\mathbf{Z}_2 - jM\omega)\mathbf{I}_2 - jM\omega(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2) ,$$

nelle quali, per così dire, si legge che il dato sistema è equivalente a quello disegnato in fig. 75, dove $\mathbf{I}_2$, in virtù della convenzione fatta sui segni, è qui da ritenersi corrente *uscente* dal ramo destro.

Il circuito di fig. 75 è senza dubbio equivalente a quello dei due dati circuiti accoppiati e presenta anche il non lieve vantaggio di mettere in evidenza rami in cui circolano le *effettive* correnti $\mathbf{I}_1$ ed $\mathbf{I}_2$ dei circuiti dati, ma esso non può in generale ritenersi realizzabile fisicamente con elementi (del tipo L o C) indipendenti dalla frequenza.

Infatti, immaginiamo, per maggiore chiarezza che, dalle $\mathbf{Z}_1$ e $\mathbf{Z}_2$, impedenze complessive del primario e del secondario, si separino dal resto le reattanze $jL_1\omega$, $jL_2\omega$ relative alle induttanze di accoppiamento, scrivendo:

$$\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_1' + jL_1\omega , \quad \mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_2' + jL_2\omega .$$

Ora, siccome M^2 supera il prodotto L_1L_2, potrà avvenire che una delle due differenze

$$L_1 - M, \quad L_2 - M$$

risulti negativa, e pertanto la corrispondente reattanza, p. es. $j\omega(L_1 - M)$, non potrebbe materialmente costituirsi se non mediante l'uso di condensatori. Ma allora, poichè la reattanza di un condensatore varia in modo inversamente proporzionale alla frequenza,

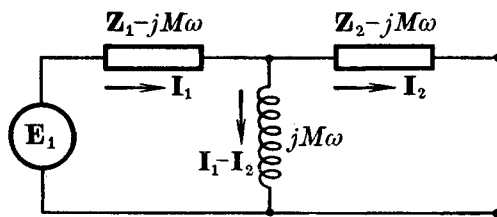



Fig. 75

mentre quelle di $j(L_1 - M)\omega$, $j(L_2 - M)\omega$ variano invece proporzionalmente alla frequenza, la capacità del condensatore dovrebbe necessariamente modificarsi ad ogni modificazione della frequenza, il che val quanto dire che non si può addivenire alla realizzazione di una struttura equivalente alla data in *ogni condizione di funzionamento*.

Fig. 76

Questo inconveniente può essere superato fondandosi su una seconda, pur semplicissima, osservazione, che cioè le equazioni fondamentali sopra scritte non mutano se si moltiplica M per un qualunque numero u, purchè contemporaneamente si muti I_2 in $\frac{I_2}{u}$ e Z_2 in $u^2 Z_2$ $\left(\text{e quindi ogni elemento del tipo } R_2, L_2 \text{ e } C_2 \text{ in } u^2 R_2, u^2 L_2, \frac{C_2}{u^2}\right)$.

Fig. 77

Ciò porta di conseguenza che se nel circuito *2* sono contenute delle sedi di f. e. m. E_2, queste dovranno intendersi sostituite con uE_2 (¹). Analogamente, si potrebbero invece lasciare inalterati gli elementi elettrici del circuito *2* e modificare quelli del circuito *1* sostituendo ad E_1, Z_1, I_1, rispettivamente uE_1, u^2Z_1, $\frac{I_1}{u}$.

Si può dunque asserire che, per qualunque valore di u, il circuito di

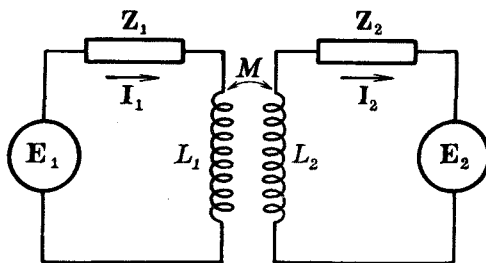
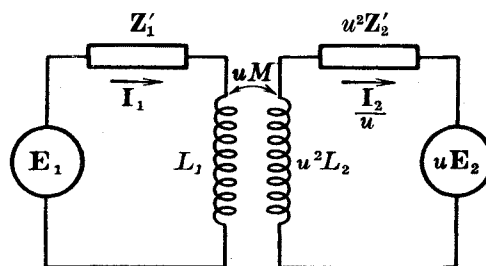
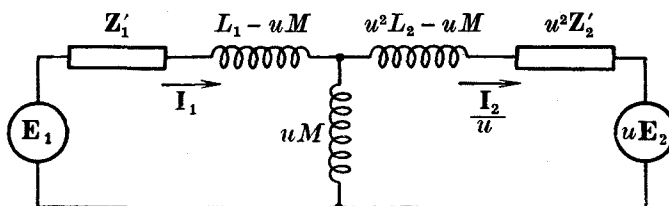



Fig. 78

fig. 77 (o quello che se ne deduce scambiando gli indici *1*, *2*) è equivalente a quello di fig. 76.

(¹) Ciò riesce evidente se si pensa che la corrente deve risultare divisa per u, mentre l'impedenza viene moltiplicata per u^2.

Se ora a quest'ultimo si applica la trasformazione suggerita dalla prima osservazione (ed illustrata in fig. 71), si può anche concludere che il sistema di fig. 77 è equivalente a quello di fig. 78 (o a quello che se ne deduce scambiando gli indici *1*, *2*).

In particolare si osservi che le induttanze nei due rami longitudinali valgono:

$$L_1 - uM\,, \quad u^2L_2 - uM\,.$$

Orbene, è importante rilevare che si può sempre scegliere u in guisa che esse risultino ambedue positive, il che, come si è detto, è essenziale

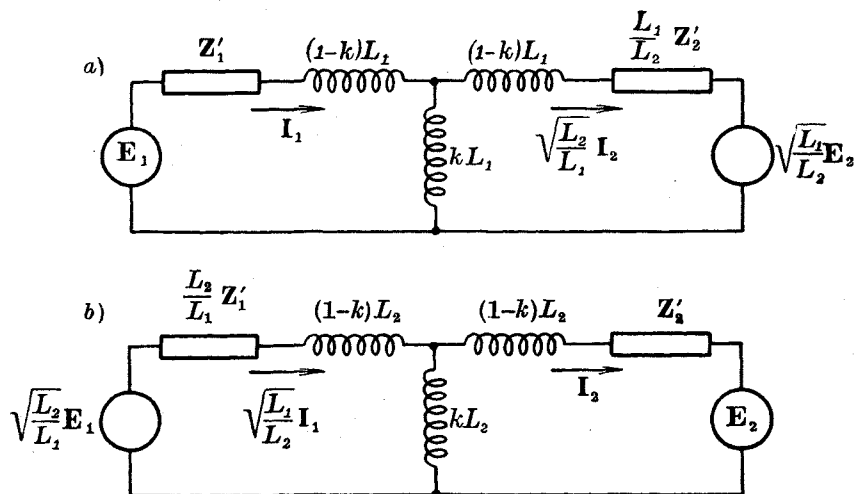



Fig. 79

al fine di realizzare un sistema circuitale di costituzione indipendente dalla frequenza. All'uopo basterà prendere per u un numero positivo tale che risulti tanto $L_1 \geq uM$ quanto $uL_2 \geq M$, cioè un numero compreso fra $\frac{L_1}{M}$ e $\frac{M}{L_2}$.

In particolare si potrà prendere $u = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$. Così facendo si ottiene un risultato particolarmente notevole, che cioè le due induttanze longitudinali risultano uguali ed il loro comune valore, come facilmente si verifica, è $(1-k)L_1$, essendo k il coefficiente d'accoppiamento. La induttanza del ramo centrale vale kL_1, e con ciò si perviene al sistema di fig. 79 *a*), in cui sono messe in evidenza le modificazioni apportate agli elementi elettrici (correnti, tensioni, impedenze) del secondario. In modo perfettamente analogo si potrebbe invece pervenire al sistema equivalente di fig. 79 *b*).

A titolo di esercizio, il lettore potrà verificare che, posto ad es. $\mathbf{E}_2 = 0$ nel primo caso, $\mathbf{E}_1 = 0$ nel secondo, le impedenze che i sistemi di figg. 79 *a*), *b*) presentano fra i morsetti di $\mathbf{E}_1$, risp. $\mathbf{E}_2$ valgono ordinatamente

$$\mathbf{Z}_1 + \frac{M^2\omega^2}{\mathbf{Z}_2}, \quad \mathbf{Z}_2 + \frac{M^2\omega^2}{\mathbf{Z}_1},$$

cioè si identificano con le espressioni (26) e (27).

È evidente l'analogia di questo procedimento con quello che conduce al noto circuito equivalente ad un trasformatore (El., XIII, 6). Si può pertanto concludere che il considerato sistema di due circuiti accoppiati si comporta come un trasformatore la cui induttanza di eccitazione è $k\sqrt{L_1L_2}$, le cui induttanze di dispersione sono $L_1(1-k)$ ed $L_2(1-k)$, e il cui quadrato del rapporto di trasformazione uguaglia il rapporto fra le induttanze L_1 ed L_2. Così gli elementi come $\mathbf{Z}_2u^2$ dianzi considerati non sono che gli elementi di *secondario ridotti a primario* (1).

Se scriviamo l'espressione effettiva di $\mathbf{Z}_2$:

$$\mathbf{Z}_2 = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right),$$

mettendone cioè in evidenza gli elementi costitutivi R, L, C considerati disposti in serie, si vede che la riduzione a primario di ciascuno di essi comporta per la resistenza e l'induttanza una moltiplicazione per u^2 mentre per la capacità il corrispondente fattore è $\frac{1}{u^2}$. Da ciò consegue che le espressioni come LC ed $\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ attraverso tale trasformazione non si alterano; e lo stesso avviene per tutte quelle che, come Li^2, Cv^2; Ri^2, $\frac{v^2}{R}$ hanno, al pari di esse, un significato *non elettrico*, intendendosi con ciò che il loro valore è esprimibile in unità indipendenti dalle unità elettriche. Invero le prime due corrispondono, l'una al quadrato di un tempo, l'altra ad un numero (coefficiente di risonanza), le seconde rispettivamente ad energie e a potenze.

È particolarmente interessante il caso ideale (limite) in cui è $k = 1$ e la induttanza intermedia L è infinitamente grande. In tale ipotesi, il ramo L può, per ogni valore finito della frequenza di funzionamento, sopprimersi, e si può concludere che tutto si svolge come se gli elementi del secondario, debitamente ridotti a primario $\left(\text{con } u^2 = \lim \frac{L_1}{L_2}\right)$, esclusi

(1) Tale equivalenza è stata così dimostrata con riferimento ad una pulsazione determinata ω, ma siccome il risultato cui siamo pervenuti è da questa indipendente, si può concludere che essa sussiste sempre.

quelli facenti parte del sistema accoppiante, fossero inseriti nel primario. Se, pur essendo $L = \infty$, k fosse diverso dall'unità, tale conclusione si modificherebbe soltanto nel senso che il primario, oltre agli elementi effettivi del secondario estranei al sistema accoppiante, conterrebbe in serie anche una induttanza $2(1 - k)L_1$.

Fig. 80

In casi di questo genere si può asserire che l'accoppiamento *trasferisce* al primario tutti quei caratteri del secondario aventi significati ed espressioni indipendenti dal rapporto u, come in particolare abbiamo constatato avvenire per la pulsazione di risonanza $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ ed il coefficiente di risonanza $\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Come è stato sopra osservato, la trasformazione illustrata dalla fig. corrisponde a quella che conduce al noto circuito equivalente degli ordinari trasformatori.

Si potrebbe ora chiedere se si possa pervenire ad una analoga trasformazione nel caso di connessione di tipo autotrasformatorico, cioè se si possa, per un tale tipo, pervenire ad un circuito equivalente atto a mettere in diretta evidenza l'influenza del grado k d'accoppiamento e quindi l'importanza relativa del coefficiente di *dispersione* $1 - k$; e di rendere, per così dire, fra loro paragonabili gli elementi elettrici in giuoco nei circuiti primario e secondario, sfruttando la utile e feconda nozione di elementi dell'un circuito *ridotti* all'altro.

Ci limiteremo, per semplicità, al caso dell'accoppiamento perfetto, cioè $L_1L_2 = M^2$ e quindi $L = (\sqrt{L_1} + \sqrt{L_2})^2$.

Le equazioni che governano il funzionamento del sistema autotrasformatorico disegnato in fig. 80, sono

$$\mathbf{E} = \mathbf{Z}_1'\mathbf{I}_1 + jL_1\omega\mathbf{I}_1 - jM\omega(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1) - jL_2\omega(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1) + jM\omega\mathbf{I}_1$$

$$0 = jL_2\omega(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1) - jM\omega\mathbf{I}_1 - \mathbf{Z}_2'\mathbf{I}_2 ,$$

cioè

$$(44) \qquad \begin{cases} \mathbf{E} = \mathbf{Z}_1'\mathbf{I}_1 + jL\omega\mathbf{I}_1 - j(L_2 + M)\omega\mathbf{I}_2 \\ jL_2\omega\mathbf{I}_2 - j(L_2 + M)\omega\mathbf{I}_1 = \mathbf{Z}_2'\mathbf{I}_2 , \end{cases}$$

avendo indicato con $L = L_1 + L_2 + 2M$ l'induttanza totale fra A e B.

Si osservi che le equazioni (44) rimangono inalterate se si mutano

$$\mathbf{I}_2 , \quad \mathbf{Z}_2' , \quad L_2 + M , \quad L_2$$

rispettivamente in

$$\frac{\mathbf{I}_2}{u} , \quad u^2\mathbf{Z}_2' , \quad u(L_2 + M) , \quad u^2L_2 ,$$

lasciando inalterato L. Tali modificazioni esigono ovviamente che anche L_1 venga modificato, e precisamente, se si indicano con L_1', L_2', M' i nuovi valori di L_1, L_2, M, essi dovranno soddisfare alle relazioni

$$L_1' + L_2' + 2M' = L_1 + L_2 + 2M\,,$$
$$L_2' + M' = u(L_2 + M)\,, \qquad L_2' = u^2 L_2\,.$$

Fig. 81

Si potrebbe verificare che a queste in generale riesce possibile soddisfare. Per il nostro scopo ci basta esaminare il caso particolare in cui ad u venga attribuito il valore $\sqrt{\dfrac{L}{L_2}}$. Dalla terza segue allora $L_2' = L$ e dalla seconda

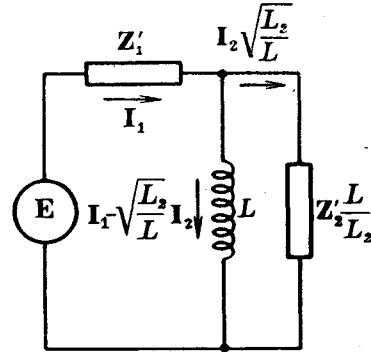
$$L_2' + M' = \sqrt{\frac{L}{L_2}}\,(L_2 + M)\,,$$

che, sostituendo $\sqrt{L_1 L_2}$ ad M e ricordando che è $\sqrt{L_1} + \sqrt{L_2} = \sqrt{L}$, fornisce

$$L_2' + M' = L\,,$$

dopo di che, confrontando con la prima, si ha

$$L_1' + M' = 0\,.$$

Il dato circuito è dunque equivalente a quello di fig. 81, il quale differisce dal dato in ciò, che la derivazione destinata ad alimentare il secondario è fatta sulla intera L, anzichè su una parte di essa, cosicchè il secondario stesso viene a trovarsi alimentato dalla stessa tensione agente nel primario (diminuita, ben inteso, della parte assorbita dalla impedenza $\mathbf{Z}_1'$, estranea al sistema autotrasformatorico). Gli elementi del secondario debbono contemporaneamente essere ridotti a primario secondo una legge del tutto simile a quella seguita nel caso trasformatorico, cioè alla corrente effettiva si sostituisce il suo prodotto per $\sqrt{\dfrac{L_2}{L}}$, alle impedenze come $\mathbf{Z}_2'$ i loro prodotti per $\dfrac{L_2}{L}$ $\left(\text{e pertanto le } R', \text{ le } L' \text{ e le } C' \text{ si sostituiscono con } \dfrac{L_2}{L}R',\ \dfrac{L_2}{L}L',\ \dfrac{L}{L_2}C'\right)$, e (quindi) alle eventuali f.e.m. esistenti nel secondario i loro prodotti per $\sqrt{\dfrac{L_2}{L}}$.

28. - Generalizzazione dei sistemi precedenti. — La equivalenza dei sistemi del tipo di fig. 73 con quelli studiati al n. 16 consente di concludere senz'altro che, supponendo i rami *1* e *2* completati con capacità

C_1 e C_2, e ritenendo nulli (trascurabili) gli elementi dissipativi (resistenze), le pulsazioni ω per le quali un tal sistema può divenire sede di corrente alternata, in assenza di f. e. m. impresse nei rami, sono quelle per le quali è soddisfatta la relazione (corrispondente alla (29)):

Fig. 82

$$x_1 x_2 = X^2 ,$$

dove si è posto:

$$x_1 = (L_1 + L)\omega - \frac{1}{C_1\omega} = X_1 + X ,$$

$$x_2 = (L_2 + L)\omega - \frac{1}{C_2\omega} = X_2 + X ,$$

essendo $X_1 = L_1\omega - \frac{1}{C_1\omega}$, $X_2 = L_2\omega - \frac{1}{C_2\omega}$, $X = L\omega$ le reattanze totali dei tre rami derivati fra i due punti A e B.

La precedente, sostituendo ad x_1, x_2 questi loro valori, si scrive:

$$(X_1 + X)(X_2 + X) = X^2 ,$$

che, sviluppando il prodotto indicato, si trasforma in

$$\frac{1}{X} + \frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} = 0 ,$$

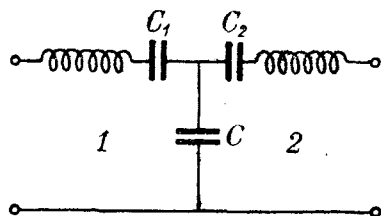
cioè nella condizione di *annullamento della suscettanza totale* fra A e B.

Così le pulsazioni ω di cui trattasi appaiono quelle *di risonanza* del sistema delle tre branche connesse in parallelo fra i punti A e B, essendo tali branche costituite l'una da una sola induttanza, e ciascuna delle altre due da induttanza e capacità in serie.

Più generalmente si potrebbero esaminare sistemi comprendenti, in parallelo fra due punti A e B, più di due branche del tipo delle *1* e *2* precedenti, in aggiunta eventualmente ad una branca contenente una pura induttanza; e si trova, per le pulsazioni ω alle quali il sistema può funzionare a corrente alternata senza d. d. p. impressa, una equazione del tipo:

$$\frac{1}{X} + \frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} + \ldots = 0 ,$$

la quale è in generale soddisfatta da n valori di ω^2, se n è il numero delle branche del tipo (L, C).

Le considerazioni precedenti suggeriscono di estendere ulteriormente la nozione di accoppiamento al caso in cui, in uno schema come quello di fig. 73, la branca comune sia costituita da una capacità C anzichè da una induttanza L (fig. 82).

In tal caso si potrà, per analogia col caso precedente, definire come fattore di accoppiamento il rapporto fra la reattanza $\frac{1}{C\omega}$ della branca comune e la media geometrica

$$\sqrt{\left(\frac{1}{C\omega}+\frac{1}{C_1\omega}\right)\left(\frac{1}{C\omega}+\frac{1}{C_2\omega}\right)}$$

delle reattanze totali dello *stesso segno* (cioè capacitive) dei due circuiti *1* e *2*, intesi chiusi ciascuno sulla C.

Tale rapporto k vale, come facilmente si verifica:

$$k=\frac{\sqrt{C_1C_2}}{\sqrt{(C_1+C)(C_2+C)}}. \tag{45}$$

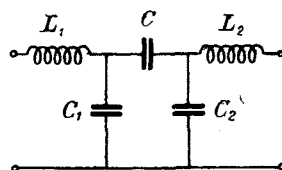



Fig. 83

Anche per un tale sistema si potrebbero ripetere deduzioni e calcoli analoghi a quelli svolti nei precc. nn. 17 e 18. Vi è solo da osservare che nelle relazioni allora trovate occorre sostituire ad ogni pulsazione la sua inversa, e ciò perchè le reattanze capacitive contengono il fattore ω allo stesso modo come le magnetiche contengono il fattore $\frac{1}{\omega}$. Ad es., in particolare si ha che se i circuiti *1* e *2* hanno resistenze trascurabili e vengono chiusi su due induttanze L_1 ed L_2 tali che i sistemi L_1, C_1, C; L_2, C_2, C, separatamente considerati, sono isocroni di pulsazione ω_0, cioè se è $L_1\frac{C_1C}{C_1+C}=L_2\frac{C_2C}{C_2+C}=\frac{1}{\omega_0^2}$, il sistema complessivo presenta reattanza nulla per due pulsazioni i cui valori sono $\omega_0\sqrt{1-k}$ ed $\omega_0\sqrt{1+k}$, essendo k dato dalla precedente espressione.

Sono particolarmente interessanti quelle disposizioni di circuiti che si ottengono trasformando le precedenti per dualità.

Limitandoci al caso di assenza di resistenze, è chiaro che la disposizione corrispondente alla fig. 73 (cui siano aggiunti due condensatori in serie alle induttanze L_1, L_2) è quella rappresentata nello schema di fig. 83. Essa (qualora si pensino cortocircuitati i morsetti d'entrata e quelli di uscita) si riduce ad un sistema di tre reattanze in serie, due delle quali sono costituite da sistemi (L, C) in parallelo e la terza è una pura capacità. A quelli che nel caso precedente si chiamavano i due circuiti *1* e *2* corrispondono qui i circuiti che risultano dalla soppressione di (L_2, C_2), rispettivamente (L_1, C_1): essi pertanto sono costituiti dalla capacità C in serie col gruppo (L_1, C_1) rispettivamente (L_2, C_2), il che val quanto

dire che, ad es., il circuito *1* è formato dall'induttanza L_1 in serie con la capacità $C_1 + C$.

Pel coefficiente d'accoppiamento k si ha l'espressione

$$k = \frac{C}{\sqrt{(C_1 + C)(C_2 + C)}},$$

che si ottiene dalla (42) sostituendo le C alle L, ed in questo caso le pulsazioni di risonanza del sistema corrispondono ancora ad $\frac{\omega_0}{\sqrt{1 \pm k}}$, qualora i due circuiti *singoli*, come sopra definiti, siano isocroni di pulsazione ω_0, cioé si abbia:

$$L_1 \frac{C_1 C}{C_1 + C} = L_2 \frac{C_2 C}{C_2 + C} = \frac{1}{\omega_0^2}.$$

Più generalmente si potrebbe esaminare il caso di un sistema comprendente $n > 2$ gruppi (L, C) tipo parallelo, fra loro connessi in serie con o senza una capacità C aggiunta in serie, e si troverebbe che esso presenta n pulsazioni di risonanza.

Infine, si potrebbero considerare sistemi analoghi a quelli di fig. 83 *b*) in cui l'elemento accoppiante sia del tipo L anzichè del tipo C. Esso non sarebbe che il *duale* di quello rappresentato dalla fig. 82, e tanto ci autorizza a scrivere senz'altro l'espressione del relativo coefficiente d'accoppiamento sotto la forma (analoga alla (45)):

$$k = \frac{\sqrt{L_1 L_2}}{\sqrt{(L_1 + L)(L_2 + L)}}.$$

Come si vede, questi sistemi circuitali, alla cui considerazione siamo stati tratti dall'analogia fra il tipo di fig. 73 con quello di due circuiti accoppiati induttivamente, non sono che connessioni in serie o in parallelo di sistemi di reattanze costituite da coppie di elementi L, C, rispettivamente in parallelo o in serie.

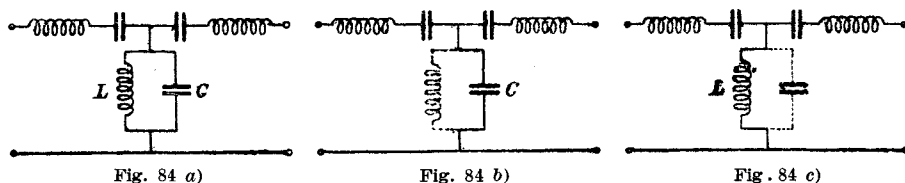
La presenza in qualche ramo (o in tutti), di elementi dissipativi, fa sì che non esistano più pulsazioni per le quali la impedenza, rispettivamente ammettenza, siano nulle; ma soltanto si può annullare, con convenienti valori di ω, la reattanza, rispettivamente la suscettanza, realizzandosi così quello stato di cose che ancora si potrà convenzionalmente denominare di « risonanza ».

Le curve che mostrano come, al variare di ω, varia la tensione ai capi per una data corrente alimentatrice, nei casi in parallelo, o la corrente assorbita per una data tensione impressa nei casi in serie, presentano in generale tanti massimi quanti sono i sistemi serie (L, C) connessi in parallelo, rispettivamente i sistemi parallelo (L, C) connessi in serie.

E pertanto ognuno dei sistemi descritti può essere utilizzato per la effettiva costituzione di opportuni « filtri di banda », quando le costanti circuitali siano scelte in guisa tale che i massimi siano poco diversi l'uno dall'altro ed i minimi fra essi interposti siano poco diversi dai massimi.

In particolare vengono spesso a tale scopo impiegati sistemi del tipo di fig. 83.

Si incontrano talvolta sistemi del tipo di fig. 84 *a*), in cui l'elemento accoppiante ha carattere misto, cioè si compone di una capacità e di una induttanza, per es. fra loro in parallelo. Per un tale sistema non può, a

Fig. 84 *a*) Fig. 84 *b*) Fig. 84 *c*)

rigore, parlarsi di fattore d'accoppiamento perchè, se si andasse a tentarne la definizione imitando le precedenti, si troverebbe per esso un numero essenzialmente variabile con la pulsazione. Essi presentano un notevole interesse pratico quando il campo di frequenze con cui si deve operare è molto esteso, in quanto che, alle frequenze più elevate, potendosi trascurare l'effetto di L (fig. 84 *b*)), il gruppo funziona come uno del tipo di fig. 82, mentre l'opposto accade per le frequenze più basse (fig. 84 *c*)), ed il sistema allora si comporta come uno del tipo di fig. 73.

CAPITOLO QUARTO

RETI DI IMPEDENZE. - QUADRIPOLI

1. - Generalità. - Leggi di Kirchhoff. — Dopo avere, nel cap. prec., studiato dettagliatamente il comportamento dei circuiti semplici riduttibili, con riferimento ad una determinata frequenza di funzionamento, ad una certa impedenza, ci dedicheremo ora all'esame di sistemi circuitali più complessi, e precisamente di quelli costituiti da una *rete* di impedenze.

Come è noto, con tale denominazione si intende un sistema costituito da un numero qualunque di elementi impedenti, detti *rami,* a due a due connessi per avere un estremo comune, il quale, ove sia comune a più di due elementi, costituirà un *nodo* generico della rete stessa.

Supporremo che ognuna delle impedenze costituenti i singoli rami sia di tipo *lineare*, tale cioè che il rapporto fra la tensione applicata e la corrente che la attraversa possa ritenersi rappresentato da un ben determinato numero complesso, in generale variabile con la frequenza. Non sarebbero quindi da considerarsi lineari le impedenze nella cui costituzione entrano induttanze con ferro, in quanto che la relazione fra flusso e corrente non è di rigorosa proporzionalità, nè resistenze destinate ad essere percorse da corrente di intensità e frequenze notevolmente diverse, nè tratti di circuito che risentono l'influenza magnetica od elettrostatica di altri tratti, perchè le correnti e le tensioni in essi risentirebbero necessariamente dei valori spettanti a correnti ed a tensioni diverse da quelle che interessano direttamente i tratti stessi. Pertanto l'ipotesi da noi posta potrà in generale ritenersi verificata con discreta approssimazione dalle ordinarie impedenze quando siano assenti materiali ferromagnetici e resistenze ad elevato coefficiente di temperatura o a variazione molto notevole con la frequenza, o almeno quando si operi con correnti e tensioni variabili in campi poco estesi sia in intensità che in frequenza, e quando inoltre i vari elementi della rete siano praticamente ininfluenti magneticamente ed elettricamente gli uni sugli altri.

Più generalmente, potrà anche intendersi che esistano accoppiamenti magnetici fra coppie di induttanze non metallicamente congiunte, in quanto un tale sistema è sempre riducibile (III, 27) ad una conveniente struttura a rete.

È ovvio poi avvertire che, quando anche si possano considerare costanti i valori dei parametri R, L, C costituenti i vari elementi, non si potrà parlare di impedenza $\mathbf{Z}$ di un ramo generico, se non con riferimento ad un regime sinusoidale di ben determinata frequenza, ed inoltre il valore di $\mathbf{Z}$ pertinente ad uno stesso ramo varierà in generale con la frequenza stessa di funzionamento, secondo le leggi dettagliatamente esaminate nel Cap. prec. In particolare, le considerazioni seguenti non potranno trovare applicazione nei regimi transitori, in quanto questi, come si dimostra in Analisi, corrispondono alla contemporanea presenza di infinite frequenze.

Pensiamo che nel ramo generico di una rete, compreso fra i nodi a e b, sia inserita una sede di f. e. m. sinusoidale (avente una certa fissata frequenza), che indicheremo genericamente con $\mathbf{E}_{ab}$. In tali condizioni in ogni ramo circolerà una corrente sinusoidale che indicheremo con $\mathbf{I}_{ab}$. Tali complessi $\mathbf{E}_{ab}$ ed $\mathbf{I}_{ab}$ si intenderanno riferiti ad un determinato senso positivo scelto (arbitrariamente) sul ramo stesso, talchè ogni $\mathbf{E}_{ab}$ risulterà positiva quando tenda a produrre nel ramo una corrente avente quel senso, ed una corrente sarà positiva quando sia diretta in quel senso stesso.

In tali condizioni, se con $\mathbf{V}_a$ e $\mathbf{V}_b$ indichiamo le tensioni, rispetto ad un punto qualunque, degli estremi a e b del ramo generico e con $\mathbf{Z}_{ab}$ l'impedenza che alla frequenza fissata presenta il ramo stesso, ivi compresa l'impedenza interna del generatore di f. e. m. $\mathbf{E}_{ab}$ in esso inserito, si avrà la relazione fondamentale

$$\mathbf{E}_{ab} = \mathbf{Z}_{ab}\mathbf{I}_{ab} + \mathbf{V}_b - \mathbf{V}_a \,, \tag{1}$$

essendo assunto come senso positivo del ramo quello da a verso b.

Come è noto, combinando tutte le relazioni analoghe a questa e relative ai lati di una *maglia*, si ricavano le equazioni esprimenti la seconda legge di Kirchhoff (cfr. El., VIII, 9)

$$\Sigma \mathbf{E} = \Sigma \mathbf{Z}\mathbf{I} \,, \tag{2}$$

dove la somma è estesa ai lati della maglia. Infine, per ogni nodo, si ha la relazione (prima equazione di Kirchhoff):

$$\Sigma \mathbf{I} = 0 \,, \tag{3}$$

dove il primo membro rappresenta la somma delle correnti affluenti ad un nodo (in esso quindi ogni $\mathbf{I}$ sarà presa col suo segno o con l'opposto secondo

che il senso stabilito sul corrispondente ramo è quello verso il nodo o l'opposto).

È fisicamente evidente che queste equazioni sono in generale risolubili rispetto alle correnti **I** [1], e pertanto per un dato sistema di tensioni **E** si avrà un ben determinato sistema di correnti **I**.

2. - Principio di sovrapposizione. — Dall'esame delle relazioni fondamentali richiamate si deducono alcune proprietà generali di notevole importanza.

Il fatto che le (2), (3) sono lineari omogenee rispetto alle **E** ed alle **I** fa sì che le formole risolutive sono del tipo

$$(4)\qquad \begin{cases} \mathbf{I}_1 = \mathbf{A}_{11}\mathbf{E}_1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{E}_2 + \ldots + \mathbf{A}_{1r}\mathbf{E}_r \\ \mathbf{I}_2 = \mathbf{A}_{21}\mathbf{E}_1 + \mathbf{A}_{22}\mathbf{E}_2 + \ldots + \mathbf{A}_{2r}\mathbf{E}_r \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{I}_r = \mathbf{A}_{r1}\mathbf{E}_1 + \mathbf{A}_{r2}\mathbf{E}_2 + \ldots + \mathbf{A}_{rr}\mathbf{E}_r\,, \end{cases}$$

dove i coefficienti $\mathbf{A}_{ij}$ rappresentano delle convenienti funzioni delle **Z**, indipendenti dalle **E**.

Chiameremo *compatibile* o *possibile*, rispetto alla data rete, un sistema di tensioni $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, ... e di correnti $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$, ... quando questi valori soddisfano le precedenti (2), (3), o, il che fa lo stesso, le (4).

Si vede immediatamente che se sono possibili i due sistemi

$$\mathbf{E}_1,\ \mathbf{E}_2,\ \ldots;\ \mathbf{I}_1,\ \mathbf{I}_2,\ \ldots\quad \text{ed}\quad \mathbf{E}'_1,\ \mathbf{E}'_2,\ \ldots;\ \mathbf{I}'_1,\ \mathbf{I}'_2,\ \ldots,$$

è anche possibile qualunque sistema del tipo:

$$a\mathbf{E}_1 + b\mathbf{E}'_1,\ a\mathbf{E}_2 + b\mathbf{E}'_2,\ \ldots\ ;\ a\mathbf{I}_1 + b\mathbf{I}'_1,\ a\mathbf{I}_2 + b\mathbf{I}'_2,\ \ldots$$

dove a e b sono costanti qualunque.

In ciò consiste il *principio di sovrapposizione*, secondo il quale per valutare il sistema di correnti dovuto ad un certo sistema di tensioni

[1] Si può facilmente verificare che il sistema di equazioni (1) e (3), considerato rispetto alle incognite **V** ed **I**, non è sovrabbondante. Infatti, se n è il numero dei nodi ed r quello dei rami, le **V** sono in numero di n e le **I** in numero di r, quindi esse sono in tutto $n + r$. Mentre però le **I** sono a priori indipendenti, altrettanto non può dirsi delle **V**, in quanto ad una di esse si può sempre supporre attribuito un valore arbitrario (per es. zero). Dunque si tratta di $n + r - 1$ effettive incognite. Delle equazioni come le (1) se ne possono scrivere r e di quelle del tipo (3) se ne hanno tante quanti sono i nodi, cioè n; però esse non sono tutte indipendenti, giacchè la somma dei primi membri di tutte le relazioni come le (3) è identicamente nulla in quanto ogni corrente compare due volte con opposti segni. Pertanto anche le relazioni indipendenti fra le **V** e le **I** non sono in numero superiore ad $n + r - 1$.

(E_1, E_2, ...) impresse nei rami, basta valutare separatamente quello prodotto da più sistemi di tensioni:

$$E_1', E_2', \dots ; \quad E_1'', E_2'', \dots$$

di cui il dato sistema sia la *somma*, cioè tale che si abbia

$$E_1 = E_1' + E_1'', \quad E_2 = E_2' + E_2'', \dots ,$$

e sommare, elemento per elemento, i risultati.

In particolare si può intendere il sistema E_1, E_2, ... *composto* dei seguenti sistemi elementari

$$E_1, 0, 0, \dots, 0 ; \quad 0, E_2, 0, \dots, 0 ; \quad \dots ; \quad 0, 0, 0, \dots, E_r ,$$

cui corrispondono i sistemi di correnti

$$A_{11}E_1, A_{21}E_1, \dots ; \quad A_{12}E_2, A_{22}E_2, \dots ; \quad \dots ; \quad A_{1r}E_r, A_{2r}E_r, \dots ,$$

con che si perviene alle seguenti notevoli proposizioni:

a) per calcolare la corrente in un ramo qualsiasi di una data rete, in corrispondenza a certe tensioni applicate nei vari rami, basta sommare le correnti che in quel ramo stesso verrebbero destate qualora ciascuna tensione agisse separatamente, essendo nulle le altre (le cui sedi dovranno intendersi sostituite con le rispettive impedenze interne);

b) il coefficiente generico A_{ij} delle (4) misura il rapporto fra la corrente nel ramo i^{mo} e la tensione applicata nel ramo j^{mo}, quando tutte le altre tensioni siano nulle, od anche, se si osserva che A_{ij} non è altro che la derivata parziale $\dfrac{\partial I_i}{\partial E_j}$, si può dire che

c) il coefficiente A_{ij} è il rapporto fra la variazione di corrente provocata nel ramo i^{mo}, per effetto di una variazione apportata alla tensione nel ramo j^{mo}, e questa variazione stessa [1].

3. - Principio di compensazione. — Dall'esame della relazione generica (1) si deduce immediatamente che, in un ramo qualunque nel quale circola una corrente **I**, all'impedenza **Z** del ramo o ad una parte Z' di essa si può sostituire una f. e. m. uguale a $-Z'I$. Ciò infatti equivale a far passare il termine $Z'I$ dal secondo al primo membro. Con altre parole, lo stesso fatto può esprimersi dicendo che, se all'impedenza di un ramo si apporta una variazione δZ, le variazioni di corrente che così si determinano in ogni altro ramo coincidono con quelle che si avrebbero per

---

[1] Seguendo una terminologia di cui ci varremo in seguito (cap. VII), si potrà chiamare A_{ij} la ammettenza mutua differenziale dei due rami, l'aggettivo mutuo essendo giustificato da ciò, che, come fra poco vedremo, è $A_{ij} = A_{ji}$.

effetto dell'inserzione nel primo di una f. e. m. uguale a $-\mathbf{I}\delta\mathbf{Z}$, essendo **I** la corrente circolante nel ramo stesso *dopo* l'effettuata variazione.

In ciò consiste il *principio di compensazione.*

4. - Teorema di Thévenin. — Un'altra importante proprietà delle reti di impedenze è quella espressa dal seguente teorema (di Thévenin).

Se fra due punti qualunque *a* e *b*, scelti anche nell'interno dei rami di una rete contenente in generale delle f. e. m. impresse nei vari rami, si inserisce una impedenza qualunque **Z**, la corrente che in questa andrà a circolare può calcolarsi come rapporto fra la tensione $\mathbf{V}_0$ esistente fra i punti *a* e *b* prima della inserzione di **Z** e l'impedenza risultante dalla somma di **Z** con l'impedenza che la rete presenta fra i punti *a* e *b* qualora si immaginino soppresse tutte le sedi di f. e. m. agenti nell'interno (cioè a ciascuna di tali sedi si pensi sostituita la sua impedenza interna).

Infatti, si osservi che se fra i punti *a* e *b* si inserisce un nuovo ramo contenente una sede di f. e. m. esattamente uguale a $-\mathbf{V}_0$, tale ramo, qualunque sia la sua impedenza **Z**, non sarà percorso da corrente, e pertanto nulla viene alterato nella preesistente distribuzione di tensioni e correnti. Quindi è possibile il sistema

$$(5) \qquad \begin{cases} \mathbf{E}_1, \ \mathbf{E}_2, \ \dots, \ \mathbf{E}_r, \ -\mathbf{V}_0 \\ \mathbf{I}_1, \ \mathbf{I}_2, \ \dots, \ \mathbf{I}_r, \ \ 0 \ , \end{cases}$$

dove $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$, ... sono le correnti circolanti nei preesistenti rami contenenti le f. e. m. $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, ..., mentre l'ultima coppia ($-\mathbf{V}_0$, 0) si riferisce al ramo aggiunto.

Sia ora **I** la corrente che percorre il ramo aggiunto *ab*, di impedenza **Z**, quando da esso si sopprima la f. e. m. $-\mathbf{V}_0$, ed $\mathbf{I}'_1$, $\mathbf{I}'_2$, ... le correnti che in tal caso andranno a percorrere i rami che dianzi erano sede delle correnti $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$, ... Sarà pure possibile il sistema:

$$(6) \qquad \begin{cases} \mathbf{E}'_1, \ \mathbf{E}'_2, \ \dots, \ \mathbf{E}'_r, \ 0 \\ \mathbf{I}'_1, \ \mathbf{I}'_2, \ \dots, \ \mathbf{I}'_r, \ \mathbf{I}\, . \end{cases}$$

I due sistemi (5) e (6) riferendosi alla *medesima rete* (costituita dalla primitiva cui si è aggiunto fra *a* e *b* il ramo di impedenza **Z**), si avrà, « sottraendo », che è pur possibile il sistema:

$$\begin{cases} 0, \ 0, \ \dots, \ 0, \ \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{I}''_1, \ \mathbf{I}''_2, \ \dots, \ \mathbf{I}''_r, \ \mathbf{I} \end{cases}$$

essendo $\mathbf{I}''_1 = \mathbf{I}'_1 - \mathbf{I}_1$, ecc.

Ciò significa che se, nella rete data, si sopprimono le f. e. m. $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, ..., e fra *a* e *b* si applica una tensione $\mathbf{V}_0$, la corrente in *ab* sarà pre-

cisamente **I**. D'altro canto, in tali condizioni, la corrente **I** si calcola ovviamente con la

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_0}{\mathbf{Z} + \mathbf{Z}_c},$$

essendo $\mathbf{Z}_c$ l'impedenza definita dall'enunciato del teorema, onde questo è dimostrato.

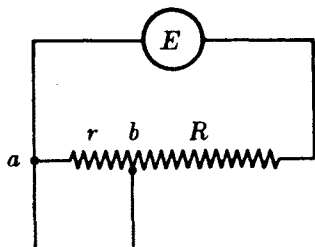



Fig. 85

La portata pratica di questo teorema è grandissima. In grazia di esso, quando si abbia a calcolare la corrente circolante in una impedenza alimentata da una rete di generatori comunque fra loro connessi, basta procurarsi le espressioni di $\mathbf{V}_0$ e di $\mathbf{Z}_c$, che si potrebbero chiamare la «tensione a vuoto» e la «impedenza di corto circuito» della data rete di generatori, per ovvia analogia con la denominazioni in uso pel caso di un solo generatore. Invero $\mathbf{V}_0$ è il valore che la tensione ai capi del carico *ab* assume per $\mathbf{Z} \to \infty$, e $\mathbf{Z}_c$ è il rapporto fra tale tensione e la corrente nel ramo *ab* stesso per $\mathbf{Z} \to 0$.

In altre parole, ai fini del computo della corrente prodotta nel ramo **Z** inserito fra i morsetti *a* e *b* della rete, il comportamento di questa non differisce da quella di un generatore di tensione $\mathbf{V}_0$ e di impedenza interna $\mathbf{Z}_c$.

Un'interessante applicazione di questo principio è quella che, nella tecnica delle misure, può farsi nel caso di circuiti alimentati con dispositivi così detti di « pila ridotta »; un apparecchio qualunque derivato fra i morsetti *a* e *b* del circuito di fig. 85 (dove la resistenza interna di *E* si intende conglobata in *R*) si comporta come fosse alimentato da un generatore di tensione $\frac{rE}{r+R}$ (uguale cioè a quella esistente fra *a* e *b* in assenza del circuito di carico) avente resistenza interna $\frac{rR}{r+R}$ (uguale cioè a quella esistente fra *a* e *b* dopo la soppressione di *E*).

Come secondo esempio, possiamo asserire che più generatori di f. e. m. $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, ... e di impedenze interne $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$, ... disposti in parallelo, si comportano come un unico generatore di impedenza interna **Z** data da

$$\frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{1}{\mathbf{Z}_1} + \frac{1}{\mathbf{Z}_2} + \cdots,$$

e la cui tensione si calcola facilmente come valore comune $\mathbf{V}_0$ che le espressioni

$$\mathbf{E}_1 - \mathbf{Z}_1\mathbf{I}_1, \quad \mathbf{E}_2 - \mathbf{Z}_2\mathbf{I}_2, \quad \ldots$$

assumono sotto la condizione $\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \ldots = 0$, cioè

$$\frac{\mathbf{E}_1 - \mathbf{V}_0}{\mathbf{Z}_1} + \frac{\mathbf{E}_2 - \mathbf{V}_0}{\mathbf{Z}_2} + \ldots = 0,$$

da cui

$$\mathbf{V}_0 = \mathbf{Z}\left(\frac{\mathbf{E}_1}{\mathbf{Z}_1} + \frac{\mathbf{E}_2}{\mathbf{Z}_2} + \ldots\right),$$

essendo $\mathbf{Z}$ l'impedenza poco sopra definita (Cfr. El., VIII, 17).

Un terzo esempio è offerto dalla formula (25') del Cap. prec. mediante la quale si calcola la corrente secondaria $\mathbf{I}_2$ in un circuito accoppiato magneticamente ad un altro in cui è inserita una f. e. m. $\mathbf{E}$. In questo caso, la tensione a vuoto $\mathbf{V}_0$ corrisponde a $-jM\omega\mathbf{I}_1$, dove $\mathbf{I}_1$ rappresenta la corrente primaria a secondario aperto, cioè $\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_1}$, mentre come impedenza $\mathbf{Z} + \mathbf{Z}_c$ è da assumersi l'impedenza apparente del secondario, cioè $\mathbf{Z}_2 + \frac{M^2\omega^2}{\mathbf{Z}_1}$. Si perviene così appunto alla relazione

$$I_2 = -\frac{jM\omega\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + M^2\omega^2}\mathbf{E}$$

a suo tempo trovata.

Giova qui richiamare che per sistemi siffatti, sostanzialmente riduttibili ad un generatore unico chiuso su due impedenee $\mathbf{Z}_1$ e $\mathbf{Z}_2$ in serie, una delle quali potrà pensarsi come impedenza interna, essenzialmente fissa, mentre l'altra sia a ritenersi variabile, la potenza erogata varia ovviamente al variare della seconda impedenza, e raggiunge un massimo quando le due impedenze hanno valori coniugati, cioè quando presentano resistenze uguali e reattanze opposte.

La cosa si verifica immediatamente. Posto $\mathbf{Z}_1 = R_1 + jX_1$, $\mathbf{Z}_2 = R_2 + jX_2$, la corrente $\mathbf{I}$ erogata dal generatore di f. e. m. $\mathbf{E}$ è data

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} = \frac{\mathbf{E}}{R_1 + R_2 + j(X_1 + X_2)},$$

e la potenza erogata in $\mathbf{Z}_2$ vale R_2I^2 cioè

$$\frac{R_2E^2}{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2}.$$

Tale potenza dipende ovviamente da R_2 e da X_2. Per trovarne il massimo supponiamo dapprima fissata R_2. In tali condizioni l'espressione

scritta è massima pel valore nullo di $X_1 + X_2$, cioè per $X_1 = - X_2$. Soddisfatta questa condizione, l'espressione stessa si riduce a

$$\frac{R_2 E^2}{(R_1 + R_2)^2},$$

il cui massimo si verifica per $R_1 = R_2$ [1] e vale $\frac{E^2}{4R_2}$.

5. - Legge di reciprocità. - Questa legge può enunciarsi come segue: Se una determinata variazione di tensione in un ramo produce una certa variazione di corrente in un altro ramo, la stessa variazione di tensione applicata invece a questo produce la stessa variazione di corrente in quello.

Questo teorema può considerarsi un corollario del seguente:

Se (**E**, **I**), (**E**′, **I**′) sono due possibili sistemi di valori delle tensioni e delle correnti in una data rete, si ha:

$$\Sigma \mathbf{E}_k \mathbf{I}'_k = \Sigma \mathbf{E}'_k \mathbf{I}_k \,, \tag{7}$$

essendo le somme estese a tutti i rami della rete.

Per la dimostrazione si moltiplichi ognuna delle (1) per la corrente **I**′ (del secondo sistema) spettante al ramo cui la (1) stessa si riferisce, e e si sommino membro a membro le relazioni così ottenute. Siccome ovviamente ogni **V** riesce così moltiplicata per la somma delle correnti **I**′ affluenti al corrispondente nodo, e tal somma, in virtù della (3) scritta pel secondo sistema, è nulla, si deduce:

$$\Sigma \mathbf{E}\mathbf{I}' = \Sigma \mathbf{Z}\mathbf{I}\mathbf{I}' .$$

Scambiando fra loro i due sistemi (**E**, **I**), (**E**′, **I**′), il secondo membro non muta, donde segue la (7).

Alla (7) si può dare una forma alquanto diversa, introducendo le differenze $\delta \mathbf{E}_k = \mathbf{E}'_k - \mathbf{E}_k$, $\delta \mathbf{I}_k = \mathbf{I}'_k - \mathbf{I}_k$ fra gli elementi omologhi dei due sistemi. Sostituendo alle $\mathbf{E}'_k$ ed $\mathbf{I}'_k$ i valori $\mathbf{E}_k + \delta \mathbf{E}_k$, $\mathbf{I}_k + \delta \mathbf{I}_k$ e sopprimendo i termini comuni ai due membri, si ha:

$$\Sigma \mathbf{E}_k \delta \mathbf{I}_k = \Sigma \mathbf{I}_k \delta \mathbf{E}_k .$$

---

[1] Infatti è

$$\frac{R_2}{(R_1 + R_2)^2} = \frac{1}{\frac{R_1^2}{R_2} + R_2 + 2R_1},$$

e poichè, prescindendo dal termine costante $2R_1$, il denominatore è somma di due numeri aventi prodotto costante ($= R_1^2$), esso sarà minimo quando i due numeri sono uguali, cioè per $R_1 = R_2$.

Dalla proprietà espressa dalle (7) segue facilmente che il coefficiente generico $\mathbf{A}_{ij}$ che compare nelle relazioni (4) è uguale ad $\mathbf{A}_{ji}$. Invero si moltiplichi ognuna delle (4):

$$\mathbf{I}_k = \sum_l \mathbf{A}_{kl}\mathbf{E}_l \qquad (k = 1, 2, \ldots, r)$$

per $\mathbf{E}'_k$ e si sommino membro a membro le r relazioni così ottenute. Si avrà:

$$\sum_k \mathbf{E}'_k\mathbf{I}_k = \sum_k\sum_l \mathbf{A}_{kl}\mathbf{E}_l\mathbf{E}'_k . \tag{8}$$

Analogamente, partendo dalle (4) stesse, scritte però pel sistema ($\mathbf{E}'$, $\mathbf{I}'$), si ottiene:

$$\sum_k \mathbf{E}_k\mathbf{I}'_k = \sum_k\sum_l \mathbf{A}_{kl}\mathbf{E}'_l\mathbf{E}_k . \tag{9}$$

Confrontando la (8) con la (9), si deduce che, per qualsivoglia sistema di valori per le $\mathbf{E}$ e le $\mathbf{E}'$, si deve avere:

$$\sum_k\sum_l \mathbf{A}_{kl}\mathbf{E}_l\mathbf{E}'_k = \sum_k\sum_l \mathbf{A}_{kl}\mathbf{E}'_l\mathbf{E}_k .$$

Supponendo ad es. nulle tutte le $\mathbf{E}$ ed $\mathbf{E}'$ all'infuori delle $\mathbf{E}_i$, $\mathbf{E}'_j$, si deduce:

$$\mathbf{A}_{ij} = \mathbf{A}_{ji} \text{ (1)} .$$

Ora questa uguaglianza, tenuto presente il significato, già rilevato, dei coefficienti $\mathbf{A}_{ij}$, non è che la traduzione dell'enunciato del principio di reciprocità.

6. - Quadripoli. - Relazioni fondamentali. — Nelle applicazioni telefoniche, radiotecniche, ecc. hanno particolare importanza alcuni tipi di reti di impedenze, cui si dà il nome di *quadripoli*.

Con tale denominazione si intende un'apparecchiatura qualunque, avente quattro morsetti di comunicazione con l'esterno, due dei quali funzionano come capi di *entrata*, gli altri due come capi di *uscita*, tali quattro morsetti essendo, nell'interno dell'apparecchiatura stessa, comunque collegati fra loro con rami (il cui numero potrebbe anche non essere finito) contenenti in generale resistenze, induttanze e capacità.

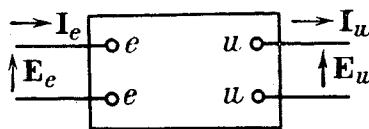



Fig. 86

Un quadripolo può rappresentarsi schematicamente come alla fig. 86, dove *e*, *e* indicano i morsetti d'entrata, *u*, *u* quelli di uscita, mentre non sono precisati gli elementi interni, in considerazione del fatto che un quadripolo viene funzionalmente esaminato soltanto con riferimento alle

(1) Cfr. nota a pag. 162.

operazioni eseguite esternamente ad esso, studiando cioè quel che avviene quando due sistemi S_e ed S_u, anzichè direttamente tra loro, vengano connessi l'uno col lato e, l'altro col lato u del quadripolo. In altre parole, questo viene considerato come un organo di connessione fra S_e ed S_u, e pertanto talvolta lo si denomina *trasduttore* quadripolare.

Salvo avviso contrario, considereremo sempre quadripoli *inerti* (o *passivi*), cioè tali che non esista nel loro interno nessuna sede di f. e. m. impressa; e studieremo il loro comportamento a regime, in generale alternativo sinusoidale di pulsazione ω determinata. Supporremo cioè che ai morsetti di entrata, che potremo intendere di *alimentazione*, sia applicata una certa tensione $\mathbf{E}_e$, in conseguenza della quale e delle condizioni del *carico* applicato ai morsetti d'uscita, si avrà una certa corrente $\mathbf{I}_e$ *entrante* (cioè intesa positiva se cospirante con $\mathbf{E}_e$); mentre ai morsetti di uscita si avrà una certa tensione $\mathbf{E}_u$ e una corrente $\mathbf{I}_u$ *uscente* (cioè intesa positiva se cospirante con $-\mathbf{E}_u$) (1).

È facile vedere che fra le quattro grandezze (complesse) $\mathbf{E}_e$, $\mathbf{E}_u$, $\mathbf{I}_e$, $\mathbf{I}_u$ sussistono due relazioni lineari omogenee del tipo:

$$\left\{\begin{aligned} \mathbf{E}_e &= \mathbf{A}\mathbf{E}_u + \mathbf{B}\mathbf{I}_u \\ \mathbf{I}_e &= \mathbf{C}\mathbf{E}_u + \mathbf{D}\mathbf{I}_u , \end{aligned}\right. \tag{10}$$

dove $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ sono quattro costanti complesse, di cui la prima e la quarta hanno manifestamente carattere numerico, mentre la seconda e la terza corrispondono rispettivamente ad una impedenza e ad una ammettenza.

Infatti, si immaginino scritte le equazioni traducenti le leggi di Kirchhoff per la rete quadripolare data, che si potrà pensare completata e chiusa, aggiungendo a ciascuno dei lati e ed u un ramo di impedenza nulla, sede di una f. e. m. $\mathbf{E}_e$ e di una corrente $\mathbf{I}_e$, rispettivamente $\mathbf{E}_u$ ed $\mathbf{I}_u$. Tali equazioni, come si è visto, sono della forma:

$$\Sigma\mathbf{I} = 0 , \qquad \Sigma\mathbf{E} = \Sigma\mathbf{Z}\mathbf{I} ,$$

cioè vincolano linearmente ed omogeneamente tutte le $\mathbf{I}$ e tutte le $\mathbf{E}$, le quali ultime nel caso nostro si riducono alle sole $\mathbf{E}_e$ ed $\mathbf{E}_u$. D'altra parte, come già osservammo, le equazioni stesse sono sempre atte a far conoscere tutte le correnti $\mathbf{I}$, note che siano le $\mathbf{E}$ e le $\mathbf{Z}$. Pertanto, supposto di eliminare tutte le $\mathbf{I}$ all'infuori di $\mathbf{I}_e$ e di $\mathbf{I}_u$, le relazioni cui si perviene saranno lineari ed omogenee rispetto ad $\mathbf{E}_e$, $\mathbf{E}_u$, $\mathbf{I}_e$, $\mathbf{I}_u$, cioè del tipo:

$$\alpha\,\mathbf{E}_e + \beta\,\mathbf{I}_e + \gamma\,\mathbf{E}_u + \delta\,\mathbf{I}_u = 0 ,$$
$$\alpha'\mathbf{E}_e + \beta'\mathbf{I}_e + \gamma'\mathbf{E}_u + \delta'\mathbf{I}_u = 0 ,$$

(1) Ciò corrisponde ad assumere come senso positivo per $\mathbf{I}_u$ l'opposto di quello che alla stessa corrente spetterebbe qualora la si pensasse cospirante con una $\mathbf{E}_u$ applicata in entrata.

da cui, risolvendo rispetto ad $\mathbf{E}_e$, $\mathbf{I}_e$, si perviene in generale a relazioni del tipo (10).

Le quattro costanti **A**, **B**, **C**, **D** che compaiono nelle (10) costituiscono ovviamente quanto occorre per *caratterizzare* il funzionamento del quadripolo, mentre le **E** e le **I** che compaiono nelle stesse formole si riferiscono ad una particolare utilizzazione dello stesso. Chiameremo quindi *equivalenti* due quadripoli (**A**, **B**, **C**, **D**), (**A**′, **B**′, **C**′, **D**′) quando sia:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}', \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}', \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}', \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}'.$$

In generale, dato il rapporto $\frac{\mathbf{E}_u}{\mathbf{I}_u}$, cioè l'impedenza $\mathbf{Z}_u$ equivalente al carico di uscita, e la tensione $\mathbf{E}_e$ (oppure la corrente $\mathbf{I}_e$), riescono determinati gli altri elementi elettrici, ed in particolare il rapporto $\frac{\mathbf{E}_e}{\mathbf{I}_e}$, cioè la corrispondente impedenza di entrata $\mathbf{Z}_e$; e di più si ha che l'una o l'altra di queste impedenze può essere data a priori, a piacere, cioè che il quadripolo, considerato come organo che *trasforma* una impedenza applicata ad uno dei suoi lati in altra applicata all'altro, è funzionalmente *invertibile* senza eccezione.

La legge che lega la impedenza d'uscita $\mathbf{Z}_u$ alla corrispondente $\mathbf{Z}_e$ d'entrata è la:

$$\mathbf{Z}_e = \frac{\mathbf{A}\mathbf{Z}_u + \mathbf{B}}{\mathbf{C}\mathbf{Z}_u + \mathbf{D}}, \tag{11}$$

che si ottiene dividendo membro a membro le (10).

La condizione di invertibilità equivale a quella della risolubilità delle (10) rispetto ad $\mathbf{E}_u$, $\mathbf{I}_u$, e pertanto essa consiste nell'essere diverso da zero il determinante $\mathbf{AD} - \mathbf{BC}$ delle quattro costanti caratteristiche del quadripolo [1].

Ora, è importante precisare che, in tale caso, quel determinante ha necessariamente valore unitario.

Per dimostrarlo, consideriamo, insieme allo stato di funzionamento definito da $\mathbf{E}_e$, $\mathbf{E}_u$, $\mathbf{I}_e$, $\mathbf{I}_u$, quello definito da un'altra analoga quaterna di valori $\mathbf{E}'_e$, $\mathbf{E}'_u$, $\mathbf{I}'_e$, $\mathbf{I}'_u$, fra i quali sussisteranno ovviamente le stesse relazioni (10), cioè

$$\begin{cases} \mathbf{E}'_e = \mathbf{A}\mathbf{E}'_u + \mathbf{B}\mathbf{I}'_u \\ \mathbf{I}'_e = \mathbf{C}\mathbf{E}'_u + \mathbf{D}\mathbf{I}'_u . \end{cases}$$

---

(1) Invero, se fosse $\mathbf{AD} = \mathbf{BC}$, sarebbe $\mathbf{A} : \mathbf{C} = \mathbf{B} : \mathbf{D}$ e quindi si avrebbe $\mathbf{Z}_e = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{C}} = \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{D}}$ per qualunque $\mathbf{Z}_u$, cioè l'impedenza d'entrata avrebbe un valore fisso indipendente dall'impedenza d'uscita, e pertanto il quadripolo non sarebbe invertibile *senza eccezione*.

Applicando ai due stati di funzionamento la legge di reciprocità nella forma (7), che in questo caso si riduce a:

$$\mathbf{E}_e\mathbf{I}'_e - \mathbf{E}_u\mathbf{I}'_u = \mathbf{E}'_e\mathbf{I}_e - \mathbf{E}'_u\mathbf{I}_u \text{ [1]},$$

si ottiene, dopo avere sostituito ad $\mathbf{E}_e$, $\mathbf{I}_e$, $\mathbf{E}'_e$, $\mathbf{I}'_e$ i loro valori:

$$(\mathbf{AD} - \mathbf{BC} - 1)\ (\mathbf{E}_u\mathbf{I}'_u - \mathbf{E}'_u\mathbf{I}_u) = 0\ ,$$

da cui si deduce che, come si era asserito, è certamente:

$$\mathbf{AD} - \mathbf{BC} = 1\ , \tag{12}$$

ogni qualvolta sia possibile disporre di $\mathbf{E}_u$, $\mathbf{I}_u$, $\mathbf{E}'_u$, $\mathbf{I}'_u$ in modo che $\mathbf{E}_u\mathbf{I}'_u$ differisca da $\mathbf{E}'_u\mathbf{I}_u$, cioè $\frac{\mathbf{E}_u}{\mathbf{I}_u}$ da $\frac{\mathbf{E}'_u}{\mathbf{I}'_u}$, il che equivale a dire che la impedenza di carico possa essere scelta a piacere [2].

Tenendo presente la (12), si ha che la risoluzione delle (10) rispetto ad $\mathbf{E}_u$, $\mathbf{I}_u$ dà luogo alle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_u = \mathbf{DE}_e + \mathbf{BI}_e \\ \mathbf{I}_u = \mathbf{CE}_e + \mathbf{AI}_e\ , \end{cases}$$

dove si è scritto $\mathbf{I}_e$ e $\mathbf{I}_u$ in luogo di $-\mathbf{I}_e$ e $-\mathbf{I}_u$, intendendo così che $\mathbf{I}_e$ sia corrente uscente ed $\mathbf{I}_u$ entrante.

Queste formole dimostrano che, invertendo il senso di funzionamento di un quadripolo, le costanti **B**, **C** rimangono invariate, mentre le **A** e **D** si scambiano fra loro.

7. - Equivalenza di un quadripolo ad un sistema di tre impedenze a T o a Π. — Siccome la relazione (12) consente di ridurre a tre le costanti fondamentali da cui dipende un quadripolo, si intuisce senz'altro la possibilità di trasformare un quadripolo generico in uno, ad esso equivalente, di composizione ben determinata e contenente tre sole impedenze variabili, delle quali si possa disporre opportunamente.

Le disposizioni tipiche di cui solitamente si fa uso sono quelle rappresentate nelle figg. 87 *a*) e *b*), dette rispettivamente *a stella* ed *a triangolo*, oppure a T e a Π, che sono l'una duale (I, 10) dell'altra.

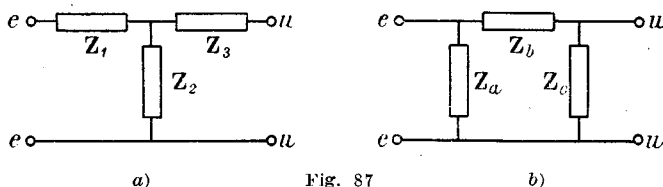
---

[1] Il segno negativo dei secondi termini è giustificato dalla convenzione fatta (cfr. nota a pag. 168).

[2] Le precedenti deduzioni non sarebbero valide qualora la costituzione del quadripolo fosse tale che la impedenza $\mathbf{Z}_u$, in qualsivoglia condizione di alimentazione, risultasse di valore costante. Il quadripolo in tal caso non sarebbe invertibile. Ciò potrebbe verificarsi qualora, ad es., i morsetti *u* fossero, nell'interno del quadripolo, cortocircuitati, oppure qualora uno dei morsetti *u* fosse staccato dalla rete contenuta nel quadripolo. Nel primo caso si avrebbe sempre necessariamente $\mathbf{E}_u = 0$, nel secondo $\mathbf{I}_u = 0$. Sistemi siffatti possono in effetto incontrarsi (ed un esempio cospicuo è offerto dai triodi di cui ci occuperemo in un prossimo Capitolo), ma essi non presentano interesse dal punto di vista in cui ci siamo posti, secondo il quale vogliamo considerare i quadripoli come organi atti a trasformare impedenze diverse in impedenze pure fra loro diverse.

Si può quindi porre in generale il problema: Dato un quadripolo, costruire il T o il Π ad esso equivalente.

Per risolvere il primo, basterà scrivere due equazioni come le (10) relative al T generico, ed uguagliare le costanti fondamentali **A**, **B**, **C**, **D** del quadripolo dato a quelle del T, per poi risolvere rispetto a $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{Z}_3$

a) Fig. 87 *b)*

le equazioni così ottenute, le quali saranno certo compatibili, in quanto che, tanto pel quadripolo dato, come pel T, è soddisfatta la identità (12).

La determinazione delle **A**, **B**, **C**, **D** può intendersi fatta partendo dalla conoscenza della costituzione interna del quadripolo, oppure anche mediante operazioni eseguite soltanto dall'esterno.

Particolarmente atte allo scopo sono quelle consistenti nella valutazione delle impedenze *a vuoto* $\mathbf{Z}_{ve}$, $\mathbf{Z}_{vu}$, cioè di quelle che il quadripolo presenta, dai lati e ed u, quando i lati u, rispettivamente e, siano aperti; e di quelle *a corto circuito*, $\mathbf{Z}_{ce}$, $\mathbf{Z}_{cu}$, così denominandosi le impedenze che lo stesso quadripolo presenta dai lati e, u, quando i morsetti u, e siano cortocircuitati (1).

I valori di tali impedenze si calcolano agevolmente pensando che $\mathbf{Z}_{ve}$, $\mathbf{Z}_{ce}$ non sono che i valori del rapporto $\dfrac{\mathbf{E}_e}{\mathbf{I}_e}$ calcolati per $\mathbf{I}_u = 0$, rispettivamente $\mathbf{E}_u = 0$; e $\mathbf{Z}_{vu}$, $\mathbf{Z}_{cu}$ sono gli analoghi valori a quadripolo invertito. Si ha pertanto:

$$\mathbf{Z}_{ve} = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{C}}, \quad \mathbf{Z}_{vu} = \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{C}}, \quad \mathbf{Z}_{ce} = \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{D}}, \quad \mathbf{Z}_{cu} = \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{A}}. \tag{13}$$

Queste quattro impedenze non sono indipendenti. Invero si verifica subito che fra di esse sussiste la relazione:

$$\mathbf{Z}_{ve} : \mathbf{Z}_{ce} = \mathbf{Z}_{vu} : \mathbf{Z}_{cu}, \tag{13'}$$

che equivale alle due:

$$Z_{ve} : Z_{ce} = Z_{vu} : Z_{cu}, \quad \varphi_{ve} - \varphi_{ce} = \varphi_{vu} - \varphi_{cu},$$

l'una fra i moduli, l'altra fra gli argomenti delle stesse impedenze.

(1) I funzionamenti a vuoto e in corto circuito possono, in certo qual modo, considerarsi come funzionamenti «elementari» in quanto che nel funzionamento in una condizione generica in cui la tensione d'uscita e la corrente d'uscita sono $\mathbf{E}_u$ ed $\mathbf{I}_u$, la tensione e corrente d'entrata non sono che la somma di quelle pertinenti ad un funzionamento a vuoto con tensione d'uscita $\mathbf{E}_u$ (cioè $\mathbf{AE}_u$, $\mathbf{CE}_u$) con quelle relative al funzionamento in corto circuito con corrente d'uscita $\mathbf{I}_u$ (cioè $\mathbf{BI}_u$, $\mathbf{DI}_u$).

Le precedenti consentono di esprimere le costanti fondamentali **A**, **B**, **C**, **D** in funzione delle impedenze a vuoto ed in corto circuito. Per lo scopo, si osservi che, tenendo conto della (12), si ha:

$$\mathbf{Z}_{ve} - \mathbf{Z}_{ce} = \frac{1}{\mathbf{CD}}, \quad \mathbf{Z}_{vu} - \mathbf{Z}_{cu} = \frac{1}{\mathbf{AC}},$$

per cui segue subito:

$$\mathbf{A}^2 = \frac{\mathbf{Z}_{ve}}{\mathbf{Z}_{vu} - \mathbf{Z}_{cu}}, \quad \mathbf{B}^2 = \frac{\mathbf{Z}_{vu}\mathbf{Z}_{ce}^2}{\mathbf{Z}_{ve} - \mathbf{Z}_{ce}} = \frac{\mathbf{Z}_{ve}\mathbf{Z}_{cu}^2}{\mathbf{Z}_{vu} - \mathbf{Z}_{cu}},$$

$$\mathbf{C}^2 = \frac{1}{\mathbf{Z}_{vu}(\mathbf{Z}_{ve} - \mathbf{Z}_{ce})} = \frac{1}{\mathbf{Z}_{ve}(\mathbf{Z}_{vu} - \mathbf{Z}_{cu})}, \quad \mathbf{D}^2 = \frac{\mathbf{Z}_{vu}}{\mathbf{Z}_{ve} - \mathbf{Z}_{ce}}.$$

In particolare, per una struttura a T essendo ovviamente:

$$(14) \quad \begin{cases} \mathbf{Z}_{ve} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2, \quad \mathbf{Z}_{ce} = \mathbf{Z}_1 + \dfrac{\mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3} = \dfrac{\mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_3\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3}, \\ \mathbf{Z}_{vu} = \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3, \quad \mathbf{Z}_{cu} = \mathbf{Z}_3 + \dfrac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} = \dfrac{\mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_3\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2}, \end{cases}$$

con facile calcolo si deducono i seguenti valori delle costanti fondamentali **A**, **B**, **C**, **D**:

$$(15) \quad \mathbf{A} = \frac{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_2}, \quad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_3\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_2}, \quad \mathbf{C} = \frac{1}{\mathbf{Z}_2}, \quad \mathbf{D} = \frac{\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_2}.$$

e si può facilmente constatare che questi valori verificano la (12).

Le analoghe formole per le strutture a Π si possono ottenere per dualità dalle precedenti; basterà infatti scambiare le $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{Z}_3$ con le $\mathbf{Y}_a$, $\mathbf{Y}_b$, $\mathbf{Y}_c$, gli indici v con c, ed inoltre **A** con **D** e **B** con **C**, in quanto che le correnti debbono prendere il posto delle tensioni e viceversa. Si trova così:

$$(14') \quad \begin{cases} \mathbf{Y}_{ce} = \mathbf{Y}_a + \mathbf{Y}_b, \quad \mathbf{Y}_{ve} = \mathbf{Y}_a + \dfrac{\mathbf{Y}_b\mathbf{Y}_c}{\mathbf{Y}_b + \mathbf{Y}_c} = \dfrac{\mathbf{Y}_b\mathbf{Y}_c + \mathbf{Y}_c\mathbf{Y}_a + \mathbf{Y}_a\mathbf{Y}_b}{\mathbf{Y}_b + \mathbf{Y}_c}, \\ \mathbf{Y}_{cu} = \mathbf{Y}_b + \mathbf{Y}_c, \quad \mathbf{Y}_{vu} = \mathbf{Y}_c + \dfrac{\mathbf{Y}_a\mathbf{Y}_b}{\mathbf{Y}_a + \mathbf{Y}_b} = \dfrac{\mathbf{Y}_b\mathbf{Y}_c + \mathbf{Y}_c\mathbf{Y}_a + \mathbf{Y}_a\mathbf{Y}_b}{\mathbf{Y}_a + \mathbf{Y}_b}, \end{cases}$$

$$(15') \quad \mathbf{A} = \frac{\mathbf{Y}_b + \mathbf{Y}_c}{\mathbf{Y}_b}, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{\mathbf{Y}_b}, \quad \mathbf{C} = \frac{\mathbf{Y}_b\mathbf{Y}_c + \mathbf{Y}_c\mathbf{Y}_a + \mathbf{Y}_a\mathbf{Y}_b}{\mathbf{Y}_b}, \quad \mathbf{D} = \frac{\mathbf{Y}_a + \mathbf{Y}_b}{\mathbf{Y}_b}.$$

Mediante queste formole è immediata la determinazione degli elementi $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{Z}_3$ del T (e degli elementi $\mathbf{Y}_a$, $\mathbf{Y}_b$, $\mathbf{Y}_c$ del Π) equivalente a un dato quadripolo, definito mediante le $\mathbf{Z}_v$ e $\mathbf{Z}_c$, oppure mediante le **A**, **B**, **C**, **D**.

Dalle (14) a sinistra si ricava invero:

$$\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_{ve} - \mathbf{Z}_2, \quad \mathbf{Z}_3 = \mathbf{Z}_{vu} - \mathbf{Z}_2,$$

e sostituendo questi valori nell'espressione di $\mathbf{Z}_2$ si ha

$$\mathbf{Z}_2 = \sqrt{\mathbf{Z}_{vu}(\mathbf{Z}_{ve} - \mathbf{Z}_{ce})},$$

per cui in definitiva le formole per la deduzione di $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{Z}_3$ dalle $\mathbf{Z}_v$ e $\mathbf{Z}_e$ sono:

$$\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_{ve} - \sqrt{\mathbf{Z}_{vu}(\mathbf{Z}_{ve} - \mathbf{Z}_{ce})}\,, \quad \mathbf{Z}_2 = \sqrt{\mathbf{Z}_{vu}(\mathbf{Z}_{ve} - \mathbf{Z}_{ce})}\,,$$
$$\mathbf{Z}_3 = \mathbf{Z}_{vu} - \sqrt{\mathbf{Z}_{vu}(\mathbf{Z}_{ve} - \mathbf{Z}_{ce})}\,,$$

con le duali per il Π:

$$\mathbf{Y}_a = \mathbf{Y}_{ce} - \sqrt{\mathbf{Y}_{cu}(\mathbf{Y}_{ce} - \mathbf{Y}_{ve})}\,, \quad \mathbf{Y}_b = \sqrt{\mathbf{Y}_{cu}(\mathbf{Y}_{ce} - \mathbf{Y}_{ve})}\,,$$
$$\mathbf{Y}_c = \mathbf{Y}_{cu} - \sqrt{\mathbf{Y}_{cu}(\mathbf{Y}_{ce} - \mathbf{Y}_{ve})}\,,$$

cui si può anche dare l'aspetto:

$$\mathbf{Z}_a = \frac{\mathbf{Z}_{ce}\mathbf{Z}_{vu}}{\mathbf{Z}_{vu} - \sqrt{\mathbf{Z}_{vu}(\mathbf{Z}_{ve} - \mathbf{Z}_{ce})}}\,, \quad \mathbf{Z}_b = \frac{\mathbf{Z}_{ce}\mathbf{Z}_{vu}}{\sqrt{\mathbf{Z}_{vu}(\mathbf{Z}_{ve} - \mathbf{Z}_{ce})}}\,,$$
$$\mathbf{Z}_c = \frac{\mathbf{Z}_{ce}\mathbf{Z}_{vu}}{\mathbf{Z}_{ve} - \sqrt{\mathbf{Z}_{vu}(\mathbf{Z}_{ve} - \mathbf{Z}_{ce})}}\,.$$

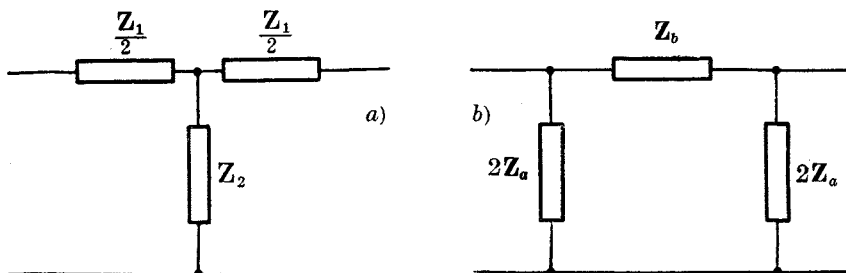



Fig. 88

Per avere i valori di $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{Z}_3$ o di $\mathbf{Y}_a$, $\mathbf{Y}_b$, $\mathbf{Y}_c$ in funzione di **A**, **B**, **C**, **D**, basta risolvere la prima, terza e quarta delle (15), rispettivamente la prima, seconda e quarta delle (15'). Si ottiene così:

$$(16) \qquad \mathbf{Z}_1 = \frac{\mathbf{A} - 1}{\mathbf{C}}\,, \quad \mathbf{Z}_2 = \frac{1}{\mathbf{C}}\,, \quad \mathbf{Z}_3 = \frac{\mathbf{D} - 1}{\mathbf{C}}\,;$$

$$(17) \qquad \mathbf{Y}_a = \frac{\mathbf{D} - 1}{\mathbf{B}}\,, \quad \mathbf{Y}_b = \frac{1}{\mathbf{B}}\,, \quad \mathbf{Y}_c = \frac{\mathbf{A} - 1}{\mathbf{B}}\,.$$

8. - Quadripoli simmetrici. - Impedenza caratteristica. — Un quadripolo dicesi *simmetrico* quando coincide col suo inverso. In tal caso si avrà evidentemente:

$$\mathbf{A} = \mathbf{D}\,, \quad \mathbf{Z}_{ve} = \mathbf{Z}_{vu}\,, \quad \mathbf{Z}_{ce} = \mathbf{Z}_{cu}\,,$$

ed il T equivalente (fig. 88 *a*)) avrà uguali i rami *longitudinali*, le cui singole impedenze, seguendo l'uso, indicheremo con $\frac{\mathbf{Z}_1}{2}$, chiamando an-

cora $\mathbf{Z}_2$ l'impedenza del ramo *trasversale*. Analogamente il Π equivalente (fig. 88 *b*)) si comporrà con una impedenza longitudinale $\mathbf{Z}_b$ e con due trasversali uguali, ciascuna di valore $2\mathbf{Z}_a$.

Nello studio dei quadripoli simmetrici, è di fondamentale importanza la nozione di una particolare impedenza, detta *caratteristica* (o *iterativa*), definita da ciò, che quando il quadripolo è chiuso su di essa, l'impedenza d'entrata risulta pure uguale a quella. Indicando tale impedenza con $\mathbf{Z}_0$, la sua espressione effettiva si trova subito pensando che, per definizione, se si chiude il quadripolo sulla sua impedenza caratteristica $\mathbf{Z}_0$, risulta pure uguale a $\mathbf{Z}_0$ l'impedenza di entrata.

Pertanto ricordando che la (11), nel caso attuale, per essere $\mathbf{A} = \mathbf{D}$, si scrive:

$$\mathbf{Z}_e = \frac{\mathbf{A}\mathbf{Z}_u + \mathbf{B}}{\mathbf{C}\mathbf{Z}_u + \mathbf{A}},$$

basterà porre in questa $\mathbf{Z}_e = \mathbf{Z}_u = \mathbf{Z}_0$ per dedurne il cercato valore di $\mathbf{Z}_0$:

$$\mathbf{Z}_0^2 = \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{C}}. \tag{18}$$

Siccome, d'altro canto, in questo caso, si ha una unica $\mathbf{Z}_v$ ed una unica $\mathbf{Z}_c$ di rispettivi valori:

$$\mathbf{Z}_v = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{C}}, \quad \mathbf{Z}_c = \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{A}},$$

si ha la importante relazione:

$$\mathbf{Z}_0 = \sqrt{\mathbf{Z}_v\mathbf{Z}_c},$$

la quale esprime che l'impedenza caratteristica è la media geometrica delle impedenze a vuoto ed in corto circuito.

Nel caso di una struttura a T o a Π, applicando le (14), (15), (14'), (15'), in cui a $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_3$, $\mathbf{Y}_a$, $\mathbf{Y}_c$ siano sostituiti $\frac{\mathbf{Z}_1}{2}$, $\frac{\mathbf{Z}_1}{2}$, $\frac{\mathbf{Y}_a}{2}$, $\frac{\mathbf{Y}_a}{2}$ rispettivamente, si trovano i seguenti valori per le impedenze a vuoto, in corto circuito, caratteristica, e per le costanti $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$:

per il T:

$$\mathbf{Z}_v = \frac{\mathbf{Z}_1}{2} + \mathbf{Z}_2,$$

$$\mathbf{Z}_c = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \frac{\mathbf{Z}_1^2}{4}}{\frac{\mathbf{Z}_1}{2} + \mathbf{Z}_2}, \quad \mathbf{Z}_0 = \sqrt{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \frac{\mathbf{Z}_1^2}{4}} = \frac{\sqrt{\mathbf{Y}_1\mathbf{Y}_2 + \frac{\mathbf{Y}_2^2}{4}}}{\mathbf{Y}_1\mathbf{Y}_2};$$

$$\mathbf{A} = 1 + \frac{\mathbf{Z}_1}{2\mathbf{Z}_2}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{Z}_1\left(1 + \frac{\mathbf{Z}_1}{4\mathbf{Z}_2}\right), \quad \mathbf{C} = \frac{1}{\mathbf{Z}_2};$$

per il Π:

$$\mathbf{Y}_c = \frac{\mathbf{Y}_a}{2} + \mathbf{Y}_b,$$

$$\mathbf{Y}_v = \frac{\mathbf{Y}_a\mathbf{Y}_b + \frac{\mathbf{Y}_a^2}{4}}{\frac{\mathbf{Y}_a}{2} + \mathbf{Y}_b}, \quad \mathbf{Y}_0 = \sqrt{\mathbf{Y}_a\mathbf{Y}_b + \frac{\mathbf{Y}_a^2}{4}} = \frac{\sqrt{\mathbf{Z}_a\mathbf{Z}_b + \frac{\mathbf{Z}_b^2}{4}}}{\mathbf{Z}_a\mathbf{Z}_a};$$

$$\mathbf{A} = 1 + \frac{\mathbf{Y}_a}{2\mathbf{Y}_b}, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{\mathbf{Y}_b}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{Y}_a\left(1 + \frac{\mathbf{Y}_a}{4\mathbf{Y}_b}\right).$$

da cui si deducono le espressioni delle $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$, rispett. $\mathbf{Y}_a$, $\mathbf{Y}_b$ in funzione di $\mathbf{Z}_v$, $\mathbf{Z}_c$ e di $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{Z}_1 = 2\mathbf{Z}_v - 2\sqrt{\mathbf{Z}_v(\mathbf{Z}_v - \mathbf{Z}_c)} = 2\frac{\mathbf{A}-1}{\mathbf{C}}, \quad \mathbf{Z}_2 = \sqrt{\mathbf{Z}_v(\mathbf{Z}_v - \mathbf{Z}_c)} = \frac{1}{\mathbf{C}};$$

$$\mathbf{Y}_a = 2\mathbf{Y}_c - 2\sqrt{\mathbf{Y}_c(\mathbf{Y}_c - \mathbf{Y}_v)} = 2\frac{\mathbf{A}-1}{\mathbf{B}}, \quad \mathbf{Y}_b = \sqrt{\mathbf{Y}_c(\mathbf{Y}_c - \mathbf{Y}_v)} = \frac{1}{\mathbf{B}}.$$

Se nella precedente espressione di $\mathbf{Y}_0$ si suppone $\mathbf{Z}_a = \mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_b = \mathbf{Z}_2$, si ottiene la seguente notevole relazione fra le impedenze caratteristiche, che indicheremo con $\mathbf{Z}_{0T}$, $\mathbf{Z}_{0\pi}$ dei due quadripoli (rappresentati in fig. 88) costituiti connettendo a T ed a Π *le medesime* impedenze $\mathbf{Z}_1$ e $\mathbf{Z}_2$:

$$\mathbf{Z}_{0T}\mathbf{Z}_{0\pi} = \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 .$$

9. - **Esponente di trasduzione.** — La impedenza caratteristica $\mathbf{Z}_0$ non può evidentemente bastare a definire un quadripolo simmetrico, giacchè questo dipende da *due* costanti complesse. Si suole assumere come seconda costante di definizione il così detto *esponente di trasduzione* (che, per una ragione che vedremo al n. 12, si chiama anche *costante di propagazione*), alla cui nozione perveniamo come segue.

Supponiamo di chiudere il quadripolo sulla sua impedenza caratteristica $\mathbf{Z}_0$. Siccome, per la stessa definizione di questa, il rapporto (complesso) fra tensione e corrente all'uscita uguaglia l'analogo all'entrata, si avrà:

$$\frac{\mathbf{E}_e}{\mathbf{E}_u} = \frac{\mathbf{I}_e}{\mathbf{I}_u},$$

cioè: se un quadripolo simmetrico è chiuso sulla sua impedenza caratteristica, il rapporto fra i valori (complessi) della tensione d'entrata e quella d'uscita è uguale all'analogo fra le correnti.

Dunque il passaggio attraverso il quadripolo produce una medesima *attenuazione* (misurata dal modulo di quel rapporto) ed una medesima *rotazione di fase* (misurata dall'argomento di quello stesso rapporto) sia per la tensione che per la corrente.

Ciò premesso, si chiama *esponente di trasduzione* il logaritmo naturale del rapporto $\frac{\mathbf{E}_e}{\mathbf{E}_u} = \frac{\mathbf{I}_e}{\mathbf{I}_u}$, cioè quel numero complesso che ha per modulo il logaritmo naturale del rapporto dei moduli delle tensioni e delle correnti e per argomento la comune rotazione di fase. Indicandolo con $g = b + ja$, sarà:

$$\frac{E_e}{E_u} = \frac{I_e}{I_u} = e^b,$$

il che val quanto dire che b misura in unità logaritmiche (vedi n. seg.) l'*attenuazione* di corrente (o di tensione) prodotta dal quadripolo.

Siccome ciascuno dei rapporti $\frac{\mathbf{E}_e}{\mathbf{E}_u}$, $\frac{\mathbf{I}_e}{\mathbf{I}_u}$ vale e^g, si ha anche:

$$e^{2g} = \frac{\mathbf{E}_e \mathbf{I}_e}{\mathbf{E}_u \mathbf{I}_u} \text{ [1]}, \tag{19}$$

e pertanto il modulo e^{2g} del primo membro misura il rapporto tra le potenze apparenti all'entrata e all'uscita.

È interessante notare che la costante di propagazione dipende solo dal rapporto delle impedenze costitutive $\mathbf{Z}_1$ e $\mathbf{Z}_2$ del T equivalente (o delle $\mathbf{Y}_a$ e $\mathbf{Y}_b$ del Π). Infatti, se nella prima delle (10) si pone $\frac{\mathbf{E}_u}{\mathbf{Z}_0}$ al posto di $\mathbf{I}_u$, o nella seconda $\mathbf{Z}_0 \mathbf{I}_u$ al posto di $\mathbf{E}_u$, si ottiene:

$$\frac{\mathbf{E}_e}{\mathbf{E}_u} = \frac{\mathbf{I}_e}{\mathbf{I}_u} = \mathbf{A} + \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{Z}_0}.$$

Ponendo, in questa, per $\mathbf{Z}_0$ il suo valore $\sqrt{\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{C}}}$ e tenendo conto della relazione $\mathbf{A}^2 - \mathbf{BC} = 1$, si ha

$$e^g = \mathbf{A} + \sqrt{\mathbf{A}^2 - 1},$$

che dimostra l'asserto, perchè è $\mathbf{A} = 1 + \frac{\mathbf{Z}_1}{2\mathbf{Z}_2}$.

Dalla precedente si deduce poi:

$$e^{-g} = \frac{1}{\mathbf{A} + \sqrt{\mathbf{A}^2 - 1}} = \mathbf{A} - \sqrt{\mathbf{A}^2 - 1},$$

---

[1] Il secondo membro deve intendersi rappresentare il prodotto dei due numeri complessi $\frac{\mathbf{E}_e}{\mathbf{E}_u}$ ed $\frac{\mathbf{I}_e}{\mathbf{I}_u}$ piuttosto che il rapporto fra i complessi $\mathbf{E}_e \mathbf{I}_e$ ed $\mathbf{E}_u \mathbf{I}_u$ cui non spetta un significato concreto. Tuttavia il loro modulo rappresenta un'entità fisica, precisamente la *potenza apparente*.

e quindi si ha la notevole formola, che in seguito utilizzeremo:

$$\frac{e^g + e^{-g}}{2} = \mathrm{ch}g = \mathbf{A} = 1 + \frac{\mathbf{Z}_1}{2\mathbf{Z}_2}, \tag{19'}$$

da cui segue:

$$\mathrm{sh}g = \sqrt{\mathbf{A}^2 - 1} = \sqrt{\mathbf{BC}} = \sqrt{\frac{\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_2} + \left(\frac{\mathbf{Z}_1}{2\mathbf{Z}_2}\right)^2} = \frac{\mathbf{Z}_0}{\mathbf{Z}_2}, \tag{19''}$$

$$e^g = \mathrm{ch}g + \mathrm{sh}g = 1 + \frac{\mathbf{Z}_1}{2\mathbf{Z}_2} + \sqrt{\frac{\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_2} + \left(\frac{\mathbf{Z}_1}{2\mathbf{Z}_2}\right)^2}. \tag{19'''}$$

L'uso delle costanti $\mathbf{Z}_0$ e g, in luogo delle $\mathbf{Z}_1$ e $\mathbf{Z}_2$, per definire il quadripolo presenta il vantaggio che, avendo esse una definizione indipendente dalla struttura del quadripolo stesso, hanno carattere autoduale, e pertanto si prestano tanto per il T, quanto per il Π.

Ciò è messo in evidenza chiaramente dalle formole:

$$\mathbf{Z}_0 = \sqrt{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \frac{\mathbf{Z}_1^2}{4}}, \quad \mathbf{Y}_0 = \sqrt{\mathbf{Y}_a\mathbf{Y}_b + \frac{\mathbf{Y}_a^2}{4}}$$

relative all'impedenza caratteristica, e dalla

$$\mathrm{ch}g = 1 + \frac{\mathbf{Y}_a}{2\mathbf{Y}_b} \left(= 1 + \frac{\mathbf{Z}_b}{2\mathbf{Z}_a}\right),$$

che agevolmente si deduce per la costante di propagazione di una struttura a Π.

Si possono poi scrivere la seguenti formole che permettono di esprimere le impedenze $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$ in funzione di $\mathbf{Z}_0$ e di g:

$$\mathbf{Z}_1 = 2\mathbf{Z}_0 \,\mathrm{th}\frac{g}{2}, \quad \mathbf{Z}_2 = \frac{\mathbf{Z}_0}{\mathrm{sh}g},$$

la seconda delle quali è immediata conseguenza della (19″), e la prima si deduce confrontando questa con la (19′) e ricordando le formole di App., *A*, 3.

Analogamente, per il Π si ha:

$$\mathbf{Y}_a = 2\mathbf{Y}_0 \,\mathrm{th}\frac{g}{2}, \quad \mathbf{Y}_b = \frac{\mathbf{Y}_0}{\mathrm{sh}g},$$

cioè

$$2\mathbf{Z}_a = \mathbf{Z}_0 \,\mathrm{cth}\frac{g}{2}, \quad \mathbf{Z}_b = \mathbf{Z}_0 \mathrm{sh}g.$$

Ed infine si notino le formole mediante le quali si esprimono **A**, **B**, **C** in funzione di $\mathbf{Z}_0$ e g:

$$\mathbf{A} = \mathrm{ch}g, \quad \mathbf{B} = \mathbf{Z}_0\mathrm{sh}g, \quad \mathbf{C} = \frac{\mathrm{sh}g}{\mathbf{Z}_0},$$

le due ultime delle quali si deducono immediatamente dalle (19″).

Mediante queste ultime, alla relazione (11) fra l'impedenza d'entrata e quella d'uscita si può dare la forma:

$$\frac{Z_e}{Z_0} = \frac{Z_u \mathrm{chg} + Z_0 \mathrm{shg}}{Z_u \mathrm{shg} + Z_0 \mathrm{chg}} . \tag{11'}$$

10. - Digressione sulle unità logaritmiche. — La costante b considerata nel n. prec. dà una misura della attenuazione (di corrente o di tensione), espressa in una unità, di tipo logaritmico, che si chiama *neper*. In sostanza, la misura in neper di una attenuazione non è che il logaritmo naturale del corrispondente rapporto. Generalmente in pratica ci si vale di un'altra unità, il *bel*, corrispondente alla metà del logaritmo decimale del rapporto predetto, e della quale si considera per lo più il sottomultiplo secondo 10, il *decibel*. Essendo $\mathrm{Log}\, e = 0{,}434\ldots$, fra il neper e il decibel intercedono ovviamente le relazioni seguenti:

$$1 \text{ neper} = 8{,}686 \text{ decibel}, \quad 1 \text{ decibel} = 0{,}115 \text{ neper}.$$

Tali unità logaritmiche si usano anche per la valutazione di attenuazioni (rapporti) di potenze, se non che in tale caso il decibel si fa corrispondere alla decima (anzichè alla ventesima) parte del logaritmo decimale del rapporto fra le due potenze che si considerano.

L'uso delle unità logaritmiche per la misura delle attenuazioni, cioè di rapporti di correnti, di tensioni e di potenze (i quali ultimi corrispondono a *rendimenti energetici*) si è attualmente introdotto nella tecnica delle comunicazioni sopratutto per la comodità che esso presenta nei calcoli, dovuta al fatto che ai prodotti e ai quozienti si sostituiscono rispettivamente somme e differenze. Inoltre è da notarsi che esso trova una plausibile giustificazione in ciò, che, secondo la legge psicofisica di Fechner, la sensazione degli organi umani è proporzionale al logaritmo dello stimolo, talchè la differenza fra due sensazioni risulta proporzionale alla differenza fra le misure delle cause, espresse in unità logaritmiche. Anzi, siccome per le sensazioni acustiche il rapporto fra due energie di stimolo di cui l'orecchio avverte la distinzione è di circa 1,26, il cui logaritmo decimale è 0,1, resta più particolarmente così giustificata l'adozione dell'unità *decibel*.

Come risulta da quanto sopra, le unità logaritmiche si usano indifferentemente per le valutazioni di rapporti di potenze P come per i rapporti di correnti I e di tensioni V, con l'avvertenza che, allo scopo di avere misure confrontabili, si assumono nei tre casi, come misure in decibel (db) dei rapporti stessi i rispettivi valori:

$$n_{(db)} = 10 \,\mathrm{Log} \frac{P_1}{P_2} = 20 \,\mathrm{Log} \frac{I_1}{I_2} = 20 \,\mathrm{Log} \frac{V_1}{V_2} .$$

Ciò è giustificato dal fatto che, pensando di operare con un sistema ricettore di impedenza costante, il rapporto delle potenze risulta uguale al quadrato del corrispondente rapporto delle correnti o delle tensioni ai capi.

Partendo da una potenza *fissa* P_0, ad ogni altra potenza P compete una misura n definita da:

$$n_{(db)} = 10 \operatorname{Log} \frac{P}{P_0} .$$

Tale numero n si definisce come *livello* della data potenza P, bene inteso con riferimento alla potenza P_0. Generalmente, per le applicazioni telefoniche, si assume $P_0 = 1\text{mW}$, cioè si attribuisce il livello *zero* alla potenza di un milliwatt. Nelle stesse applicazioni, per livello zero di corrente (rispettivamente di tensione) si assume convenzionalmente quella che in corrispondenza alla potenza di livello zero attraversa (rispettivamente si localizza ai capi di) una resistenza ohmica di 600 ohm. Tale corrente I_0 e tale tensione V_0 valgono dunque:

$$I_0 = \sqrt{\frac{10^{-3}}{600}}\,\text{A} = 1{,}29\,\text{mA} , \qquad V_0 = \sqrt{600 \cdot 10^{-3}} = 0{,}775\,\text{V} .$$

Stabilita una potenza P_0 di riferimento, ad ogni potenza P corrisponde un ben determinato livello, esprimibile in neper o in decibel, ma, naturalmente, non bisogna confondere questo numero con la misura della potenza P.

La misura in unità logaritmiche del rapporto $\frac{P}{P_0}$ fra due qualunque potenze P e P_0 viene talvolta denominata il « guadagno » nel passaggio dalla seconda alla prima. Così, per $P = 100\,P_0$, si dirà che il passaggio da P_0 a P (*aumento* di potenza) corrisponde ad un guadagno di 20 decibel, e correlativamente pel passaggio inverso (*attenuazione* di potenza) si parlerà di una *perdita* di 20 db (cioè del guadagno di — 20 db). Se si trattasse invece di correnti o di tensioni, lo stesso guadagno di 20 decibel corrisponderebbe ad un rapporto 10 : 1. Se attraverso più trasformazioni successive, una potenza (o corrente, o tensione) subisce i guadagni rispettivi espressi dai numeri (positivi o negativi) $n_1, n_2, \ldots$ di decibel, il passaggio dalla prima all'ultima si verifica con un guadagno di $n_1 + n_2 + \ldots$ db.

La tabella seguente contiene i valori dei rapporti di potenze corrispondenti ad un dato numero di db. Occorrendo trasformare in db un rapporto fra tensioni o correnti, basterà evidentemente raddoppiare il numero di db fornito dalla tabella per lo stesso rapporto, considerato come rapporto di potenze. Per le eventuali interpolazioni occorre ricordare che, essendo i db unità logaritmiche, ad una somma o una sottrazione effettuata su di essi corrisponde un prodotto, rispettivamente un

quoziente fra i valori del rapporto. Per es., per valutare il numero di db corrispondente al rapporto di potenze 138 : 1, basterebbe *sommare* quelli pertinenti a 100 e ad 1,38, cioè 20 + 1,4 = 21,4 db. Così, se una corrente dal valore di 1 amp. si riduce a 2 mA, cioè si attenua secondo il rapporto 1 : 500, la misura in db della corrispondente perdita vale 54, che si ottiene sommando 40 con 14, equivalenti rispettivamente ai rapporti 100 e 5 fra correnti.

db	rapporto potenze	db	rapporto potenze	db	rapporto potenze	db	rapporto potenze
0,1	1,023	1,2	1,318	3,2	2,09	7,0	5,01
0,2	1,047	1,4	1,380	3,4	2,19	7,5	5,62
0,3	1,072	1,6	1,445	3,6	2,29	8,0	6,31
0,4	1,096	1,8	1,514	3,8	2,40	8,5	7,08
0,5	1,122	2,0	1,585	4,0	2,51	9,0	7,94
0,6	1,148	2,2	1,660	4,5	2,82	9,5	8,91
0,7	1,175	2,4	1,738	5,0	3,16	10,0	10,—
0,8	1,202	2,6	1,820	5,5	3,55	20,0	100,—
0,9	1,230	2,8	1,906	6,0	3,98	30,0	1 000,—
1,0	1,259	3,0	1,995	6,5	4,47	40,0	10 000,—

11. - Quadripoli simmetrici in cascata. — Due quadripoli si dicono connessi in *cascata* quando i morsetti d'entrata del secondo sono collegati con quelli d'uscita del primo. Mediante tali connessioni si viene a costituire un nuovo quadripolo, di cui è utile saper calcolare gli elementi caratteristici.

Se i due quadripoli sono definiti dalle costanti $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{D}_1$ per l'uno, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{D}_2$ per l'altro, per calcolare le costanti $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ del quadripolo ottenuto connettendo i due in cascata, basta scrivere le relazioni del tipo (10) relative al primo ed al secondo quadripolo, utilizzando come tensione e corrente d'entrata del secondo la tensione e corrente d'uscita del primo. Così facendo, si trova immediatamente

$$\mathbf{E}_e = (\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 + \mathbf{B}_1\mathbf{C}_2)\mathbf{E}_u + (\mathbf{A}_1\mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_1\mathbf{D}_2)\mathbf{I}_u ,$$
$$\mathbf{I}_e = (\mathbf{C}_1\mathbf{A}_2 + \mathbf{D}_1\mathbf{C}_2)\mathbf{E}_u + (\mathbf{C}_1\mathbf{B}_2 + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2)\mathbf{I}_u ,$$

e cioè:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 + \mathbf{B}_1\mathbf{C}_2 , \quad \mathbf{B} = \mathbf{A}_1\mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_1\mathbf{D}_2$$
$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_1\mathbf{A}_2 + \mathbf{D}_1\mathbf{C}_2 , \quad \mathbf{D} = \mathbf{C}_1\mathbf{B}_2 + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2 ,$$

Per ricordare queste formole si osservi che, disposte le quaterne di coefficienti relative ad ogni quadripolo in un quadro con la disposizione

stessa con la quale essi compaiono nella relazione fondamentale (10), cioè:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{A}_2 & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_2 \end{pmatrix},$$

gli elementi dell'analogo quadro $\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}$ si calcolano con la regola seguente: l'elemento situato all'incrocio della linea r^{ma} con la colonna s^{ma} $(r, s = 1, 2)$ si ottiene sommando ordinatamente i prodotti degli elementi della linea r^{ma} del quadro di sinistra con quelli della colonna s^{ma} del quadro di destra. Così ad es., l'elemento $\mathbf{B}$, situato all'incrocio della prima linea con la seconda colonna, vale la somma dei prodotti di $\mathbf{A}_1\mathbf{B}_2$ con $\mathbf{B}_1\mathbf{D}_2$ rispettivamente, ecc.

12. - Significato della impedenza caratteristica e della costante di propagazione. — Dalle definizioni di impedenza caratteristica e di costante di propagazione discende ovviamente che: se n quadripoli simmetrici uguali sono disposti in cascata, ne risulterà un quadripolo la cui impedenza caratteristica $\mathbf{Z}_0$ coincide con quella di ciascuno dei componenti, e pertanto, ove un tal sistema sia chiuso su $\mathbf{Z}_0$, risulterà pure uguale a $\mathbf{Z}_0$ l'impedenza d'entrata dell'intero sistema, ed anche l'impedenza valutata alla giunzione fra due quadripoli contigui qualunque (impedenza d'entrata del sistema residuante dalla soppressione di tutti i quadripoli precedenti la giunzione). La costante di propagazione del sistema corrisponderà invece al multiplo secondo n della costante $\mathbf{g}$ relativa ad ognuno dei quadripoli componenti.

La considerazione di una catena siffatta conduce ad esaminare le proprietà essenziali delle costanti $\mathbf{Z}_0$ e $\mathbf{g}$, proprietà che consentono di addivenire a definizioni fisicamente interessanti delle costanti stesse, e giustificano quindi la loro importanza nello studio del funzionamento di un quadripolo simmetrico.

Per lo scopo, supponiamo la nostra catena chiusa su una impedenza $\mathbf{Z}$ qualunque. Poichè la catena stessa equivale ad un quadripolo definito dal valore $\mathbf{Z}_0$ dell'impedenza caratteristica ed $n\mathbf{g}$ della costante di propagazione, l'impedenza d'entrata $\mathbf{Z}_e$ sarà, in virtù della (11′), data dall'espressione:

$$\mathbf{Z}_e = \mathbf{Z}_0 \frac{\mathbf{Z}_0 \mathrm{ch}\, n\mathbf{g} + \mathbf{Z}_u \mathrm{sh}\, n\mathbf{g}}{\mathbf{Z}_0 \mathrm{sh}\, n\mathbf{g} + \mathbf{Z}_u \mathrm{ch}\, n\mathbf{g}},$$

cui, dividendo numeratore e denominatore per ch $n\mathbf{g}$, daremo l'aspetto:

$$\mathbf{Z}_e = \mathbf{Z}_0 \frac{\mathbf{Z}_0 + \mathbf{Z}_u \mathrm{th}\, n\mathbf{g}}{\mathbf{Z}_0 \mathrm{th}\, n\mathbf{g} + \mathbf{Z}_u}.$$

Ora si osservi che per $n \to \infty$, è (App. *A*, 3), $\lim \operatorname{th} ng = 1$ e pertanto $\lim \mathbf{Z}_e = \mathbf{Z}_0$. Si ha dunque che, crescendo indefinitamente il numero degli elementi costituenti una catena di quadripoli simmetrici uguali, l'impedenza d'entrata tende a divenire indipendente dalla impedenza di carico (come del resto è quasi evidente fisicamente), non solo, ma essa tende ad un valore ben determinato, precisamente *uguale all'impedenza caratteristica.* Questa può dunque definirsi come l'impedenza di entrata della catena costituita connettendo in cascata infiniti quadripoli uguali al dato. E risulta inoltre chiaro che un quadripolo simmetrico o una catena di più quadripoli ad esso uguali, in numero finito, qualora sia chiusa sull'impedenza caratteristica, si comporta allo stesso modo come se fosse proseguita con infiniti elementi.

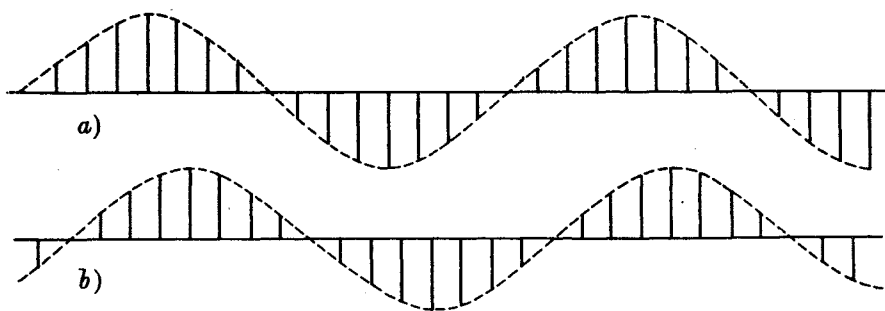



Fig. 89

Possiamo pervenire ad una interessante interpretazione del numero $\mathbf{g}$ — atta anzi a giustificare il nome di costante di propagazione — considerando le correnti e le tensioni alla giunzione fra due elementi consecutivi della catena infinita dianzi considerata.

All'uopo osserviamo che, alla giunzione seguente l'n^{mo} elemento, la tensione $\mathbf{E}$ e la corrente $\mathbf{I}$ valgono

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_e e^{-n\mathbf{g}}, \quad \mathbf{I} = \mathbf{I}_e e^{-n\mathbf{g}}.$$

Ciò significa che, essendo $\mathbf{g} = b + ja$, esse, a partire dall'entrata, si ritrovano attenuate di nb neper, e sfasate in ritardo di na radianti. Pertanto, se al solito, sono sinusoidali la tensione e la corrente all'entrata, la distribuzione dei valori, in un determinato istante, delle correnti (o delle tensioni) si presenterà come quella delle ordinate di una sinusoide, se per un momento prescindiamo dall'attenuazione dipendente dalla parte reale b di $\mathbf{g}$, cioè se supponiamo che sia $b = 0$. Naturalmente però, non si tratterà di tutti i punti della sinusoide, bensì soltanto di un certo numero costituente una successione *discreta*, e precisamente tanto più vi-

cina ad una successione *continua* quanto più piccolo è il valore della parte immaginaria a della costante di propagazione. Per es., nell'istante in cui la corrente è nulla, i valori delle correnti all'uscita dei successivi quadripoli saranno quelli delle ordinate segnate in fig. 89 *a*) dove, per fissare le idee, si è supposto $a = \frac{\pi}{8}$. In effetto, a causa dell'attenuazione, il luogo degli estremi di tali ordinate apparterrà invece ad una « sinusoide smorzata » quale è disegnata in fig. 90 *a*). In istanti successivi, la distribuzione dei valori delle correnti si presenterà come alle figure *b*) sottostanti alle *a*) cioè tutto avviene come se l'« onda » rappresentata dalla fig. 89 *a*) (o meglio l'onda attenuata di fig. 90 *a*)) si spostasse lungo la catena con una certa velocità.

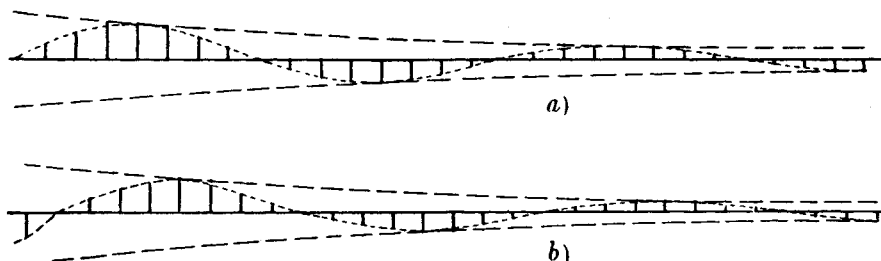



Fig. 90

Quale sia il valore di questa velocità si può immediatamente calcolare in funzione della « lunghezza d'onda », così chiamando la distanza fra due successivi punti di massima ordinata di ciascuna delle configurazioni stesse; invero tale velocità v è precisamente quella di cui dovrebbe essere animato un mobile che percorresse la lunghezza d'onda λ durante un periodo della corrente (o della tensione) sinusoidale d'entrata, cioè nel tempo $\frac{2\pi}{\omega}$. Si ha dunque:

$$v = \frac{\omega\lambda}{2\pi} = \lambda f,$$

essendo f la frequenza.

A scanso di equivoci, si deve osservare che tale λ non è una effettiva lunghezza, in quanto che nei diagrammi di figg. 89, 90 le ascisse non rappresentano lunghezze, ma soltanto esse simboleggiano una misura del numero di elementi della catena di quadripoli. Con riguardo a tale circostanza, la indicheremo con ν, con che tale ν starà a significare il numero di quadripoli che è necessario oltrepassare affinchè lo sfasamento fra la

corrente (o la tensione) all'inizio ed al termine del gruppo di ν quadripoli raggiunga il valore 2π, o, ciò che è lo stesso, il minimo numero di elementi che si debbono connettere — sempre ben inteso, con chiusura sull'impedenza caratteristica — affinchè la tensione e la corrente all'uscita siano in fase con quelle all'entrata. Siccome ogni elemento produce uno sfasamento a, sarà

$$\nu = \frac{2\pi}{a}.$$

Con quanto precede è pienamente giustificato il nome di costante di propagazione attribuito alla costante **g**.

13. - Quadripoli generali. - Impedenze immagini. - Esponente di trasduzione. — Passando all'esame dei quadripoli generali, cioè non simmetrici, sempre riducibili, come si è visto, ad una struttura a T o a Π caratterizzata da tre distinte impedenze, si può chiedere se anche per questi non si possa pervenire a nozioni analoghe a quelle di impedenza caratteristica e di costante di propagazione (o esponente di trasduzione).

Per tentare la estensione della nozione di impedenza caratteristica parrebbe che, lasciandosi guidare da quella stabilita pel caso di strutture simmetriche, si dovesse considerare quella impedenza tale che, chiudendo su di essa il quadripolo, questo presenti all'entrata una impedenza a quella uguale. Di tali impedenze ne esistono in generale due, e sono quelle che soddisfano l'equazione di secondo grado cui si riduce la (11) ponendo la condizione $\mathbf{Z}_e = \mathbf{Z}_u$. Ma, come agevolmente si può verificare, quando si inverte il senso di funzionamento del quadripolo non si ritrovano più i medesimi valori per tali impedenze. Non solo, ma se poi, valendosi di esse, si va a tentare la definizione di una costante di propagazione, seguendo le indicazioni dettate dalla formola (19), si troverebbe che anch'essa risulta legata al senso di funzionamento. Per modo che in definitiva, si finirebbe con l'avere a che fare con grandezze cui non spettano le proprietà essenziali e caratteristiche delle $\mathbf{Z}_0$ e **g** considerate nello studio dei quadripoli simmetrici.

Si raggiunge invece la desiderata estensione seguendo un'altra via, e precisamente osservando che, da un quadripolo non simmetrico, che brevemente indicheremo con Q_{eu}, si può sempre dedurre una struttura simmetrica: basta invero connettere il dato quadripolo con la sua « immagine speculare » Q_{ue}, e poichè ciò può farsi in due modi distinti, a seconda cioè che si opera la connessione secondo la figura 91 *a*) o secondo la 91 *b*), si perverrà alla considerazione di *due* impedenze caratteristiche, cui si potranno associare le corrispondenti costanti di propagazione. Ma quel che è particolarmente importante si è che, come fra poco vedremo, tali costanti di propagazione si riducono ad *una sola*.

Le due impedenze caratteristiche dei sistemi simmetrici $Q_{eu}Q_{ue}$ e $Q_{ue}Q_{eu}$ si chiamano le *impedenze immagini* del dato quadripolo Q_{eu} relative al lato *e*, rispettivamente *u*. Le indicheremo con $\mathbf{Z}_{ie}$ e $\mathbf{Z}_{iu}$.

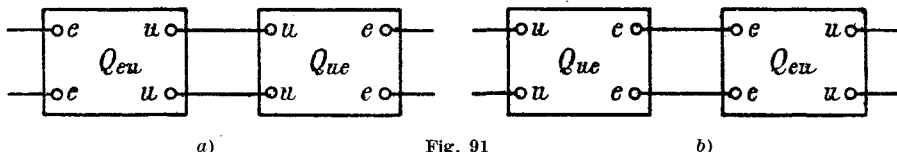
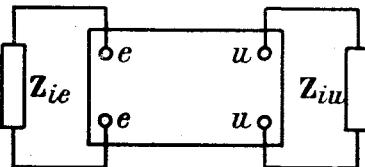
a) Fig. 91 *b*)

Per comprendere il significato di tali $\mathbf{Z}_{ie}$, $\mathbf{Z}_{iu}$, basta osservare che, se si indica con $\mathbf{Z}$ l'impedenza di entrata di Q_{ue} quando questo è chiuso su $\mathbf{Z}_{ie}$ o, come suol dirsi, l'impedenza che in tali condizioni Q_{ue} presenta *visto dal lato u*, il sistema $Q_{eu}Q_{ue}$ chiuso su $\mathbf{Z}_{ie}$ equivale al solo Q_{eu} chiuso su $\mathbf{Z}$. Ciò corrisponde a dire che se il quadripolo Q_{eu} è chiuso a sinistra su $\mathbf{Z}_{ie}$ ed a destra su $\mathbf{Z}$, guardando dalle due parti dei morsetti *e* si vede una impedenza $\mathbf{Z}_{ie}$, e dalle due parti dei morsetti *u* una impedenza $\mathbf{Z}$. Se ora consideriamo la connessione $Q_{ue}Q_{eu}$ e la chiudiamo a destra su tale $\mathbf{Z}$, ciò equivale ad aver chiuso Q_{ue} su $\mathbf{Z}_{ie}$, e quindi la corrispondente impedenza d'entrata è $\mathbf{Z}$. Si deduce pertanto che è $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_{iu}$, e quindi si può dire che (fig. 92) quando il quadripolo sia connesso a sinistra su $\mathbf{Z}_{ie}$ e a destra su $\mathbf{Z}_{iu}$, si ha un sistema tale che, visto dai due lati dei morsetti *e*, presenta impedenze uguali ($= \mathbf{Z}_{ie}$), e così pure presenta impedenze fra loro uguali ($= \mathbf{Z}_{iu}$) visto dai due lati dei morsetti *u*.

Fig. 92

È per questa ragione che le $\mathbf{Z}_{ie}$, $\mathbf{Z}_{iu}$ si denominano impedenze immagini.

Tenendo presente la relazione fondamentale (11), si hanno senz'altro, per la definizione stessa delle $\mathbf{Z}_{ie}$, $\mathbf{Z}_{iu}$, le due uguaglianze:

$$\mathbf{Z}_{ie} = \frac{\mathbf{A}\mathbf{Z}_{iu} + \mathbf{B}}{\mathbf{C}\mathbf{Z}_{iu} + \mathbf{D}}, \quad \mathbf{Z}_{iu} = \frac{\mathbf{D}\mathbf{Z}_{ie} + \mathbf{B}}{\mathbf{C}\mathbf{Z}_{ie} + \mathbf{A}},$$

da cui, sostituendo nella prima il valore di $\mathbf{Z}_{iu}$ fornito dall'altra, e viceversa, si ricavano subito le relazioni:

$$\mathbf{Z}_{ie}^2 = \frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{CD}}, \quad \mathbf{Z}_{iu}^2 = \frac{\mathbf{BD}}{\mathbf{AC}},$$

alle quali, per le (13), si può dare l'aspetto notevole:

$$\mathbf{Z}_{ie} = \sqrt{\mathbf{Z}_{ve}\mathbf{Z}_{ce}}, \quad \mathbf{Z}_{iu} = \sqrt{\mathbf{Z}_{vu}\mathbf{Z}_{cu}}, \tag{20}$$

mettendo così in luce l'analogia delle impedenze immagini con la impedenza caratteristica dei quadripoli simmetrici.

Esprimendo le $\mathbf{Z}_v$ e $\mathbf{Z}_c$ in funzione delle impedenze $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{Z}_3$ costitutive del T equivalente, si trovano per $\mathbf{Z}_{ie}$ e $\mathbf{Z}_{iu}$ i valori:

$$\mathbf{Z}_{ie}^2 = \frac{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3} (\mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_3\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2) ,$$

$$\mathbf{Z}_{iu}^2 = \frac{\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_3} (\mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_3\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2) .$$

Immaginiamo ora il quadripolo chiuso dal lato u su $\mathbf{Z}_{iu}$, con che l'impedenza d'entrata sarà $\mathbf{Z}_{ie}$. In tal caso le (10), posto $\mathbf{E}_u = \mathbf{Z}_{iu}\mathbf{I}_u$, porgono:

$$\mathbf{E}_e = \mathbf{E}_u\left(\mathbf{A} + \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{Z}_{iu}}\right), \quad \mathbf{I}_e = \mathbf{I}_u(\mathbf{C}\mathbf{Z}_{iu} + \mathbf{D}) ,$$

da cui:

$$\frac{\mathbf{E}_e\mathbf{I}_e}{\mathbf{E}_u\mathbf{I}_u} = \left(\mathbf{A} + \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{Z}_{iu}}\right)(\mathbf{C}\mathbf{Z}_{iu} + \mathbf{D}) = \mathbf{AD} + \mathbf{BC} + \mathbf{AC}\mathbf{Z}_{iu} + \frac{\mathbf{BD}}{\mathbf{Z}_{iu}} ,$$

che dopo facili passaggi può scriversi:

$$\frac{\mathbf{E}_e\mathbf{I}_e}{\mathbf{E}_u\mathbf{I}_u} = \mathbf{AD} + \mathbf{BC} + \mathbf{AC}\sqrt{\frac{\mathbf{BD}}{\mathbf{AC}}} + \mathbf{BD}\sqrt{\frac{\mathbf{AC}}{\mathbf{BD}}} = (\sqrt{\mathbf{AD}} + \sqrt{\mathbf{BC}})^2 =$$
$$= (\sqrt{\mathbf{AD}} + \sqrt{\mathbf{AD} - 1})^2 ,$$

l'ultima uguaglianza giustificandosi con la (12).

Introducendo l'esponente di trasduzione (o costante di propagazione) g definito, analogamente al caso del quadripolo simmetrico, da:

$$e^{2\mathbf{g}} = \frac{\mathbf{E}_e}{\mathbf{E}_u} \cdot \frac{\mathbf{I}_e}{\mathbf{I}_u} , \tag{21}$$

e procedendo come dianzi, si ricava:

$$\frac{e^{\mathbf{g}} + e^{-\mathbf{g}}}{2} = \mathrm{ch}\mathbf{g} = \sqrt{\mathbf{AD}} ,$$

da cui, per la relazione fondamentale (12), segue:

$$\mathrm{sh}\mathbf{g} = \sqrt{\mathbf{BC}} .$$

Le espressioni di chg, shg in funzione di $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{Z}_3$ si deducono agevolmente dalle (15). E si trova così:

$$\mathrm{ch}\mathbf{g} = \left(1 + \frac{\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_2}\right)\left(1 + \frac{\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_2}\right) = \frac{(\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1)(\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_1)}{\mathbf{Z}_2^2} , \tag{22}$$
$$\mathrm{sh}\mathbf{g} = \frac{\mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_3\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_2^2} .$$

È da notarsi che in questo caso i rapporti $\frac{\mathbf{E}_e}{\mathbf{E}_u}$, $\frac{\mathbf{I}_e}{\mathbf{I}_u}$ non risultano uguali, quindi per l'esponente di trasduzione non può darsi che la definizione (21). La sua parte reale corrisponde quindi all'attenuazione, espressa in neper, delle potenze apparenti, o, se si vuole, alla media delle attenuazioni di corrente e di tensione, mentre al coefficiente di j non può attribuirsi che il significato di media fra le rotazioni di fase delle correnti e delle tensioni.

Se ripetiamo i calcoli precedenti scambiando ovunque l'indice e con u, e quindi $\mathbf{A}$ con $\mathbf{D}$, si conclude che la costante $\mathbf{g}$ non muta invertendo il senso di funzionamento del quadripolo, come dianzi si era asserito.

I tre elementi $\mathbf{Z}_{ie}$, $\mathbf{Z}_{iu}$, $\mathbf{g}$ sono sufficienti per definire il quadripolo stesso, in quanto che dalle

$$\mathbf{Z}_{ie}^2 = \frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{CD}}\,, \quad \mathbf{Z}_{iu}^2 = \frac{\mathbf{BD}}{\mathbf{AC}}\,, \quad \mathrm{ch}\mathbf{g} = \mathbf{AD}\,, \quad \mathrm{sh}\mathbf{g} = \mathbf{BC}$$

si possono ricavare i valori di $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, noti $\mathbf{Z}_{ie}$, $\mathbf{Z}_{iu}$, $\mathbf{g}$.

Precisamente si ha:

$$\mathbf{A}^2 = \frac{\mathbf{Z}_{ie}}{\mathbf{Z}_{iu}}\mathrm{ch}^2\mathbf{g}\,, \quad \mathbf{B}^2 = \mathbf{Z}_{ie}\mathbf{Z}_{iu}\mathrm{sh}^2\mathbf{g}\,, \quad \mathbf{C}^2 = \frac{\mathrm{sh}^2\mathbf{g}}{\mathbf{Z}_{ie}\mathbf{Z}_{iu}}\,, \quad \mathbf{D}^2 = \frac{\mathbf{Z}_{iu}}{\mathbf{Z}_{ie}}\mathrm{ch}^2\mathbf{g}\,.$$

Infine giova segnalare le formole mediante le quali si possono esprimere le impedenze costitutive $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{Z}_3$ del T equivalente in funzione di $\mathbf{Z}_{ie}$, $\mathbf{Z}_{iu}$ e $\mathbf{g}$. Per ottenerle, osserviamo in primo luogo che, dal confronto delle (20) con le (13'), si deduce:

$$\frac{\mathbf{Z}_{ie}}{\mathbf{Z}_{iu}} = \frac{\mathbf{Z}_{ve}}{\mathbf{Z}_{vu}} = \frac{\mathbf{Z}_{ce}}{\mathbf{Z}_{cu}}\,.$$

Dunque sono fra loro uguali i rapporti $\frac{\mathbf{Z}_{ie}}{\mathbf{Z}_{ve}}$ e $\frac{\mathbf{Z}_{iu}}{\mathbf{Z}_{vu}}$, ed il loro comune valore, per le (20) stesse, coincide con quello di

$$\sqrt{\frac{\mathbf{Z}_{ce}}{\mathbf{Z}_{ve}}} = \sqrt{\frac{\mathbf{Z}_{cu}}{\mathbf{Z}_{vu}}} = \sqrt{\frac{\mathbf{BC}}{\mathbf{AD}}} = \mathrm{th}\mathbf{g}\,.$$

Ricordando i valori (5) di $\mathbf{Z}_{ve}$ e $\mathbf{Z}_{vu}$, si ha allora

$$\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 = \frac{\mathbf{Z}_{ie}}{\mathrm{th}\mathbf{g}}\,, \quad \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 = \frac{\mathbf{Z}_{iu}}{\mathrm{th}\mathbf{g}}\,.$$

Introducendo questi valori nella prima delle (22), si ottiene:

$$\mathbf{Z}_2^2\mathrm{ch}^2\mathbf{g} = \frac{\mathbf{Z}_{ie}\mathbf{Z}_{iu}}{\mathrm{th}^2\mathbf{g}}\,, \quad \text{da cui} \quad \mathbf{Z}_2 = \frac{\sqrt{\mathbf{Z}_{ie}\mathbf{Z}_{iu}}}{\mathrm{sh}\mathbf{g}}\,,$$

dopo di che dalle precedenti si ha:

$$\mathbf{Z}_1 = \frac{\mathbf{Z}_{ie}}{\text{thg}} - \frac{\sqrt{\mathbf{Z}_{ie}\mathbf{Z}_{iu}}}{\text{shg}}, \quad \mathbf{Z}_3 = \frac{\mathbf{Z}_{iu}}{\text{thg}} - \frac{\sqrt{\mathbf{Z}_{ie}\mathbf{Z}_{iu}}}{\text{shg}}.$$

È ovvio che nel caso simmetrico le impedenze $\mathbf{Z}_{ie}$, $\mathbf{Z}_{iu}$ coincidono fra loro e con la impedenza caratteristica.

Riflettendo sulle definizioni di $\mathbf{Z}_{ie}$, $\mathbf{Z}_{iu}$, risulta quasi evidente che: Se si connettono in cascata più quadripoli (simmetrici o no) tali che l'impedenza immagine destra del primo coincida con la sinistra del secondo, e così via, il quadripolo risultante ha per impedenze immagini la prima del primo e l'ultima dell'ultimo, e per esponente di trasduzione la somma degli esponenti di trasduzione dei quadripoli componenti.

14. - Reti di reattanze. — Sono particolarmente interessanti per le applicazioni i quadripoli i cui elementi (rami) sono composti con reattanze praticamente pure.

Per un quadripolo siffatto, delle quattro costanti **A**, **B**, **C**, **D** che compaiono nelle equazioni fondamentali (10), la prima e l'ultima sono reali, e le altre due immaginarie pure. Infatti, se si pensa il quadripolo chiuso su una reattanza generica, ovviamente le correnti di qualsiasi ramo saranno tutte fra loro in fase (o in opposizione) e tutte in quadratura con le tensioni ai capi di ogni ramo. In particolare quindi ciò si verificherà per chiusura su reattanza nulla o infinita. Nel primo caso, risultando nulla la $\mathbf{E}_u$, si deduce che **B** è immaginario puro, e **D** reale, nel secondo, per essere $\mathbf{I}_u = 0$, si deduce che **A** è reale e **C** immaginario puro. Sarà dunque:

$$\mathbf{A} = a, \quad \mathbf{B} = jb, \quad \mathbf{C} = jc, \quad \mathbf{D} = d, \tag{23}$$

dove a, b, c, d rappresentano quattro grandezze reali, positive o negative, la prima e l'ultima di carattere numerico, la seconda e la terza omogenee l'una con una impedenza e l'altra con una ammettenza.

La relazione (12) in questo caso diviene:

$$ad + bc = 1 \ ;$$

la impedenza caratteristica è definita da

$$\mathbf{Z}_0^2 = \frac{b}{c},$$

e pertanto sarà una resistenza o una pura reattanza secondo che b e c hanno lo stesso segno oppure segno opposto. Nel primo caso sarà $bc > 0$ e quindi, per la precedente, $ad < 1$, dopo di che, ricordando le relazioni:

$$ad = \text{ch}^2\text{g}, \quad -bc = \text{sh}^2\text{g},$$

che definiscono l'esponente di trasduzione **g**, si conclude che, quando l'impedenza caratteristica equivale ad una resistenza, l'esponente **g** è puramente immaginario, mentre, quando essa si riduce ad una reattanza, l'esponente stesso è reale.

Una rete di reattanze sarà ovviamente riducibile ad una struttura a T o a Π i cui elementi costitutivi sono rappresentati da pure reattanze, quindi, per ogni determinata frequenza, costruibili con opportune induttanze o capacità; ma in generale, al variare della frequenza, tali induttanze e capacità dovranno venire modificate.

Vi è però un caso in cui è possibile trasformare la rete in un equivalente T (o Π) di costituzione indipendente dalla frequenza, ed è quello in cui i rami della rete data sono costituiti tutti con induttanze o tutti con capacità. È infatti ovvio che il T (o Π) equivalente potrà costituirsi con tre induttanze, rispettivamente con tre capacità.

Tali quadripoli costituiti da reattanze di ugual tipo sono dunque sempre riducibili ai sistemi di circuiti accoppiati che abbiamo studiato nel Cap. prec., e precisamente ai tipi di figg. 73 e 82. Essi quindi possono, a tutti gli effetti, considerarsi come elementi accoppianti due circuiti aventi una parte comune — questa potendosi in ogni caso determinare in modo univoco mediante la costruzione del T equivalente — in relazione alla quale si definisce un certo coefficiente d'accoppiamento k, mediante la

$$k^2 = \frac{\mathbf{Z}_2^2}{(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2)(\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2)},$$

che nei casi studiati fornisce per k^2 un valore reale positivo.

Ricordando le relazioni fra le costanti **A**, **B**, **C**, **D** di un quadripolo generale e le impedenze $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{Z}_3$ del T equivalente, la precedente può scriversi:

$$k^2 = \frac{1}{\mathbf{AD}}.$$

Ciò consente di estendere la nozione di accoppiamento a casi ben più generali di quelli trattati nel Cap. prec., togliendo cioè la restrizione che l'elemento accoppiante (impedenza $\mathbf{Z}_2$) sia un organo circuitale reattivo dello stesso tipo di quelli che costituiscono $\mathbf{Z}_1$ e $\mathbf{Z}_3$.

Naturalmente, con tale estensione, al coefficiente k spetta in generale un valore complesso, e molte delle deduzioni del Cap. prec. perdono di interesse pratico.

CAPITOLO QUINTO

CIRCUITI ELETTRICI A COSTANTI DISTRIBUITE

1. - Generalità. — Nei circuiti fino ad ora considerati abbiamo supposto le costanti caratteristiche — resistenza, induttanza, capacità — localizzate in parti separate dei circuiti stessi. Ma ciò non corrisponde in generale alla realtà, giacchè, per lo più, la resistenza e l'autoinduzione risultano da infiniti elementi infinitesimi (distribuiti *in serie* con determinate leggi lungo il circuito), ed altrettanto può dirsi anche per le capacità, quando si pensi che i vari elementi infinitesimi in cui si può pensare suddiviso un circuito costituiscono, a due a due considerati, altrettanti condensatori (disposti in generale *in derivazione* rispetto al circuito principale). Ed infine occorre anche por mente al fatto che, se il mezzo in cui è collocato il circuito non è perfettamente isolante, fra ogni coppia di elementi si può pensare derivata anche una certa conduttanza.

Quando si voglia tener conto di tutti questi elementi, quello che noi chiamiamo un *circuito* ci appare piuttosto in realtà una *maglia* appartenente ad una rete composta di infiniti rami. In particolare quindi la intensità della corrente potrà non essere la stessa in tutti i punti, come in generale accade nei vari rami di una qualunque rete complessa.

Il considerare i circuiti come abbiamo fatto finora può ritenersi una prima approssimazione, senza dubbio accettabile in quei casi in cui gli elementi (resistenza, capacità, induttanza) aventi carattere *concentrato* sono di gran lunga prevalenti. Ma, quando ciò non sia, l'approssimazione predetta non è più lecita.

Naturalmente, lo studio di un circuito sotto il punto di vista suaccennato presenta difficoltà enormi, per lo più anzi insormontabili. Ci limiteremo qui a studiare, relativamente ai circuiti a costanti *distribuite*, i casi più semplici, i quali fortunatamente sono i soli aventi interesse pratico.

2. - Linea a costanti distribuite. — Prendiamo a considerare una linea a due conduttori paralleli, alimentata ad un estremo, che chiameremo *origine*, con una f. e. m. alternata sinusoidale, e caricata all'altro estremo, che chiameremo *termine*, con una certa impedenza, avente carattere concentrato.

Indicando con x l'ascissa a partire dall'origine, potremo, per un generico tratto infinitesimo della linea, compreso fra i due punti x, $x + dx$, considerare la resistenza rdx del tratto stesso, la induttanza ldx definita come in I, 4, la capacità cdx costituita dal tratto di linea compreso fra le ascisse x ed $x + dx$, e la conduttanza gdx offerta dal mezzo fra questi tratti stessi. La linea stessa può dunque considerarsi come il limite di un sistema come quello disegnato in fig. 93.

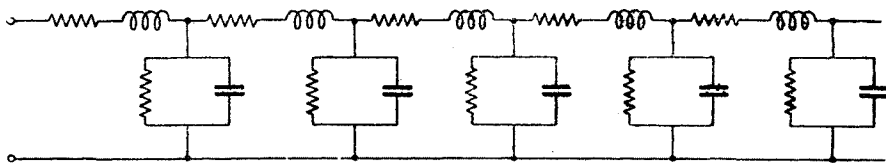



Fig. 93

Le grandezze r, l, c, g si chiameranno rispettivamente resistenza, induttanza, capacità, conduttanza per unità di lunghezza, e saranno misurate rispettivamente in Ω/m, H/m, F/m, 1/Ω-m, se per unità di lunghezza si assume il metro.

Potremmo anche supporre la linea a semplice filo, immaginando sostituito uno dei due con un piano di conducibilità infinita, ad es. la terra, parallelamente al quale sia steso l'altro (cfr. I, 9). I due casi si riducono facilmente l'uno all'altro: se si pensa che il piano conduttore sia parallelo ad entrambi i fili e dimezzi la distanza fra essi, ogni deduzione relativa al caso del filo doppio sussiste inalterata per l'altro caso, purchè, a parità di corrente, si intendano dimezzate la tensione di alimentazione e le costanti r ed l, e raddoppiate le g e c, nonchè la ammettenza terminale.

La tensione e la corrente in un punto generico di ascissa x saranno rappresentabili con certi due numeri complessi $\mathbf{V}$ ed $\mathbf{I}$ *funzioni di* x, che ci proponiamo di determinare.

All'uopo ci basta di applicare la legge di Ohm e la prima legge di Kirchhoff. La prima, applicata al tratto compreso fra x ed $x + dx$, conduce a scrivere che la differenza $\mathbf{V} - (\mathbf{V} + d\mathbf{V})$ fra le tensioni in x e in $x + dx$ uguaglia la caduta di tensione lungo dx, cioè si ha:

$$-d\mathbf{V} = (r + jl\omega)\mathbf{I}dx\,,$$

essendo ω la pulsazione, ed **I** il valore della corrente in x. Per la seconda, applicata al *nodo* esistente in x, si ha che la diminuzione $-d\mathbf{I}$ della corrente fra x ed $x + dx$ uguaglia la intensità $(g + jc\omega)\mathbf{V}dx$ della corrente che viene derivata fra i due fili (o fra un filo e la terra, secondo i casi), vale a dire:

$$-d\mathbf{I} = (g + jc\omega)\mathbf{V}dx\,.$$

Indicando con

$$\mathbf{z} = r + jl\omega\,, \quad \mathbf{y} = g + jc\omega\,,$$

la impedenza e la ammettenza per unità di lunghezza, le precedenti, che potremo scrivere:

$$-\frac{d\mathbf{V}}{dx} = \mathbf{zI}\,, \qquad -\frac{d\mathbf{I}}{dx} = \mathbf{yV}\,, \tag{1}$$

costituiscono un sistema di equazioni differenziali atte a determinare le **V** ed **I** in funzione della variabile x. Derivando ciascuna rispetto ad x e tenendo conto dell'altra, si ottiene:

$$\frac{d^2\mathbf{V}}{dx^2} = \mathbf{zyV}\,, \qquad \frac{d^2\mathbf{I}}{dx^2} = \mathbf{zyI}\,,$$

cioè tanto **V** quanto **I** soddisfano ad una medesima equazione differenziale lineare del secondo ordine.

Ponendo

$$\gamma^2 = \mathbf{zy}\,, \tag{2}$$

con che γ risulta omogenea con l'inverso di una lunghezza, le precedenti si integrano immediatamente, e forniscono (App., *A*, 9) per **V** ed **I** due combinazioni lineari di $e^{\gamma x}$, $e^{-\gamma x}$, i cui coefficienti, in generale complessi, sono per ora a considerarsi costanti arbitrarie. Si avrà cioè

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}e^{-\gamma x} + \mathbf{B}e^{\gamma x}\,. \tag{3}$$

Quanto all'altra funzione **I**, non interverranno nuove costanti arbitrarie, in quanto che la **I** può dedursi per semplice derivazione della prima delle (1); e precisamente, posto

$$Z_0^2 = \frac{\mathbf{z}}{\mathbf{y}}\,, \tag{4}$$

con che $\mathbf{Z}_0$ corrisponde ad un'impedenza, si ha senz'altro:

$$\mathbf{Z}_0\mathbf{I} = \mathbf{A}e^{-\gamma x} - \mathbf{B}e^{\gamma x}\,. \tag{5}$$

Le costanti γ e $\mathbf{Z}_0$ determinano completamente i caratteri della linea, al pari delle **z** ed **y** da cui esse sono derivate, e che viceversa possono da quelle dedursi secondo le

$$\mathbf{z} = \gamma\mathbf{Z}_0\,, \qquad \mathbf{y} = \frac{\gamma}{\mathbf{Z}_0}\,. \tag{6}$$

Siccome però da $\mathbf{z}$ e $\mathbf{y}$ non risultano determinate $\boldsymbol{\gamma}$ e $\mathbf{Z}_0$, ma soltanto i loro quadrati, faremo l'ulteriore convenzione che $\mathbf{Z}_0$ sia una impedenza *effettiva*, cioè abbia positiva la parte reale, dopo di che per $\boldsymbol{\gamma}$ si assumerà il valore fornito, in modo univoco, dalle (6), il che, come facilmente si verifica, corrisponde ad assumere per $\boldsymbol{\gamma}$ quella delle due radici quadrate di $\mathbf{zy}$ che ha argomento compreso fra 0 e $\frac{\pi}{2}$ (1).

Le espressioni effettive di $\mathbf{V}$ ed $\mathbf{I}$ saranno note non appena siano conosciuti elementi tali da cui si possano dedurre i valori di $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, per es. tali potrebbero essere i valori iniziali o d'*entrata* $\mathbf{V}_e$ e $\mathbf{I}_e$ (per $x = 0$), oppure il valore di $\mathbf{V}_e$ e quello dell'impedenza di carico, cioè del rapporto $\frac{\mathbf{V}_u}{\mathbf{I}_u}$ al termine (*uscita*), e così via.

In generale dalle (3) e (5) si deducono le formole:

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{V} + \mathbf{Z}_0\mathbf{I}}{2} e^{\gamma x}, \qquad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{V} - \mathbf{Z}_0\mathbf{I}}{2} e^{-\gamma x}$$

che fanno conoscere i valori delle costanti $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ in funzione di quelli di $\mathbf{V}$ ed $\mathbf{I}$ relativi ad una qualsiasi ascissa x.

In particolare, per $x = 0$, si hanno le espressioni di $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ in funzione di $\mathbf{V}_e$ ed $\mathbf{I}_e$; ponendo invece $x = x_1$ (essendo x_1 l'ascissa di un punto qualunque, che potrebbe essere anche il punto terminale), si avrebbero le stesse costanti espresse per i corrispondenti valori $\mathbf{V}_1$ ed $\mathbf{I}_1$. Si hanno cioè per $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ le seguenti espressioni:

$$(7)\qquad \mathbf{A} = \frac{\mathbf{V}_e + \mathbf{Z}_0\mathbf{I}_e}{2} = \frac{\mathbf{V}_1 + \mathbf{Z}_0\mathbf{I}_1}{2} e^{\gamma x_1}, \quad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{V}_e - \mathbf{Z}_0\mathbf{I}_e}{2} = \frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{Z}_0\mathbf{I}_1}{2} e^{-\gamma x_1}.$$

Sostituendo le seconde di esse nelle (3) e (5) si ottengono le notevoli relazioni:

$$(8)\qquad \begin{cases} \mathbf{V} = \mathbf{V}_1 \operatorname{ch}\boldsymbol{\gamma}(x_1 - x) + \mathbf{Z}_0\mathbf{I}_1 \operatorname{sh}\boldsymbol{\gamma}(x_1 - x), \\ \mathbf{Z}_0\mathbf{I} = \mathbf{V}_1 \operatorname{sh}\boldsymbol{\gamma}(x_1 - x) + \mathbf{Z}_0\mathbf{I}_1 \operatorname{ch}\boldsymbol{\gamma}(x_1 - x), \end{cases}$$

che legano i valori di $\mathbf{V}$ ed $\mathbf{I}$ in due punti *qualunque* alle ascisse x, x_1 di questi.

Come si vede, il comportamento della linea è completamente definito sia dalla coppia di costanti complesse $\mathbf{z}$, $\mathbf{y}$, che si chiamano le *costanti primarie*, sia dalla coppia $\mathbf{Z}_0$, $\boldsymbol{\gamma}$ delle così dette *costanti secondarie*, alla prima delle quali si dà il nome di *impedenza caratteristica*, alla seconda di *costante di propagazione*.

---

(1) Siccome $\mathbf{z}$ e $\mathbf{y}$ sono complessi il cui argomento è un angolo del primo quadrante, il prodotto $\mathbf{zy}$ avrà argomento compreso fra 0 e π; quindi, delle due radici quadrate $\sqrt{\mathbf{zy}}$, una avrà l'argomento compreso fra 0 e $\frac{\pi}{2}$, l'altra fra $-\pi$ e $-\frac{\pi}{2}$.

3. - Distribuzione dei valori di tensione e corrente. — Per ben comprendere il funzionamento di una linea come quella qui considerata, occorre rendersi conto della distribuzione dei valori di $\mathbf{V}$ e di $\mathbf{I}$.

Cominciamo con lo studiare quelle determinate dai primi termini delle espressioni (3) e (5) della tensione e della corrente, cioè:

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}e^{-\gamma x}, \quad \mathbf{Z}_0\mathbf{I} = \mathbf{A}e^{-\gamma x}. \tag{9}$$

Innanzi tutto ci dobbiamo chiedere se e sotto quali condizioni la distribuzione può ridursi a questi soli primi termini. Affinchè ciò si veri-

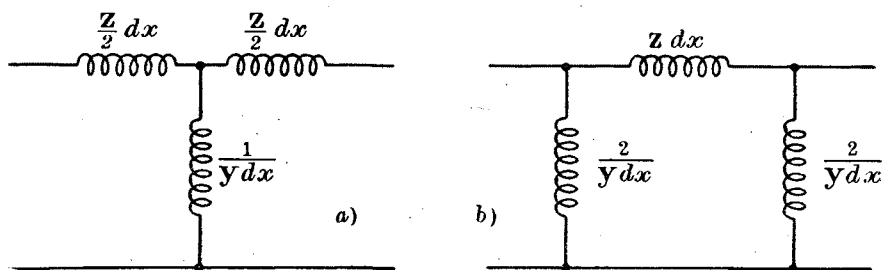



Fig. 94

fichi è necessario e sufficiente che sia $\mathbf{B} = 0$, il che, tenuto presente la seconda espressione (7) di $\mathbf{B}$, esige che sia

$$e^{-\gamma x_1} = 0 \quad \text{oppure} \quad \mathbf{V}_1 - \mathbf{Z}_0\mathbf{I}_1 = 0\,.$$

Siccome, detta β la parte reale di γ, il modulo di $e^{-\gamma x}$ vale $e^{-\beta x}$ ed è $\beta > 0$, il primo caso non può verificarsi se non quando sia $x_1 = \infty$, cioè con linea di lunghezza infinita; il secondo invece può presentarsi anche per una linea di lunghezza finita quando sia $\frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} = \mathbf{Z}_0$, cioè quando essa sia chiusa su un carico uguale alla impedenza caratteristica.

Queste conclusioni sono del tutto analoghe a quelle che nel Cap. prec. (n. 12) abbiamo trovato studiando il comportamento di una catena di quadripoli simmetrici uguali. Tale analogia non è casuale, in quanto che, secondo quello che fu allora spiegato, la linea quale viene da noi qui considerata non è che il limite di un sistema continuo di quadripoli in cascata, ciascuno dei quali ha la struttura di un T o di un Π come quelli disegnati in fig. 94 *a*), *b*), con impedenze longitudinale e trasversale di complessivo valore $(r + jl\omega)dx$ rispettivamente $\frac{1}{(g + jc\omega)dx}$.

L'impedenza caratteristica di ciascuno di questi quadripoli vale (a meno di termini infinitesimi):

$$\mathbf{Z}_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{z}dx}{\mathbf{y}dx}} = \sqrt{\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{y}}}\ ;$$

essa coincide quindi con quella che abbiamo chiamato l'impedenza caratteristica della linea. Quanto all'esponente di trasduzione del quadripolo elementare, esso sarà infinitesimo dell'ordine di dx, talchè potremo indicarne opportunamente il valore con γdx essendo la quantità (complessa) γ la misura di un esponente di trasduzione per unità di lunghezza. Dalla (19′) di IV, 9, si ha:

$$\mathrm{ch}\,(\gamma dx) = 1 + \frac{\mathrm{zy}}{2}\,(dx)^2 .$$

da cui, conservando nei due membri gli infinitesimi di ordine più basso, si deduce

$$\gamma = \sqrt{\mathrm{zy}}\ ;$$

pertanto tale γ coincide con quella che abbiamo chiamato la costante di propagazione della linea.

Un tronco di linea di lunghezza x equivale ovviamente ad un sistema di infiniti quadripoli elementari, in «numero» di $\frac{x}{dx}$, per cui, in definitiva, le (9) possono ritenersi senz'altro una estensione al caso attuale delle analoghe formole stabilite (IV, 12) pel caso di una catena di quadripoli chiusa sulla impedenza caratteristica oppure proseguita indefinitamente. La nozione di impedenza caratteristica rimane del tutto inalterata, quella di costante di propagazione riceve invece in certo modo una semplificazione, dipendente dal fatto che, mentre nel caso di quadripoli non si potevano considerare che multipli interi di un determinato numero g, e quindi si perveniva alla nozione di una propagazione procedente « per salti », qui si ha a che fare invece con una propagazione di tipo continuo.

In particolare, basta richiamare le considerazioni e deduzioni del Cap. prec. e adattarle al caso attuale per concludere che:

1°) Una linea di lunghezza finita, chiusa su una impedenza qualunque, tende a presentare un comportamento indipendente dall'impedenza di chiusura col tendere all'infinito della sua lunghezza; e tale comportamento si verifica rigorosamente anche se la linea è di lunghezza finita, purchè essa sia chiusa sulla sua impedenza caratteristica.

2°) In tali condizioni, la tensione e la corrente in un punto qualunque si deducono da quelle nel punto iniziale — nel quale si suppone fatta l'alimentazione o eccitazione del sistema — o, più generalmente, da quelle in un altro *precedente* punto qualunque, applicando una *attenuazione* la cui misura in unità logaritmiche (neper) è data dal prodotto della parte reale della costante di propagazione

$$\gamma = \beta + j\alpha$$

per la distanza fra i due punti, ed una rotazione di fase consistente in un ritardo, la cui misura in radianti è data dal prodotto della stessa distanza pel coefficiente di immaginario α della stessa costante γ.

3°) La distribuzione della tensione e della corrente nei vari punti della linea si presenta, in un dato istante, come quella delle ordinate di un diagramma «sinusoidale smorzato»; più precisamente si tratta di un diagramma del tutto analogo a quello disegnato in fig. 90 *a*) e che da esso differisce unicamente perchè qui si tratta di una serie continua,

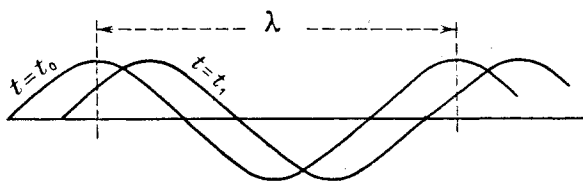



Fig. 95

anzichè discreta, di valori. Per istanti successivi, i corrispondenti diagrammi si ottengono dai primi mediante una « traslazione » nel senso della propagazione, così chiamandosi il senso che dal punto di eccitazione procede verso il punto di carico. Naturalmente, si tratterebbe di una traslazione vera e propria qualora fosse $\beta = 0$, cioè non vi fosse attenuazione (come indicato in fig. 95), mentre, con $\beta > 0$, le sinusoidi, spostandosi, vanno gradualmente deprimendosi in ampiezza secondo la legge $e^{-\beta x}$.

4°) Lo spostamento progressivo della fase della tensione e della corrente è definito da una certa *lunghezza d'onda*, cioè dalla distanza che intercede fra due consecutivi punti in cui la fase riprende lo stesso valore, e questa lunghezza d'onda λ è legata ad una velocità v di propagazione della fase dalla relazione

$$vT = \lambda \quad \text{cioè} \quad v = \frac{\lambda\omega}{2\pi},$$

dove T è il periodo dell'eccitazione, ed ω la relativa pulsazione. Tali λ e v sono determinati dal coefficiente di immaginario α della costante di propagazione, e precisamente si ha

$$v = \frac{\omega}{\alpha} \quad \text{e quindi} \quad \lambda = \frac{2\pi}{\alpha}, \quad \alpha = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Il comportamento di un tale sistema, perfettamente definito dalla sola costante complessa γ, viene caratterizzato dicendo che la linea fun-

ziona in regime di *onde progressive*. Dunque, affinchè ciò si verifichi, occorre e basta che la linea sia chiusa sulla sua impedenza caratteristica oppure presenti lunghezza infinitamente grande.

È infine da osservare che, per una linea in regime progressivo:

5°) Il rapporto fra la tensione e la corrente è uguale in tutti i punti e coincide con l'impedenza caratteristica. Ciò, che si verifica immediatamente dividendo membro a membro le (9), riesce fisicamente intuitivo quando si pensi che in un determinato punto il rapporto predetto non è altro che l'impedenza d'entrata di una linea di lunghezza infinita cui si sia asportata la parte precedente il punto stesso; e poichè la parte rimanente è ancora di lunghezza infinita, essa non differisce funzionalmente dalla linea originaria.

Per il fatto poi che l'impedenza caratteristica è in generale finita, riesce possibile, mediante un tronco finito chiuso su di essa, realizzare l'equivalente di una linea infinita.

4. - Riflessione. — Una volta chiarito che il comportamento corrispondente ai primi termini delle (3), (5) consiste in un'onda di tensione e di corrente « propagantesi » dal punto d'eccitazione verso l'altro estremo, si può senz'altro concludere che il contributo dovuto ai secondi termini delle stesse espressioni è da intendersi legato ad una analoga distribuzione procedente in senso opposto. Infatti, con un conveniente valore di $\mathbf{B}'$ (precisamente $\mathbf{B}' = \mathbf{B}e^{+\gamma h}$), si può sempre porre

$$\mathbf{B}e^{\gamma x} = \mathbf{B}'e^{-\gamma x'} ,$$

essendo $x' = h - x$ l'ascissa del punto generico x misurata a partire dall'estremo, anzichè dall'origine della linea la cui lunghezza è indicata con h. Una tale distribuzione si chiamerà *riflessa*, per contrapposto alla prima che si chiamerà *diretta*.

Da quanto precede si può anzi senz'altro dedurre che la presenza di una propagazione riflessa non può aversi se non nel caso in cui la linea, di lunghezza finita, sia chiusa su una impedenza diversa dalla caratteristica. Viene allora naturale di chiedere quale influenza quantitativa tale divario eserciti sulla entità della distribuzione riflessa rispetto alla diretta.

La risposta scaturirà dalle considerazioni seguenti, a mezzo delle quali, per una via diversa dalla precedente, ritroveremo le stesse formole fondamentali (8).

Per maggiore generalità, supponiamo che l'alimentazione all'estremo iniziale sia fatta a mezzo di un generatore avente una certa f. e. m. $\mathbf{E}$ ed una impedenza interna $\mathbf{Z}_e$. Siccome può considerarsi come estremo iniziale un punto qualunque della linea, in tale $\mathbf{Z}_e$ sarà compresa l'eventuale impedenza del tronco precedente il punto funzionante da inizio.

Per contro, ove si voglia mettere in evidenza la tensione $\mathbf{V}_e$ mantenuta al punto stesso dal sistema che lo alimenta, basterà porre $\mathbf{Z}_e = 0$ e $\mathbf{V} = \mathbf{E}$ nelle formole che seguono.

Indichiamo con $\mathbf{V}_e$ e $\mathbf{V}_u$, $\mathbf{I}_e$ ed $\mathbf{I}_u$ le tensioni e correnti nel punto iniziale (entrata) e finale (uscita), per modo che si avrà:

$$\mathbf{V}_u = \mathbf{Z}_u \mathbf{I}_u ,$$

essendo $\mathbf{Z}_u$ l'impedenza terminale (o *di carico* o *d'uscita*); e pensiamo ognuna delle due impedenze $\mathbf{Z}_e$ e $\mathbf{Z}_u$ decomposta in due parti in serie, una delle quali sia l'impedenza caratteristica $\mathbf{Z}_0$, cioè poniamo:

$$\mathbf{Z}_e = \mathbf{Z}_0 + \mathbf{Z}'_e , \quad \mathbf{Z}_u = \mathbf{Z}_0 + \mathbf{Z}'_u ,$$

essendo $\mathbf{Z}'_e$, $\mathbf{Z}'_u$ due impedenze opportune. Queste potranno essere anche fisicamente non realizzabili nell'ordinaria accezione, qualora risultassero negative le rispettive parti reali, ma ciò non infirma il nóstro ragionamento, in quanto che, in virtù del principio di compensazione (IV, 3), ad esse potranno sempre pensarsi sostituite due f. e. m. di valori rispettivi $-\mathbf{Z}'_e\mathbf{I}_e$ e $-\mathbf{Z}'_u\mathbf{I}_u$ il cui significato fisico è in ogni caso ben definito. Così facendo, il nostro sistema risulta equivalente a quello disegnato in fig. 96, in cui ai due estremi figurano due f. e. m., precisamente la $\mathbf{E} - \mathbf{Z}'_e\mathbf{I}_e$ per l'estremo iniziale, la $-\mathbf{Z}'_u\mathbf{I}_u$ per l'estremo finale, ciascuna in serie con una impedenza uguale alla impedenza caratteristica.

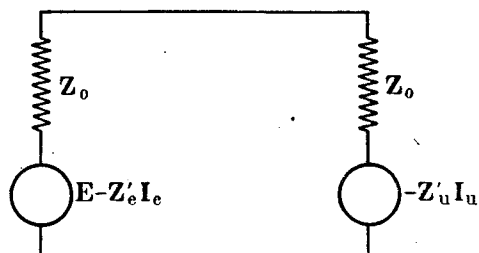



Fig. 96

Per calcolare la corrente in un punto qualunque basterà, in virtù del principio di sovrapposizione (IV, 2), sommare le correnti in esso determinate da ciascuna delle due f. e. m. considerate agenti separatamente ed in assenza dell'altra, e sommare i risultati. Ora si osservi che, sopprimendo una delle due f. e. m., l'altra si trova ad alimentare una linea che presenta una impedenza iniziale concentrata uguale a $\mathbf{Z}_0$ ed è chiusa sulla impedenza caratteristica, quindi la rispettiva corrente iniziale equivale al rapporto fra la f. e. m. agente e $2\mathbf{Z}_0$, mentre la rispettiva corrente finale si otterrà da questa moltiplicando per $e^{-\gamma h}$, essendo h la lunghezza della linea.

Indichiamo con $\mathbf{I}_{ed}$, $\mathbf{V}_{ed}$, $\mathbf{I}_{ud}$, $\mathbf{V}_{ud}$ i contributi ad $\mathbf{I}_e$, $\mathbf{V}_e$, $\mathbf{I}_u$, $\mathbf{V}_u$ dovuti alla f. e. m. iniziale (diretta), e con $\mathbf{I}_{er}$, $\mathbf{V}_{er}$, $\mathbf{I}_{ur}$, $\mathbf{V}_{ur}$ quelli dovuti alla f. e. m. terminale (riflessa); talchè sarà

$$\mathbf{V}_e = \mathbf{V}_{ed} + \mathbf{V}_{er} , \quad \mathbf{I}_e = \mathbf{I}_{ed} + \mathbf{I}_{er} , \quad \mathbf{V}_u = \mathbf{V}_{ud} + \mathbf{V}_{ur} , \quad \mathbf{I}_u = \mathbf{I}_{ud} + \mathbf{I}_{ur} .$$

Per le correnti si avrà

$$(10)\qquad \mathbf{I}_{ed} = \frac{\mathbf{E} - \mathbf{Z}'_e\mathbf{I}_e}{2\mathbf{Z}_0}, \quad \mathbf{I}_{ud} = \frac{\mathbf{E} - \mathbf{Z}'_e\mathbf{I}_e}{2\mathbf{Z}_0} e^{-\gamma h},$$

$$\mathbf{I}_{ur} = -\frac{\mathbf{Z}'_u\mathbf{I}_u}{2\mathbf{Z}_0}, \qquad \mathbf{I}_{er} = -\frac{\mathbf{Z}'_u\mathbf{I}_u}{2\mathbf{Z}_0} e^{-\gamma h},$$

ed i corrispondenti valori delle tensioni si deducono immediatamente pensando che i rapporti fra ogni tensione componente e la corrente avente gli stessi indici sono tutti, salvo il segno, uguali alla impedenza caratteristica $\mathbf{Z}_0$. Precisamente si ha:

$$(11)\qquad \frac{\mathbf{V}_{ed}}{\mathbf{I}_{ed}} = \frac{\mathbf{V}_{ud}}{\mathbf{I}_{ud}} = \mathbf{Z}_0, \quad \text{ma} \quad \frac{\mathbf{V}_{er}}{\mathbf{I}_{er}} = \frac{\mathbf{V}_{ur}}{\mathbf{I}_{ur}} = -\mathbf{Z}_0,$$

perchè, mentre una tensione terminale diretta ed una riflessa sono considerate di stesso segno quando tendono a produrre concordi elevazioni di potenziale di un filo rispetto all'altro, le correnti riflesse, le cui espressioni sono fornite dalle due ultime delle (10), sono a ritenersi positive quando sono opposte a correnti positive di tipo diretto, quali sono fornite dalle prime due delle (10) stesse.

Componendo le correnti spettanti a ciascun estremo, si ottiene

$$(12)\qquad \mathbf{I}_e = \frac{(\mathbf{E} - \mathbf{Z}'_e\mathbf{I}_e) - \mathbf{Z}'_u\mathbf{I}_u e^{-\gamma h}}{2\mathbf{Z}_0}, \quad \mathbf{I}_u = \frac{(\mathbf{E} - \mathbf{Z}'_e\mathbf{I}_e)e^{-\gamma h} - \mathbf{Z}'_u\mathbf{I}_u}{2\mathbf{Z}_0},$$

da cui, risolvendo rispetto ad $\mathbf{I}_e$, $\mathbf{I}_u$ e tenendo presenti le (10):

$$\mathbf{I}_e = \frac{\mathbf{E}[(\mathbf{Z}_0 + \mathbf{Z}_u)e^{\gamma h} + (\mathbf{Z}_0 - \mathbf{Z}_u)e^{-\gamma h}]}{(\mathbf{Z}_0 + \mathbf{Z}_u)(\mathbf{Z}_0 + \mathbf{Z}_e)e^{\gamma h} - (\mathbf{Z}_0 - \mathbf{Z}_u)(\mathbf{Z}_0 - \mathbf{Z}_e)e^{-\gamma h}},$$

$$\mathbf{I}_u = \frac{2\mathbf{E}\mathbf{Z}_0}{(\mathbf{Z}_0 + \mathbf{Z}_u)(\mathbf{Z}_0 + \mathbf{Z}_e)e^{\gamma h} - (\mathbf{Z}_0 - \mathbf{Z})(\mathbf{Z}_0 - \mathbf{Z}_e)e^{-\gamma h}}.$$

Dividendo la prima per la seconda e scrivendo $\mathbf{V}_u$ al posto di $\mathbf{Z}_u\mathbf{I}_u$ e $\operatorname{ch}\gamma h \pm \operatorname{sh}\gamma h$ al posto di $e^{\pm\gamma h}$, si ottiene

$$\mathbf{Z}_0\mathbf{I}_e = \mathbf{V}_u \operatorname{sh}\gamma h + \mathbf{Z}_0\mathbf{I}_u \operatorname{ch}\gamma h,$$

cioè la seconda delle (8) scritta per $x = 0$, $x_1 = h$. Se poi si uguaglia questa espressione di $\mathbf{I}_e$ a quella che si deduce dalla prima delle (12), e si risolve rispetto a $\mathbf{V}_e = \mathbf{E} - \mathbf{Z}_e\mathbf{I}_e$, dopo aver sostituito $\mathbf{V}_u$ a $\mathbf{Z}_u\mathbf{I}_u$, si trova:

$$\mathbf{V}_e = \mathbf{V}_u \operatorname{ch}\gamma h + \mathbf{Z}_0\mathbf{I}_u \operatorname{sh}\gamma h,$$

cioè la prima delle (8) anch'essa scritta per $x = 0$, $x_1 = h$.

Questa deduzione delle formole fondamentali mediante la considerazione separata delle onde dirette e riflessa, mentre consente una più

chiara comprensione del meccanismo del fenomeno sintetizzato nelle formole stesse, permette anche di valutare nel modo più semplice l'importanza relativa dell'elemento riflesso rispetto al corrispondente elemento diretto. Tale valutazione si effettua direttamente mediante le (10); la terza di queste può invero scriversi

$$\frac{\mathbf{I}_u}{\mathbf{I}_{ur}} = -\frac{2\mathbf{Z}_0}{\mathbf{Z}'_u} = \frac{\mathbf{Z}_0 + \mathbf{Z}_0}{\mathbf{Z}_0 - \mathbf{Z}_u},$$

e da questa, ponendo $\mathbf{I}_{ur} + \mathbf{I}_{ud}$ al posto di $\mathbf{I}_u$, si deduce:

$$\frac{\mathbf{I}_{ud}}{\mathbf{I}_{ur}} = \frac{\mathbf{Z}_0 + \mathbf{Z}_u}{\mathbf{Z}_0 - \mathbf{Z}_u}.$$

Questo rapporto si chiama « di riflessione », perchè corrisponde al rapporto fra la parte diretta e la parte riflessa della corrente nel punto (« punto di riflessione ») cui si riferisce la corrente $\mathbf{I}_u$. In generale si tratta di un numero complesso, il cui modulo esprime quanto l'ampiezza della parte riflessa è minore della diretta e l'argomento misura l'anticipo di fase di questa rispetto a quella.

Si avrà anche un analogo rapporto fra le tensioni $\mathbf{V}_{ur}$ e $\mathbf{V}_{ud}$ costituenti la $\mathbf{V}_u$, ma esso, come insegnano le (11), differisce soltanto nel segno dal rapporto delle correnti; si ha cioè

$$\frac{\mathbf{V}_{ud}}{\mathbf{V}_{ur}} = \frac{\mathbf{Z}_u + \mathbf{Z}_0}{\mathbf{Z}_u - \mathbf{Z}_0},$$

il che sta ad indicare che il rapporto fra le ampiezze delle tensioni è uguale a quello delle correnti, mentre lo sfasamento differisce di π dall'analogo fra le correnti. In particolare, se le tensioni diretta e riflessa sono in fase, la corrente diretta sarà in opposizione rispetto alla riflessa, e viceversa.

Nelle applicazioni si suole esprimere il rapporto di riflessione di corrente in unità logaritmiche ponendo:

$$\boldsymbol{\theta} = \frac{1}{2} \log \frac{\mathbf{Z}_0 + \mathbf{Z}_u}{\mathbf{Z}_0 - \mathbf{Z}_u},$$

con che, posto $\boldsymbol{\theta} = \mu + j\varepsilon$, il numero positivo [1] μ è la metà della misura in neper della « attenuazione » dell'onda di corrente riflessa rispetto alla diretta, ed il numero ε è il semiangolo di ritardo della corrente riflessa rispetto alla diretta.

---

[1] Ricordiamo che la parte reale del logaritmo di un numero complesso vale il logaritmo (in senso aritmetico) del modulo,

Tenendo presente la relazione fondamentale fra th e log (App., *A*, 3), alla precedente si può dare l'aspetto

$$\text{th}\,\boldsymbol{\theta} = \frac{\mathbf{Z}_u}{\mathbf{Z}_0};$$

cioè la th del numero $\boldsymbol{\theta}$, che viene talvolta chiamato *indice iperbolico di riflessione*, uguaglia il rapporto tra l'impedenza effettiva, causa della riflessione, e quella (impedenza caratteristica) che potrebbe evitare la riflessione stessa. È da osservarsi che a riflessione nulla ($\mathbf{Z}_u = \mathbf{Z}_0$) corrisponde valore infinito del modulo μ di $\boldsymbol{\theta}$ e, mano a mano che μ diminuisce, si hanno valori via via maggiori dell'ampiezza di corrente riflessa a parità di corrente diretta.

5. - Sulle costanti secondarie. — Prima di procedere allo studio dettagliato di alcuni casi particolari che interessano più specialmente le applicazioni, conviene esaminare le relazioni che legano le costanti secondarie $\mathbf{Z}_0$ e $\boldsymbol{\gamma}$ alle costanti primarie **z** e **y** ed alle loro componenti *dissipative* r, g e *reattive* $l\omega$, $c\omega$.

Esplicitando la (2), si ha:

$$(\beta + j\alpha)^2 = (r + jl\omega)(g + jc\omega)\,,$$

da cui

$$\beta^2 - \alpha^2 = rg - \omega^2 lc\,, \quad 2\alpha\beta = \omega(lg + rc)\,. \tag{14}$$

Da queste si ricavano agevolmente i valori di α e β in funzione di r, g, l, c e ω. Infatti, in virtù delle identità

$$2\beta^2 = \sqrt{(\beta^2 - \alpha^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2} + (\beta^2 - \alpha^2),\quad 2\alpha^2 = \sqrt{(\beta^2 - \alpha^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2} - (\beta^2 - \alpha^2),$$

si può senz'altro scrivere

$$2\beta^2 = \sqrt{(rg - \omega^2 lc)^2 + \omega^2(lg + rc)^2} + rg - \omega^2 lc\,,$$

$$2\alpha^2 = \sqrt{(rg - \omega^2 lc)^2 + \omega^2(lg + rc)^2} - rg + \omega^2 lc\,,$$

alle quali, osservando che la grandezza sotto il segno di radice vale $\alpha^2 + \beta^2$, cioè il ~~quadrato del~~ modulo di $\mathbf{zy} = (r + jl\omega)(g + jc\omega)$, si può anche dare l'aspetto:

$$2\beta^2 = \sqrt{(r^2 + l^2\omega^2)(g^2 + c^2\omega^2)} + rg - \omega^2 lc\,,$$

$$2\alpha^2 = \sqrt{(r^2 + l^2\omega^2)(g^2 + c^2\omega^2)} - rg + \omega^2 lc\,.$$

Se introduciamo i moduli z, y e gli argomenti φ e ψ di **z**, **y**, i cui com-

plementi $\eta = 90^o - \varphi$, $\delta = 90^o - \psi$ vengono anche detti *angoli di perdita*:

$$z^2 = r^2 + l^2\omega^2\,, \quad y^2 = g^2 + c^2\omega^2\,, \quad \mathrm{tg}\,\eta = \frac{r}{l\omega}\,, \quad \mathrm{tg}\,\delta = \frac{g}{c\omega}\,,$$

$$r = z\,\mathrm{sen}\,\eta\,, \quad l\omega = z\cos\eta\,, \quad g = y\,\mathrm{sen}\,\delta\,, \quad c\omega = y\cos\delta\,,$$

si possono anche assegnare le seguenti espressioni ad α^2 e β^2:

$$\text{(15)} \quad \alpha^2 = zy\cos^2\frac{\eta+\delta}{2} = \frac{rg}{\mathrm{sen}\,\eta\,\mathrm{sen}\,\delta}\cos^2\frac{\eta+\delta}{2} = \frac{rg}{2}\,\frac{1+\cos(\eta+\delta)}{\mathrm{sen}\,\eta\,\mathrm{sen}\,\delta} =$$

$$= \frac{\omega^2 lc}{\cos\eta\cos\delta}\cos^2\frac{\eta+\delta}{2} = \frac{\omega^2 lc}{2}\,\frac{1+\cos(\eta+\delta)}{\cos\eta\cos\delta}\,,$$

$$\text{(16)} \quad \beta^2 = zy\,\mathrm{sen}^2\frac{\eta+\delta}{2} = \frac{rg}{\mathrm{sen}\,\eta\,\mathrm{sen}\,\delta}\,\mathrm{sen}^2\frac{\eta+\delta}{2} = \frac{rg}{2}\,\frac{1-\cos(\eta+\delta)}{\mathrm{sen}\,\eta\,\mathrm{sen}\,\delta} =$$

$$= \frac{\omega^2 lc}{\cos\eta\cos\delta}\,\mathrm{sen}^2\frac{\eta+\delta}{2} = \frac{\omega^2 lc}{2}\,\frac{1-\cos(\eta+\delta)}{\cos\eta\cos\delta}\,.$$

Le precedenti formole si prestano ad importanti deduzioni. Innanzi tutto, dalla seconda delle (14) si trae:

$$\text{(17)} \qquad \frac{\beta}{v} = \frac{\alpha\beta}{\omega} = \frac{lg + rc}{2}\,,$$

dove v indica la velocità di propagazione della fase.

Si vede dunque che, quantunque la costante di attenuazione β e la velocità v siano in generale dipendenti dalla frequenza, è invece da questa indipendente il loro rapporto.

Si può inoltre verificare che, col crescere della frequenza, β e v crescono sempre (o almeno non decrescono). Basterà constatare la cosa per una delle due, per es. β, dappoichè, come sopra si è visto, il rapporto fra di esse è costante. Ciò può vedersi studiando l'andamento della espressione:

$$B = \frac{2\beta^2}{rg} = \frac{1-\cos(\eta+\delta)}{\mathrm{sen}\,\eta\,\mathrm{sen}\,\delta}\,,$$

che sarà evidentemente crescente o decrescente insieme con β. La sua derivata rispetto ad ω vale

$$\frac{dB}{d\omega} = \frac{\partial B}{\partial\eta}\frac{d\eta}{d\omega} + \frac{\partial B}{\partial\delta}\frac{d\delta}{d\omega}\,,$$

cioè, effettuando le derivazioni parziali indicate:

$$\frac{\partial B}{\partial\eta} = \frac{\cos\delta - \cos\eta}{\mathrm{sen}^2\eta\,\mathrm{sen}\,\delta}\,, \quad \frac{\partial B}{\partial\delta} = \frac{\cos\eta - \cos\delta}{\mathrm{sen}\,\eta\,\mathrm{sen}^2\delta}$$

ed osservando che da $\operatorname{ctg} \eta = \frac{l\omega}{r}$ e $\operatorname{ctg} \delta = \frac{c\omega}{g}$ segue:

$$\omega \frac{d\eta}{d\omega} = - \operatorname{sen} \eta \cos \eta \,, \qquad \omega \frac{d\delta}{d\omega} = - \operatorname{sen} \delta \cos \delta \,,$$

si deduce

$$\frac{dB}{d\omega} = \frac{(\cos \eta - \cos \delta)^2}{\omega \operatorname{sen} \eta \operatorname{sen} \delta} . \tag{18}$$

Il secondo membro essendo certamente non negativo, l'asserto è dimostrato.

Tuttavia, col crescere della frequenza, β e v non crescono indefinitamente. Infatti, poichè per $\omega \to \infty$ si ha evidentemente $\lim \eta = \lim \delta = 0$, l'ultima delle espressioni di α data dalla (15) mostra che è

$$\lim v = \lim \frac{\omega}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{lc}} ,$$

dopo di che dalla (17) segue:

$$\lim \beta = \frac{lg + rc}{2\sqrt{lc}} = \frac{1}{2}\left(g\sqrt{\frac{l}{c}} + r\sqrt{\frac{c}{l}}\right) . \tag{19}$$

Si può dunque dire che, col crescere indefinito della frequenza, la costante di attenuazione tende ad uguagliare la media degli inversi dei « coefficienti di risonanza unitari » dei sistemi g, l, c parallelo ed r, c, l serie. Quanto alla velocità di propagazione, dette ε, μ la permittività e la permeabilità del mezzo, il suo limite coincide con $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$. Infatti, ricordiamo che per una linea a due fili (di diametro d a distanza D) in cui la corrente si possa considerare localizzata alla superficie dei conduttori, si ha (cfr. I, 5, 8):

$$l = \frac{\mu}{\pi} \log 2 \frac{D}{d} , \qquad c = \frac{\pi\varepsilon}{\log 2 \frac{D}{d}} ,$$

quindi $lc = \varepsilon\mu$. Si può dire che la velocità limite coincide (El., VI, 1) con la velocità della luce, cioè con la velocità di propagazione delle perturbazioni elettromagnetiche.

6. - Alcuni casi particolari. — Per le applicazioni, giova vedere come le formole generali dianzi indicate si semplificano in taluni casi particolari notevoli.

a) *Linea senza perdite.* – Questo caso (ideale) si presenta quando sono nulle le costanti dissipative, cioè quando è $r = g = 0$, e quindi $\eta = \delta = 0$. Si ha allora

$$\mathbf{Z}_0 = \sqrt{\frac{l}{c}} , \quad \boldsymbol{\gamma} = j\alpha = j\omega\sqrt{lc} , \quad v = \frac{1}{\sqrt{lc}} ,$$

cioè la impedenza caratteristica è una pura resistenza il cui valore è indipendente dalla frequenza, l'attenuazione è nulla e la velocità di propagazione coincide con la velocità limite.

È interessante osservare che (come per un quadripolo qualunque) l'assenza di attenuazione può dedursi senz'altro dalla circostanza che, le dissipazioni essendo nulle, l'impedenza caratteristica sia una pura resistenza. Invero questo ultimo fatto equivale all'essere reale il rapporto fra la tensione e la corrente in un punto qualunque della linea supposta di lunghezza infinita; quindi tale tensione $\mathbf{V}$ e corrente $\mathbf{I}$ sono fra loro in fase, il rapporto $\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}}$ uguaglia dunque quello $\frac{V}{I}$ dei moduli, il quale risulta così costante. D'altra parte, essendo nulle le dissipazioni, la potenza $\mathbf{V} \times \mathbf{I} = VI$ non può variare da punto a punto, è costante dunque anche il prodotto VI degli stessi moduli, quindi questi sono singolarmente costanti, il che significa appunto che l'attenuazione è nulla.

b) *Linea con piccole perdite.* – Così chiameremo una linea in cui $\frac{r}{l\omega}, \frac{g}{c\omega}$ sono tanto piccoli da potersi trascurare, di fronte all'unità, i loro prodotti e le loro potenze superiori alla prima. Ovviamente, in tal caso i rapporti predetti si possono ritenere coincidenti con gli angoli di perdita η e δ, cioè si ha sensibilmente

$$\operatorname{tg}\eta \cong \operatorname{sen}\eta \cong \eta\,, \quad \cos\eta \cong 1\;; \quad \operatorname{tg}\delta \cong \operatorname{sen}\delta \cong \delta\;; \quad \cos\delta \cong 1\,.$$

Risulta allora

$$\mathbf{z} = jl\omega(1-j\eta)\,, \quad \mathbf{y} = jc\omega(1-j\delta)\,,$$

da cui, sostituendo, per ogni x piccolo di primo ordine, $1-x$ ad $\frac{1}{1+x}$ e $1-\frac{x}{2}$ a $\sqrt{1-x}$:

$$\mathbf{Z}_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{y}}} \cong \sqrt{\frac{l}{c}}\left(1-j\,\frac{\eta-\delta}{2}\right), \quad \boldsymbol{\gamma} = \sqrt{\mathbf{zy}} \cong j\omega\,\sqrt{lc}\left(1-j\,\frac{\eta+\delta}{2}\right).$$

Per il modulo Z_0 e l'argomento φ_0 di $\mathbf{Z}_0$ si ha

$$Z_0 \cong \sqrt{\frac{l}{c}}\,, \quad \varphi_0 \cong \frac{\delta-\eta}{2} \cong \frac{g}{2c\omega} - \frac{r}{2l\omega}\,.$$

Quanto alle componenti β ed α di γ si trova

$$\beta \cong \frac{1}{2}\left(r\sqrt{\frac{c}{l}} + g\sqrt{\frac{l}{c}}\right) = \frac{r}{2Z_0} + \frac{1}{2}\,gZ_0\,, \tag{20}$$

$$\alpha = \omega\,\sqrt{lc}\,. \tag{21}$$

Dunque la velocità di propagazione $v = \frac{\omega}{\alpha}$ e la costante di attenua-

zione β coincidono sensibilmente coi loro valori limiti per $\omega \to \infty$, e pertanto sono indipendenti dalla frequenza, come nel caso a).

Nelle applicazioni si presenta spesso il caso di linee con $g = 0$ (linee bene isolate, cavi, antenne, ecc.). Le espressioni precedenti si semplificano allora ulteriormente, e precisamente si ha

$$\beta = \frac{r}{2}\sqrt{\frac{c}{l}} = \frac{r}{2Z_0}, \quad \mathbf{Z}_0 = \sqrt{\frac{l}{c}}\left(1 - j\,\frac{r}{2l\omega}\right), \tag{22}$$

alla quale ultima, ponendo per ω il suo valore in funzione della lunghezza d'onda λ cioè $\frac{2\pi}{\lambda\sqrt{lc}}$, si può dare l'aspetto

$$\mathbf{Z}_0 = \sqrt{\frac{l}{c}}\left(1 - j\,\frac{\beta\lambda}{2\pi}\right), \tag{22'}$$

dove il coefficiente di j dell'espressione entro parentesi misura l'attenuazione totale relativa ad un tronco di lunghezza $\frac{\lambda}{2\pi}$, vale a dire l'attenuazione che accompagna la rotazione di fase di un radiante.

c) *Linea di minima attenuazione.* – A senso della (18), il minimo dell'attenuazione β si verifica per $\eta = \delta$, e poichè in tal caso risulta $B = 2$, si ha che il valore minimo stesso di β è

$$\beta_{\min} = \sqrt{rg}\,.$$

Quantunque η e δ dipendano dalla frequenza, l'uguaglianza $\eta = \delta$, vale a dire

$$\frac{l\omega}{r} = \frac{c\omega}{g} \quad \text{o} \quad lg = rc\,, \tag*{2(3)}$$

ne è invece indipendente, e pertanto si conclude che quando essa è soddisfatta, la $\frac{dB}{d\omega}$ è identicamente nulla. Dunque, quando la costante β raggiunge il suo valore minimo, essa risulta anche indipendente dalla frequenza, e di conseguenza altrettanto avviene della velocità v.

Una linea soddisfacente la (23), detta *condizione di Heaviside*, si dice, per ragioni che vedremo in seguito, *priva di distorsione*. Per una tale linea si verifica rigorosamente la (20), in quanto che, essendo soddisfatta la (23), l'impedenza caratteristica risulta, come nel caso a) della linea senza perdite, una pura resistenza indipendente della frequenza, e cioè si ha rigorosamente

$$\mathbf{Z}_0 = \sqrt{\frac{l}{c}}\,,$$

mentre il valore di β può porsi esattamente sotto le seguenti equivalenti forme:

$$\beta = \sqrt{rg} = r\sqrt{\frac{c}{l}} = g\sqrt{\frac{l}{c}} = \frac{1}{2}\left(r\sqrt{\frac{c}{l}} + g\sqrt{\frac{l}{c}}\right).$$

d) *Esempi*:

Notevoli esempi di linee a piccole perdite sono quelle costituite da due conduttori cilindrici ad assi paralleli (ordinarie linee a due fili) e quelle del tipo a conduttori cilindrici coassiali.

Andiamo a calcolare le costanti fondamentali per ciascuna di esse, ritenendo che sia senz'altro $g = 0$ (conduttori bene isolati) e ritenendo inoltre che si possano trascurare gli effetti di irradiazione di cui verrà parlato nel Cap. IX. Supporremo inoltre che si tratti di funzionamento a frequenze tanto elevate, che la corrente si possa ritenere localizzata con densità costante in uno strato periferico il cui spessore potrà calcolarsi, in funzione della frequenza, mediante la espressione indicata con a al Cap. II.

Per una linea del primo tipo, si ha

$$l = \frac{\mu}{\pi}\log\frac{2D}{d}\,, \quad c = \frac{\pi\varepsilon}{\log\frac{2D}{d}}\,, \quad r = \frac{2\varrho}{\pi d a}\,, \quad g = 0\,,$$

dove D, d indicano la distanza fra gli assi dei due fili ed il diametro di ciascuno di essi, misurati in metri al pari di a; ϱ la resistività, ε, μ le costanti dielettrica e magnetica del mezzo. Se questo è l'aria e i fili sono di rame sarà da porre:

$$\varrho = 0{,}017 \cdot 10^{-6}\Omega\text{-m}\,, \quad \varepsilon = 8{,}86 \cdot 10^{-12}\text{F/m}\,, \quad \mu = 1{,}256 \cdot 10^{-6}\text{H/m}\,.$$

L'attenuazione β è espressa da

$$\beta = \frac{\varrho}{2a}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\frac{1}{\log\frac{2D}{d}} = \frac{45 \cdot 10^{-12}}{ad\log\frac{2D}{d}}\,,$$

ed è interessante notare che, per una data distanza D fra i fili, essa risulta minima per $\log\frac{2D}{d} = 1$ [1], cioè quando il diametro di ciascun filo vale $\frac{D}{1{,}36}$. A tale condizione non si può però in generale soddisfare con le linee aeree a fili nudi perchè questi riuscirebbero troppo vicini (la distanza

[1] Infatti la derivata rispetto a d di $d\log\frac{2D}{d}$ cioè di $d\log 2D - d\log d$ vale $\log 2D - \log d - 1$, quindi si annulla per $\log\frac{2D}{d} = 1$.

fra i loro assi risultando 1,36 D, quella fra i lembi affacciati sarebbe soltanto di 0,36 D).

Per una frequenza di 10^7 Hz, per la quale è prossimamente $a = 2 \cdot 10^{-5}$ m, e per $d = 5 \cdot 10^{-3}$ m, $D = 0{,}5$ m, si avrebbe:

$$l = 2{,}11\ \mu\mathrm{H/m}\,, \quad c = 5{,}26\ \mu\mu\mathrm{F/m}\,, \quad r = 0{,}106\ \Omega/\mathrm{m}\ ;$$

e quindi

$$\beta = 85 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{neper/m}\,.$$

La reattanza unitaria $l\omega$ risulta di 132 Ω/m, per cui l'angolo di perdita η vale $\varepsilon = 8{,}2 \cdot 10^{-4}$ rad. L'impedenza caratteristica risulta

$$\mathbf{Z}_0 = \sqrt{\frac{l}{c}}\left(1 - j\frac{\eta}{2}\right) = 635\ (1 - j\ 4{,}1 \cdot 10^{-4})\,,$$

praticamente coincidente con la resistenza (pura) di 635 Ω.

La velocità di propagazione uguaglia $\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$, quindi coincide con la velocità della luce.

Per una linea del secondo tipo, detti d e D i diametri del conduttore interno ed esterno, che supporremo di rame, si ha:

$$l = \frac{\mu}{2\pi}\log\frac{D}{d}\,, \quad c = \frac{2\pi\varepsilon}{\log\dfrac{D}{d}}\,, \quad r = \frac{\varrho}{\pi a}\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{D}\right), \quad g = 0\,,$$

e quindi

$$\beta = \frac{2\varrho}{a}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{D}\right)\frac{1}{\log\dfrac{D}{d}} = \frac{90 \cdot 10^{-12}}{a}\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{D}\right)\frac{1}{\log\dfrac{D}{d}}\,.$$

Anche qui si può osservare che, per un dato valore di D, esiste un valore di d cui compete un valore minimo di β. Infatti, scrivendo $\dfrac{D}{x}$ al posto di d, la precedente, salvo un fattore indipendente da x, equivale a $\dfrac{1+x}{\log x}$, il cui minimo si verifica per $x = 3{,}6$ cui corrisponde $\log x = 1{,}28$ (1).

Riterremo pertanto che si abbia a che fare con una linea soddisfacente a tale condizione. Supponendo ad es. $d = 0{,}167$ m e $D = 0{,}6$ m, per una frequenza di 10^7 Hz ($a = 2 \cdot 10^{-5}$ m) si avrà:

$$l = 0{,}256\ \mu\mathrm{H/m}\,, \quad c = 43\ \mu\mu\mathrm{F/m}\,, \quad r = 2{,}07 \cdot 10^{-4}\Omega/\mathrm{m}\,,$$

e quindi

$$\beta = 1{,}33 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{neper/m}\,.$$

---

(1) Infatti il numeratore della derivata rispetto ad x vale $\log x - \dfrac{1+x}{x}$, quindi si annulla per $x \log x = 1 + x$. Cogli ordinari metodi di risoluzione approssimata delle equazioni numeriche, si trova che questa equazione è soddisfatta da $x = 3{,}6$.

L'angolo di perdita η risulta di $\frac{r}{l\omega} = 1{,}05 \cdot 10^{-6}$ radianti, e l'impedenza caratteristica si riduce ad una pura resistenza di 77,5 Ω; la velocità di propagazione, come nel precedente caso, coincide praticamente con quella della luce.

7. - Cenno sulle linee per trasmissioni foniche. — Le considerazioni generali dianzi esposte e le formole fondamentali (8) che governano il funzionamento di una linea trovano applicazione in numerosi problemi della tecnica.

Nel campo delle basse frequenze industriali, è immediata l'applicazione al caso delle ordinarie linee di trasporto di energia. Senonchè tali linee sono sempre elettricamente molto corte. Si pensi infatti che nel caso di una ordinaria linea aerea a due fili di bassa resistenza unitaria, lungo la quale la velocità di propagazione coincide praticamente con quella della luce, la lunghezza d'onda corrispondente ad es. alla frequenza di 50 Hz è di 6000 km, per cui le lunghezze interessate nei casi pratici rappresentano sempre una piccola frazione della lunghezza d'onda. Ciò porta di conseguenza che le variazioni della corrente e della tensione lungo la linea non sono quasi mai di entità notevole, salvo alcuni casi eccezionali, come ad es. quando la linea è aperta all'estremità opposta a quella di alimentazione, come meglio vedremo nei nn. segg. Per linee chiuse, come ordinariamente avviene, su una conveniente impedenza di carico, la tensione e la corrente iniziali sono essenzialmente determinate da questa e sono poco influenzate dalle caratteristiche della linea.

Nel campo delle frequenze acustiche (trasmissioni telefoniche) si ha spesso a che fare con linee elettricamente alquanto lunghe, che, come ora diremo, vengono eccitate contemporaneamente con più frequenze, e per le quali è desiderabile evitare fenomeni di riflessione. Ciò, come sappiamo, porta alla necessità di effettuare la chiusura della linea stessa sulla sua impedenza caratteristica, il che, nel caso attuale, non riesce possibile se non quando tale impedenza è indipendente dalla frequenza, in particolare quindi per linee a basse perdite, e meglio ancora per quelle soddisfacenti alla condizione (23).

Quest'ultima condizione è particolarmente importante per le trasmissioni di correnti foniche, per il fatto che, come abbiamo detto sopra, queste sono caratterizzate dalla contemporanea presenza di numerose frequenze ricoprenti una vasta gamma (da 20 ÷ 30 Hz a 10 ÷ 15 kHz ed anche più). Ora come abbiamo veduto nel n. prec., la costante di attenuazione e la velocità di propagazione sono in generale variabili con la frequenza, onde segue che le componenti di una corrente fonica subiscono attenuazioni e spostamenti di fase diversi a seconda della loro frequenza, cosicchè all'estremo ricevente si sovrappongono elementi la

cui composizione non può dare una corrente *simile* a quella immessa all'estremità trasmittente. Si ha precisamente una doppia causa di *distorsione*, l'una dovuta alle diverse attenuazioni, l'altra alle diverse velocità di propagazione della fase, che vanno ad affettare i singoli elementi sinusoidali componenti.

Tali due cause di distorsione possono venire contemporaneamente eliminate quando la trasmissione venga effettuata con linee soddisfacenti alla condizione (23), in quanto che, come si è visto, questa è necessaria e sufficiente affinchè β e v siano rigorosamente indipendenti dalla frequenza. Pertanto, in una trasmissione effettuata con una linea siffatta, i vari elementi componenti gli elementi d'entrata si trovano all'uscita singolarmente modificati, ma in guisa tale che le reciproche relazioni di ampiezza e di fase risultano inalterate; in altre parole, il diagramma di un elemento (tensione, corrente) d'uscita ha esattamente la stessa *forma* del corrispondente d'entrata. Non si verificano cioè quei fenomeni di distorsione che nel caso generale accompagnano una trasmissione di tal genere, per il fatto che tanto l'attenuazione quanto la velocità di propagazione non sono le stesse per tutti gli elementi sinusoidali di diversa frequenza costituenti l'elemento elettrico trasmesso [1]. Per questa ragione appunto la condizione (23) viene anche detta di « non distorsione ».

Specialmente nel caso delle trasmissioni foniche per cavo non riesce facile soddisfare alla condizione (23) perchè il valore di c è relativamente elevato, ed allora si provvede ad elevare artificialmente il valore di l, o, come si suol dire, a *caricare* la linea, mediante i noti processi di pupinizzazione e di krarupizzazione.

È interessante osservare che tali procedimenti non servono soltanto ad evitare le distorsioni, ma altresì a diminuire la attenuazione. Questa infatti, nel caso di dispersione trascurabile ($g = 0$) e piccoli valori di r, è sensibilmente data da

$$\beta \cong \frac{r}{2}\sqrt{\frac{c}{l}} = \frac{r}{2Z_0},$$

cioè è proporzionale direttamente alla resistenza ed alla radice quadrata della capacità, ed inversamente alla radice quadrata dell'induttanza o, più brevemente (seconda espressione), inversamente proporzionale all'impedenza caratteristica. A prima vista può sembrare strano che un aumento dell'induttanza adduca ad una diminuzione dell'attenuazione, cioè delle perdite, laddove nel caso delle ordinarie linee per trasporti di energia le minori perdite si hanno pei minori valori di induttanza. Ma non bisogna

[1] Siccome β e v sono funzioni crescenti della frequenza, le correnti corrispondenti ai suoni più acuti vengono più attenuate di quelle relative ai suoni bassi (distorsione di prima specie) ed inoltre la loro fase viaggia più velocemente (distorsione di seconda specie).

dimenticare che in questi casi, come già sopra è stato osservato, a causa della brevità elettrica della linea. l'impedenza all'origine è essenzialmente determinata dal carico terminale; ed in relazione a ciò, per diminuire le perdite, si cerca di operare con elevate tensioni e piccole correnti, cioè con elevata impedenza *terminale*, il che corrisponde anche alla condizione di elevata impedenza iniziale in quanto che ovviamente in tali casi interessa ridurre al minimo l'impedenza della linea. Orbene, sotto tale punto di vista, il comportamento delle lunghe linee per trasmissioni foniche può considerarsi regolato dalle medesime norme. Infatti, col crescere della lunghezza della linea, e specialmente quando l'attenuazione non è molto piccola, l'impedenza iniziale finisce coll'essere pochissimo influenzata dall'impedenza terminale e s'avvicina alla impedenza caratteristica, indipendentemente da quella: ne segue che le perdite riescono tanto più ridotte quanto maggiore è Z_0, cioè quanto maggiore è l e minore c (1), il che corrisponde ad operare con elevata tensione e piccola corrente.

Ciò vale naturalmente soltanto finchè g è praticamente trascurabile, perchè, con valori sensibili di g, il secondo termine di β, cioè $\frac{gZ_0}{2}$, mostra invece che elevati valori di Z_0 favoriscono l'aumento di attenuazione, il che risulta fisicamente evidente se si pensa che le perdite dovute a g crescono con la tensione.

Osserviamo qui che l'indipendenza della velocità di propagazione dalla frequenza acquista una importanza notevolissima anche nel caso di trasmissioni telegrafiche, in quanto che, come si dimostra in Analisi, ogni segnale telegrafico può decomporsi in un insieme di infiniti elementi sinusoidali ricoprenti una gamma di frequenze estesissima ed a carattere continuo. Ne consegue che, con velocità di propagazione variabile con la frequenza, occorre lasciar trascorrere un certo tempo fra un segnale ed il successivo se si vuol evitare che alcuni degli elementi componenti il secondo vadano a sovrapporsi ad elementi del primo, rendendo così inintelligibili i segnali stessi. Per evitare ciò, conviene avvicinarsi quanto più è possibile alla condizione di Heaviside, per il che in generale è necessario caricare la linea con induttanza. Un tale procedimento però conduce ad una diminuzione della velocità di propagazione, per cui a prima vista sembrerebbe che il vantaggio dell'indipendenza di v dalla frequenza ne venisse essenzialmente frustrato. Ma non è così, perchè, quando gli elementi componenti il segnale viaggiano, per così dire, « in formazione compatta », si rende possibile far seguire i successivi segnali ad intervalli molto brevi avvantaggiandosi così l'intensità del traffico; mentre un più

(1) Del resto è anche evidente che più elevati valori di l e più bassi valori di c concorrono a rendere minore *la corrente* e quindi le perdite.

basso valore della velocità di propagazione conduce solo a ciò, che un maggior tempo decorre fra l'invio del segnale e l'arrivo del segnale stesso, il che ovviamente non ha importanza alcuna.

8. - **Regime stazionario.** — Riprendiamo le formole generali (8) che scriviamo sotto la forma più semplice

$$(24) \qquad \begin{cases} V = V_1 \mathrm{ch}\gamma x_1 + Z_0 I_1 \mathrm{sh}\gamma x_1 \\ I = \dfrac{V_1}{Z_0}\mathrm{sh}\gamma x_1 + I_1 \mathrm{ch}\gamma x_1, \end{cases}$$

avendo posto $x = 0$, il che equivale ad aver posto l'origine nel punto cui competono i valori V ed I della tensione e della corrente.

Così, in queste, V, I, V_1, I_1 rappresentano sostanzialmente i valori della tensione e della corrente in due punti qualunque di cui x_1 rappresenta la distanza misurata positivamente nel senso dall'erogazione all'alimentazione, e si potrà sempre intendere che in uno di essi abbia luogo l'eccitazione e nell'altro l'erogazione o carico, in quanto che il funzionamento di un qualunque tronco di una data linea non risulta ovviamente alterato se si pone al suo inizio un generatore atto a mantenere una d. d. p. alternativa V uguale alla tensione esistente in esso, e si carica l'altro estremo con un ricevitore di impedenza uguale al rapporto fra la tensione V_1 e la corrente I_1 pertinenti all'estremo stesso, nel qual caso la corrente erogata dal generatore sarà precisamente la I pertinente al punto iniziale.

Chiameremo « impedenza del punto generico » il rapporto $\dfrac{V}{I}$ fra la tensione e la corrente nel punto stesso. Fra i valori Z e Z_1 delle impedenze nei due punti cui si riferiscono i valori di tensione e corrente contemplati dalle (24), si avrà, dividendo queste stesse membro a membro:

$$(25) \qquad Z = Z_0 \frac{Z_1 \mathrm{ch}\gamma x_1 + Z_0 \mathrm{sh}\gamma x_1}{Z_1 \mathrm{sh}\gamma x_1 + Z_0 \mathrm{ch}\gamma x_1},$$

mediante la quale relazione, nota l'impedenza in un punto e le costanti caratteristiche della linea, Z_0 e γ, si può calcolare l'impedenza in un altro punto situato alla distanza x_1 dal primo.

Si può chiedere se è possibile che a due punti diversi competa un medesimo valore di impedenza. Ponendo nella precedente $Z = Z_1$, si trae

$$(Z_1^2 - Z_0^2)\mathrm{sh}\gamma x_1 = 0,$$

dal che si deduce che, salvo il caso in cui possa risultare $\mathrm{sh}\gamma x_1 = 0$, la cosa non è possibile se non per $Z_1 = Z_0$, cioè quando l'impedenza in uno dei due punti uguaglia la impedenza caratteristica. D'altra parte, quando è $Z_1 = Z_0$, la (25) fornisce $Z = Z_0$ per qualunque x_1.

Dunque, se escludiamo che possa essere $\mathrm{sh}\gamma x_1 = 0$, possiamo concludere che un medesimo valore di impedenza non può ripetersi se non nel caso di linea infinitamente lunga o, il che è elettricamente equivalente, nel caso di una linea finita chiusa sulla impedenza caratteristica.

Il caso $\mathrm{sh}\gamma x_1 = 0$ non può presentarsi se non per γx_1 multiplo di $j\pi$, quindi, essendo x_1 reale, per γ immaginario puro, cioè quando l'attenuazione è nulla, vale a dire per una linea senza perdite ($r = g = 0$). Una tale linea non è fisicamente realizzabile; ma siccome essa rappresenta un caso (ideale) cui talvolta ci si può molto avvicinare, ci conviene studiarla in dettaglio.

Per $r = g = 0$, si ha:

$$\gamma = ja = j\omega\sqrt{lc} = j\frac{2\pi}{\lambda},$$

e l'impedenza caratteristica si riduce ad una resistenza che indicheremo con R_0. Le (24) in tal caso si scrivono:

$$\left\{\begin{aligned} \mathbf{V} &= \mathbf{V}_1 \cos ax_1 + jR_0\mathbf{I}_1 \operatorname{sen} ax_1 \\ \mathbf{I} &= j\frac{\mathbf{V}_1}{R_0} \operatorname{sen} ax_1 + \mathbf{I}_1 \cos ax_1, \end{aligned}\right. \tag{24'}$$

e la (25) diviene

$$\mathbf{Z} = R_0 \frac{\mathbf{Z}_1 \cos ax_1 + jR_0 \operatorname{sen} ax}{j\mathbf{Z}_1 \operatorname{sen} ax_1 + R_0 \cos ax}, \tag{25'}$$

e si può effettivamente verificare che risulta $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_1$ per ogni coppia di punti la cui distanza x_1 corrisponde ad un numero intero qualunque di mezze lunghezze d'onda.

È segnatamente interessante il caso particolare in cui l'impedenza in un punto risulti una pura reattanza. Se ciò avviene in un punto, avviene dovunque: invero, posto $\mathbf{Z}_1 = jX_1$ nella precedente, ne risulta per $\mathbf{Z}$ un valore puramente immaginario per ogni x_1. Non solo, ma possiamo constatare che esistono punti in cui l'impedenza è nulla ed altri in cui essa è infinita (cioè in cui è nulla la tensione, rispettivamente la corrente). Basta scrivere la condizione d'annullamento del numeratore o del denominatore della precedente, per es. la prima, per trovare:

$$\mathrm{tg}\, ax_1 = -\frac{X_1}{R_0}, \qquad \text{rispett.} \quad \mathrm{tg}\, ax_1 = \frac{R_0}{X_1}.$$

Si vede dunque che i punti di tensione nulla sono (al pari di ogni coppia di punti di uguale impedenza) distanziati di mezza lunghezza d'onda l'uno dall'altro, ed altrettanto avviene per quelli di corrente nulla; e di

più, come si vede dalle precedenti, gli uni dimezzano i segmenti compresi fra gli altri [1].

In questo caso si dice che la linea è sede di *onde stazionarie*, o che è *in regime stazionario*. Per vedere chiaramente i caratteri di tale regime conviene, per semplificare, porre l'origine in un punto di impedenza nulla od infinita. Se ad es. si suppone che all'origine la tensione sia nulla e la corrente abbia il valore $\mathbf{I}_1$, le relazioni fondamentali divengono

$$(26) \qquad \mathbf{V} = -jR_0\mathbf{I}_1 \operatorname{sen} ax_1\,, \quad \mathbf{I} = \mathbf{I}_1 \cos ax_1\,, \quad \mathbf{Z} = -jR_0 \operatorname{tg} ax_1\,.$$

Esse mostrano che le tensioni nei vari punti sono fra loro in fase (od in opposizione) come pure le correnti fra loro, mentre ogni tensione è in quadratura con ogni corrente, dal che in primo luogo si deduce che l'impedenza in ogni punto è una pura reattanza.

È importante segnalare che tale ultimo fatto è *caratteristico* del regime stazionario. Si ha cioè che, se l'impedenza in ogni punto si riduce ad una pura reattanza, necessariamente sono nulle le costanti dissipative r e g, e (quindi) esistono punti di tensione nulla ed altri di corrente nulla. Anzi, possiamo dimostrare che è condizione a ciò sufficiente l'esistenza anche di *un solo punto* in cui l'impedenza $\mathbf{Z}_1$ si riduce ad una reattanza jX_1 con X_1 finito e diverso da zero [2]. Invero, siccome la parte reale dell'impedenza non può mai essere negativa, segue che, se in un punto essa è nulla, quivi deve avere un minimo e pertanto deve essere nulla anche la sua derivata. Assumendo quel punto come origine, l'impedenza del punto generico a distanza x_1 da quello vale

$$\mathbf{Z}_0 \frac{jX_1 \operatorname{ch} \gamma x_1 + \mathbf{Z}_0 \operatorname{sh} \gamma x_1}{jX_1 \operatorname{sh} \gamma x_1 + \mathbf{Z}_0 \operatorname{ch} \gamma x_1}\,,$$

la cui derivata rispetto ad x_1, per $x_1 = 0$, vale

$$\gamma \mathbf{Z}_0 + X_1^2 \frac{\gamma}{\mathbf{Z}_0}\,,$$

cioè, per le (6), $\mathbf{z} + X_1^2 \mathbf{y}$, la cui parte reale $r + gX_1^2$ non può annullarsi se non per $r = g = 0$.

L'esame delle (26) mostra che le ampiezze delle tensioni variano localmente (cioè da punto a punto) con legge sinusoidale avente per periodo

---

[1] Infatti, posto $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{X_1}{R_0}$, è $\frac{R_0}{X_1} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)$, quindi le ascisse dei punti di impedenza nulla ed infinita sono definite da

$$\alpha x_1 = \varphi + 2k\pi \quad \text{risp.} \quad \alpha x_1 = \varphi + \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad (k \text{ intero}).$$

[2] Un punto in cui Z_1 è finita e diversa da zero esiste certamente perchè, se l'impedenza fosse dovunque nulla, sarebbe dovunque nulla la tensione con corrente diversa da zero e quindi (a causa della (1)) dovrebbe essere $\mathbf{z} = 0$. Analogamente, per essere $\mathbf{y} \neq 0$, non può l'impedenza essere dovunque infinita.

la lunghezza d'onda, talchè ad ogni mezza lunghezza d'onda si raggiunge il valore nullo dell'ampiezza e la fase s'inverte; altrettanto avviene per le correnti, ma con una vicenda spazialmente spostata di un quarto di lunghezza d'onda. In brevi parole, si può dire che si ha a che fare con due distribuzioni le quali, oltre ad essere in quadratura temporale, hanno anche le ampiezze disposte secondo una legge di quadratura locale. Gli sfasamenti di carattere temporale sono legati al periodo dell'eccitazione, quelli di carattere locale alla lunghezza d'onda, la quale, pel tramite della velocità di propagazione, è legata anche essa al medesimo periodo.

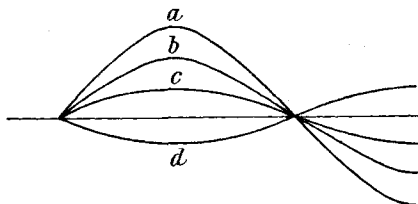



Fig. 97

Il sistema delle tensioni presenta dunque dei *nodi* e dei *ventri* regolarmente distanziati di un quarto di periodo e coincidenti rispettivamente coi ventri e nodi delle correnti. Il diagramma delle tensioni nei vari punti, in un certo istante, si presenta come una sinusoide, la quale va modificando la sua ampiezza in istanti successivi secondo una legge di variazione sinusoidale temporale come indicato in fig. 97, dove *a* rappresenta il diagramma nell'istante del massimo di tutte le ampiezze; in istanti successivi esso si presenta come in *b*, *c*, fino a coincidere con l'asse nell'istante che dista un quarto di periodo da quello cui si riferisce *a*, e poi assume un aspetto del tipo *d*, ecc. A differenza del caso illustrato nella fig. 95, in cui si aveva uno stato di cose paragonabile ad un'onda progrediente, si ha qui che l'oscillazione in ogni punto appare non allontanarsi dal punto stesso, donde il nome di regime stazionario. Il contemporaneo andamento delle correnti è del tutto analogo, salvo lo sposta-

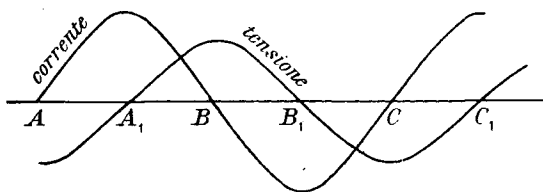



Fig. 98

mento locale e temporale dianzi descritto. In fig. 98 sono disegnati i diagrammi delle distribuzioni delle correnti e di tensione per gli istanti corrispondenti ai rispettivi massimi; i punti A, B, C sono nodi di corrente e ventri di tensione, nei punti A_1, B_1, C_1 si verificano i ventri di corrente ed i nodi di tensione; ma nell'istante in cui la corrente ha i valori corrispondenti al diagramma disegnato, il diagramma delle tensioni coincide con l'asse e viceversa.

È infine notevole osservare che il rapporto fra le ampiezze massime (ventrali) della tensione e della corrente uguaglia la resistenza caratteristica R_0.

9. - Linee in regime stazionario aperte o cortocircuitate a un estremo. — Poichè in generale una linea può essere sempre limitata ad un suo punto qualunque, purchè in questo si inserisca una impedenza uguale a quella che la linea presenta nel punto stesso, si avrà che una linea in regime stazionario potrà impunemente venire interrotta in un punto nodale della corrente, o cortocircuitata in un punto nodale della tensione, senza che ne vengano alterate le preesistenti distribuzioni di corrente o di tensione.

In particolare si ha che un tronco di linea aperto ad un estremo Q (impedenza infinita) presenta impedenza nulla in qualunque punto P la cui distanza dal termine uguaglia un numero dispari di quarti di lunghezza d'onda, cioè il tronco PQ visto da P si presenta come un circuito risonante serie (cioè di impedenza nulla), come invece, visto da Q, ha il carattere di circuito risonante parallelo (ammettenza nulla), tali risonanze essendo ben inteso riferite alla frequenza cui è legata la lunghezza d'onda considerata.

Più generalmente, tali caratteri di risonanza spettano anche a tronchi aventi inizio in P (rispettivamente Q) e terminanti in un punto qualunque Q' (risp. P') purchè in questo si effettui la chiusura su una impedenza opportuna; precisamente questa dovrà essere una reattanza di valore $-jR_0 \operatorname{tg} ax_1$, (risp. $jR_0 \operatorname{tg} ax_1$), essendo x_1 la lunghezza del tronco.

Ciò val quanto dire che un tronco di linea il cui estremo è cortocircuitato equivale ad una reattanza magnetica se la sua lunghezza è minore di un quarto di lunghezza d'onda, o compresa fra $2\frac{\lambda}{4}$ e $3\frac{\lambda}{4}$ oppure fra $4\frac{\lambda}{4}$ e $5\frac{\lambda}{4}, \ldots,$ ad una capacitiva se la lunghezza è compresa fra $\frac{\lambda}{4}$ e $2\frac{\lambda}{4}$ oppure fra $3\frac{\lambda}{4}$ e $4\frac{\lambda}{4}$, ecc. Invece un tronco di linea il cui estremo è aperto equivale ad una reattanza capacitiva se la lunghezza è minore di $\frac{\lambda}{4}$, o compresa fra $2k\frac{\lambda}{4}$ e $(2k+1)\frac{\lambda}{4}$, magnetica nel caso opposto.

Di tale comportamento possiamo renderci conto in modo fisicamente intuitivo pensando le correnti e le tensioni nei vari punti dovute alla sovrapposizione di una distribuzione diretta ed una riflessa secondo il procedimento generale esposto al n. 4.

Consideriamo ad es. il caso di una linea cortocircuitata ad un estremo. Innanzi tutto osserviamo che, nel caso di dissipazioni nulle, le formole che governano il regime progressivo sono del tipo

$$\mathbf{V} = R_0\mathbf{I} = \mathbf{A}e^{-jax},$$

da cui si deduce che in ogni punto il rapporto $\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}}$, uguale all'impedenza caratteristica R_0, è come questa reale, e quindi la corrente e la tensione sono fra loro in fase. Il regime più generale, corrisponde, come sappiamo, a leggi del tipo

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}e^{-j\alpha x} + \mathbf{B}e^{j\alpha x}, \quad R_0\mathbf{I} = \mathbf{A}e^{-j\alpha x} - \mathbf{B}e^{j\alpha x}, \tag{27}$$

ed il regime stazionario si verifica nel caso particolare in cui **A** e **B** sono uguali oppure contrari; invero in tal caso queste formole assumono ovviamente l'aspetto (24').

Ciò premesso, per esaminare quel che avviene per una linea cortocircuitata ad un estremo, cominciamo coll'osservare che in tale punto si verifica riflessione ed il relativo fattore (n. 4) vale 1 per la corrente e -1 per la tensione. Ciò significa che l'onda progressiva di corrente,

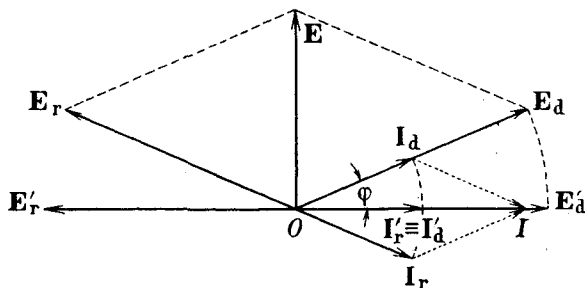



Fig. 99

giungendo all'estremo, continua regolarmente il suo cammino a ritroso, mentre per l'onda di tensione tale continuazione è accompagnata da una brusca inversione della fase. Supponiamo che la linea abbia lunghezza minore di $\frac{\lambda}{4}$: la corrente e la tensione corrispondenti all'onda progressiva diretta — cioè quella che va verso il corto circuito — si trovano fra loro in fase, talchè vettorialmente saranno rappresentate da due segmenti come OI_d, OE_d (fig. 99). All'estremo le troveremo ancora fra loro in fase, con ampiezze immutate, ma girate, nel senso del ritardo, di un angolo $\varphi < \frac{\pi}{2}$ dipendente dalla lunghezza del tratto; esse cioè saranno rappresentate dai vettori $O\mathbf{I}'_d$, $O\mathbf{E}'_d$. In tale punto la $O\mathbf{E}'_d$ subisce un rovesciamento, con che il relativo vettore si porta in $O\mathbf{E}'_r$, che sarà il vettore di partenza per la propagazione a ritroso, mentre il corrispondente vettore $O\mathbf{I}'_r$ della corrente coinciderà con $O\mathbf{I}'_d$. La propagazione riflessa conduce poi i vettori $O\mathbf{E}'_r$ e $O\mathbf{I}'_r$ in $O\mathbf{E}_r$, $O\mathbf{I}_r$ in ritardo di φ rispetto a quelli, talchè in definitiva si ha che la tensione e la corrente nel punto originario, da calcolarsi mediante composizione geometrica di $O\mathbf{E}_r$ con $O\mathbf{E}_d$

e di OI_r con OI_d, risultano disposte come le **E** ed **I** della figura. Come si vede, la tensione anticipa di un quarto di periodo rispetto alla corrente, il che significa che il tronco considerato si comporta come una reattanza magnetica.

Se invece la lunghezza del tronco è compresa fra $\frac{\lambda}{4}$ e $\frac{\lambda}{2}$, l'angolo φ risulta compreso fra $\frac{\pi}{2}$ e π e si vede che la tensione è allora in ritardo rispetto alla corrente, cioè si ha un comportamento capacitivo.

Nell'ipotesi di estremo aperto, essendo infinita l'impedenza nel punto di riflessione, il fattore di riflessione vale -1 per la corrente ed 1 per la tensione, e pertanto si perviene a risultati uguali, salvo lo scambio di corrente con tensione: quindi il comportamento è capacitivo per $\varphi < \frac{\pi}{2}$, magnetico per $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$, e così via.

La costruzione precedente mette chiaramente in luce che la tensione e la corrente in ogni punto risultano sempre dalla composizione di due vettori di uguale modulo, e formanti angoli uguali e di senso contrario con direzioni fisse delle quali quella relativa alle correnti è normale a quella delle tensioni. Da ciò segue che le varie tensioni sono fra loro in fase e così pure le varie correnti, e che le prime sono sempre in quadratura con le seconde, ed inoltre che le ampiezze delle tensioni e delle correnti nei vari punti variano fra un minimo ed un massimo (ventri) passando per valori nulli.

È utile osservare la seguente caratteristica differenza fra il regime stazionario ed il regime progressivo: in questo, un voltmetro (o un amperometro) inserito in un punto qualunque della linea darebbe sempre la stessa indicazione, in quello invece darebbe indicazioni a diagramma periodico con periodo $\frac{\lambda}{2}$ (1), con punti di zero corrispondenti ai nodi, e di massimo ai ventri.

10. - Diversa deduzione dei risultati precedenti. — Alle formole che governano i fenomeni di cui è sede una linea come quella esaminata, e di cui ci siamo occupati nei nn. prece., si può pervenire anche in altro modo, partendo dalla considerazione che l'andamento delle correnti e delle tensioni da noi dedotto mediante l'applicazione delle leggi fondamentali di Ohm e di Kirchhoff corrisponda effettivamente ad un fenomeno di propagazione.

---

(1) Tale periodo è $\frac{\lambda}{2}$ e non λ, perchè l'apparecchio è capace di indicare soltanto l'ampiezza.

Consideriamo cioè una linea infinitamente lunga, di cui supponiamo nulle le costanti dissipative r e g. Pensiamo che, a partire da un certo istante, ad un suo estremo venga applicata una tensione *costante* v, e che tale tensione raggiunga i successivi punti della linea, non in modo istantaneo, bensì con una certa velocità finita a, talchè la distanza x dall'origine verrà raggiunta al tempo $t = \frac{x}{a}$. In tale istante, sull'armatura del condensatore costituito dai due fili si sarà accumulata una carica misurata da

$$q = c \cdot at \cdot v\,,$$

e poichè tale carica varia linearmente col tempo, ad essa corrisponderà una intensità costante i di corrente (di carica) misurata da

$$i = c \cdot a \cdot v\,,$$

che troveremo anch'essa localizzata successivamente in tratti via via più lunghi della linea; precisamente tale corrente si sarà anche essa « propagata » con la stessa velocità a, in guisa da interessare, alla fine del tempo t, un tratto di lunghezza at. Il tratto di conduttura che è stato invaso da tale corrente presenta una induttanza $l \cdot at$, e quindi a quella corrente si è accompagnata la creazione di un flusso magnetico $l \cdot at \cdot i$. Il rapporto fra questo ed il tempo t, in quanto misura la f. e. m. indotta che ha ostacolato lo stabilirsi della corrente, corrisponde manifestamente alla tensione v che si è man mano propagata bilanciando quella f. e. m., onde si avrà

$$l \cdot a \cdot i = v\,.$$

Combinando con la precedente si ricava

$$lca^2 = 1, \quad \text{cioè} \quad a = \frac{1}{\sqrt{lc}},$$

dopo di che da una qualunque delle relazioni scritte si deduce

$$\frac{v}{i} = \sqrt{\frac{l}{c}}\,.$$

Si ha dunque che la velocità di propagazione non può differire da $\frac{1}{\sqrt{lc}}$ e che il rapporto fra i valori di v ed i in un punto qualunque vale $\sqrt{\frac{l}{c}}$.

Appare naturale di ammettere che se la tensione applicata, anzichè essere costante, varia col tempo, la propagazione segua le stesse leggi e pertanto si verifichino gli stessi valori di a e del rapporto $\frac{v}{i}$.

Ciò premesso, supponiamo che la tensione applicata all'origine sia di tipo sinusoidale

$$v = V_m \cos \omega t \,. \tag{28}$$

Avverrà allora che, nel posto x all'istante t, non si avrà il valore (28) della tensione, bensì quello che ad esso competeva in un tempo di tanto anteriore quanto ne occorre ad un mobile animato da velocità a per coprire la distanza x. Si avrà cioè come valore di v al tempo t nel posto x:

$$v = V_m \cos \omega \left(t - \frac{x}{a}\right), \tag{29}$$

ed inoltre si può asserire che la corrente i sarà in ogni punto in fase con la tensione nel punto stesso; più precisamente essa si otterrà da questa mediante divisione per la costante reale $\sqrt{\frac{l}{c}}$, che è la misura di una resistenza.

È facile vedere che questa espressione corrisponde al primo termine della (27). Invero, sviluppando il secondo membro, si ha:

$$v = V_m \cos \omega t \cos \frac{\omega x}{a} + V_m \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} \frac{\omega x}{a} \,.$$

Ora, se si indica con $\mathbf{V}_0$ la grandezza sinusoidale $V_m \cos \omega t$, la $V_m \operatorname{sen} \omega t = V_m \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$ sarà da indicarsi con $-j\mathbf{V}_0$, onde per la grandezza alternativa in questione si ha l'espressione:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 \cos \frac{\omega x}{a} - j\mathbf{V}_0 \operatorname{sen} \frac{\omega x}{a} = \mathbf{V}_0 e^{-j\frac{\omega x}{a}} \,,$$

che corrisponde al primo termine della (27) perchè è:

$$\alpha = \frac{\omega}{a} \,. \tag{30}$$

Ora, se si indica con λ il percorso compiuto dalla propagazione durante un periodo T della tensione applicata, cioè si pone:

$$\lambda = aT \,,$$

si ha:

$$\alpha = \frac{2\pi}{\lambda} \,.$$

La λ così definita è la lunghezza dell'onda, cioè la distanza che intercede fra due punti fra i quali il ritardo prodotto dalla propagazione corrisponde ad un periodo, per cui la identità asserita è completamente verificata.

E quanto si è detto per la tensione **V**, potrebbe ripetersi per la corrente **I**.

Ma l'analogia può spingersi più oltre.

Se la linea non ha termine, la distribuzione dei valori di **V** e di **I** è senz'altro quella indicata. Ma se essa è di lunghezza finita, possono presentarsi casi svariati che interessa esaminare.

Se ad es. la linea, di lunghezza finita, è chiusa in corto circuito all'estremità, dovrà necessariamente quivi verificarsi in ogni istante il valor nullo della tensione. D'altro canto, per effetto della propagazione, la tensione stessa giunge in generale all'estremità con un valore v_1 diverso da zero, quindi, per fatto della chiusura supposta, deve necessariamente crearsi all'estremità un nuovo centro d'emissione di tensione di valore iniziale $-v_1$, la quale si propagherà in senso opposto al precedente. Ciò val quanto dire che la v primitiva, giunta all'estremo, subisce un improvviso spostamento di fase di 180° e *si riflette* verso l'origine.

Invece per la corrente un tale fatto non si presenterà in quanto la chiusura in corto circuito non vincola in alcun modo il valore della corrente nel punto di chiusura. In tale caso le tensioni dovute alla propagazione riflessa sono generalmente sfasate rispetto a quelle della propagazione diretta, ma siccome le due componenti sono simmetricamente sfasate rispetto alla tensione terminale, la loro composizione dà in ogni punto risultanti fra loro in fase, ma di ampiezza variabile da punto a punto. Ed altrettanto può dirsi per le correnti.

Quanto sopra può ripetersi parola per parola per le *correnti* nell'ipotesi che la estremità sia *aperta*, e quindi ivi sia necessariamente $i = 0$ (¹).

Quando una corrente propagantesi trova all'estremità una impedenza in cui, per così dire, riversarsi, può darsi che questa abbia valore tale da *assorbirla* completamente, in relazione al valore che nello stesso punto raggiunge la tensione, e questo è il caso di una linea chiusa sulla sua impedenza caratteristica. Non si ha allora riflessione, e tutto avviene come se la linea fosse di lunghezza infinita, cioè si ha uno stato di cose a carattere *progressivo*.

Quando invece, per essere la impedenza di carico diversa da questa, non può verificarsi l'assorbimento completo, la parte residuale dà luogo a riflessione, a partire da un valore capace di annullare detto residuo. Si ha dunque, in tale caso più generale, la coesistenza di uno stato di cose a carattere progressivo e di uno a carattere stazionario.

Il caso puramente progressivo corrisponde al valore nullo della costante **B** che compare nelle (27), il caso stazionario ad $\mathbf{A} = \pm \mathbf{B}$; nel caso generale invece **A** differirà da $\pm \mathbf{B}$.

È interessante infine notare l'analogia della propagazione descritta

(¹) Questo caso non è che il duale (I, 10) del precedente.

con quella della luce all'incontro della superficie di separazione di due mezzi; se la superficie è perfettamente riflettente, non si ha passaggio di luce nel secondo mezzo, se è perfettamente trasparente, non si ha ritorno; nel caso più generale, si ha riflessione parziale e parziale passaggio nel secondo mezzo.

In altra occasione avremo bisogno di valerci della analogia ora constatata fra uno stato *di regime* del tipo (27) — con valori, per le grandezze complesse interessate, variabili da punto a punto — ed uno stato dipendente da grandezze complesse fisse ma propagantisi con una certa velocità finita.

11. - Distribuzione delle correnti e delle tensioni in una antenna r. t. — Le precedenti considerazioni sulle linee in regime stazionario trovano una applicazione nello studio della distribuzione delle correnti e delle tensioni nelle antenne r. t.

Riservandoci di studiare a tempo opportuno tali organi dal punto di vista delle loro funzioni negli impianti r. t., diciamo qui che essi, nel caso più semplice, possono ritenersi assimilabili ad un tratto di linea a semplice filo (il secondo filo essendo la terra oppure un conduttore di notevole estensione e grande conducibilità, detto *contrappeso*) a costanti distribuite, per il quale, specialmente per la elevatezza delle frequenze in giuoco, i valori di r e g sono trascurabili in confronto di $l\omega$ e $c\omega$ (1).

Nel caso più semplice, un'antenna r. t. si compone di un filo verticale connesso per un estremo alla terra (antenna elementare o antenna marconiana). E l'esperienza dimostra che, quantunque una tale disposizione sia alquanto diversa da quella indicata nei nn. prece., pur tuttavia si può ritenere che gli effetti di induttanza e di capacità siano uniformemente distribuiti e quindi riferibili a certi opportuni valori di l e c, induttanza e capacità per unità di lunghezza dell'antenna.

Per un tale sistema, la cui lunghezza (altezza) h è data, la condizione di reattanza nulla all'origine, cioè all'estremo connesso con la terra, condizione che potremo chiamare *di risonanza*, si verifica, come sopra stabilito, ogni qualvolta la impedenza terminale sia uguale a $-jR \operatorname{tg} ah$, e pertanto, ove l'estremo superiore sia isolato, dovrà ivi tale impedenza risultare infinita, il che esige che ah sia uguale ad un multiplo dispari di $\frac{\pi}{2}$. Ricordando il valore (30) di a, si ha che il prodotto ah vale $\omega\sqrt{hl \cdot hc}$, cioè si ha $ah = \omega\sqrt{LC}$, essendo $L = hl$, $C = hc$ la induttanza e la capacità totali dell'antenna, quali potrebbero essere valutate per corrente (rispettivamente tensione) costante in tutti i punti dell'antenna stessa. Tali valori si chiamano l'induttanza e la capacità *statiche* dell'antenna.

(1) Naturalmente, essendo questa una ipotesi approssimativa, la trattazione che segue ha carattere schematico.

Pertanto la condizione trovata si può esprimere con:

$$\omega\sqrt{LC} = (2k+1)\frac{\pi}{2} \qquad (k \text{ intero}).$$

La minima frequenza per la quale è verificata questa relazione, è quella soddisfacente alla:

$$\omega\sqrt{LC} = \frac{\pi}{2}\,; \tag{31}$$

essa si denomina la frequenza *fondamentale* (o *naturale*) dell'antenna, le altre sono i multipli dispari di questa e si chiamano la terza armonica, la quinta, ecc.

Quando ad es. l'antenna sia eccitata con la sua frequenza fondamentale, risulta nulla la d. d. p. occorrente per mantenere in essa la corrente. Questa ha un massimo di ampiezza (ventre) alla base e valore nullo (nodo) alla estremità libera, mentre per la tensione si ha un nodo alla base e un ventre all'estremità libera.

In tali condizioni la lunghezza h dell'antenna corrisponde ad un quarto della lunghezza d'onda, come si rileva agevolmente dalle considerazioni generali precedenti e del resto può facilmente verificarsi partendo dalla formola generale:

$$\lambda = \frac{2\pi}{a},$$

in quanto che, essendo nel caso attuale $ah = \frac{\pi}{2}$, risulta appunto:

$$h = \frac{\lambda}{4}.$$

La (31) differisce dall'ordinaria forma della condizione di risonanza di un circuito a costanti concentrate solo perchè nel secondo membro compare $\frac{\pi}{2}$ in luogo dell'unità. Ma la identità formale può ristabilirsi introducendo una induttanza L' e una capacità C' fittizie legate ad L e C dalle relazioni:

$$L' = \frac{2}{\pi}L\,, \quad C' = \frac{2}{\pi}C\,,$$

con che la (31) diviene:

$$\omega\sqrt{L'C'} = 1\,.$$

Tali L' e C' sono quelle che talvolta si denominano rispettivamente la induttanza e la capacità *dinamiche* dell'antenna; pertanto possiamo dire che per un'antenna marconiana eccitata con la sua frequenza naturale, la condizione di risonanza (cioè di reattanza nulla) coincide con

quella di un circuito avente una induttanza ed una capacità *concentrate* uguali alle corrispondenti induttanza e capacità dinamiche dell'antenna.

Fig. 100

Introducendo la lunghezza d'onda in luogo della pulsazione, la precedente assume l'aspetto:

$$2\pi \cdot 3 \cdot 10^8 \sqrt{L'C'} = \lambda$$

(λ metri, L' henry, C' farad)

oppure:

$$\lambda = 1885 \sqrt{L'C'}$$

(L' in μH, C' in μF).

(Cfr. la nota a pag. 64).

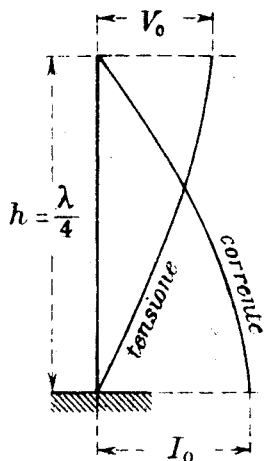
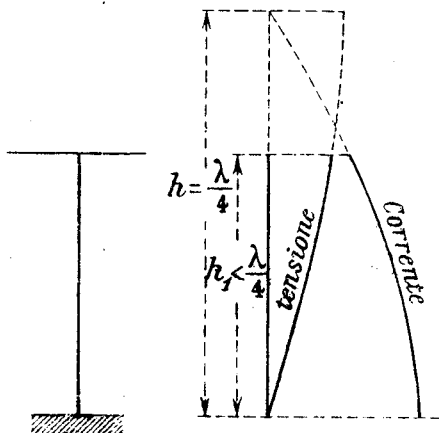
La distribuzione dei moduli (cioè dei valori massimi o dei valori efficaci) di **V** e di **I** lungo l'antenna è quella rappresentata dai due diagrammi indicati in fig. 100, ciascuno dei quali corrisponde ad un quarto di sinusoide, di cui sono indicate con V_0 ed I_0 le rispettive ordinate massime.

12. - Antenna con capacità terminale. — Valendoci di un'osservazione fatta al n. 8, possiamo asserire che il funzionamento del sistema e la distribuzione dei valori di **V** ed **I** non mutano se, ferma restando la pulsazione eccitatrice, l'antenna viene ridotta ad una altezza $h_1 < h$, purchè fra l'estremo superiore e la terra si applichi una impedenza uguale al valore che il rapporto $\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}}$ assume per $x = h_1$, cioè a $-jR\,\mathrm{tg}\,ah_1$. Siccome è $ah = \frac{\pi}{2}$, sarà $ah_1 < \frac{\pi}{2}$ e quindi $\mathrm{tg}\,ah_1 > 0$, onde la predetta impedenza deve realizzarsi mediante una capacità. Ciò corrisponde ad un dispositivo schematicamente rappresentabile come nella fig. 101 e praticamente realizzabile coi mezzi che apprenderemo a tempo opportuno.

Fig. 101

Nella stessa figura sono indicati anche i diagrammi dei moduli di **V** e di **I**, i quali corrispondono a due porzioni di sinusoidi limitate alla altezza h_1 dal suolo, e tali che l'altezza h corrispondente al quarto completo è legata alla pulsazione dalla relazione $ah = \frac{\pi}{2}$.

Anzi, dalla:

$$-\frac{j}{\omega C} = -jR \operatorname{tg} ah_1 , \quad \text{cioè} \quad RC\omega \operatorname{tg} ah_1 = 1 ,$$

si può, dato ω, e quindi $a = \omega\sqrt{lc}$, nonchè $R = \sqrt{\frac{l}{c}}$, dedurre il valore di C occorrente per un dato valore di h_1 o viceversa, come pure, dati l, c, C ed h_1, dedurre la pulsazione ω di risonanza, o la corrispondente lunghezza d'onda.

Per una tale antenna, *caricata*, come si dice, *all'estremità*, quando il valore di h_1 sia sensibilmente minore di h, la distribuzione dei valori di V corrisponde ad una legge pressochè lineare (perchè per piccoli valori di x è sen $x \backsimeq x$), mentre il valore di I è pressochè costante lungo l'antenna (perchè tale è cos x per piccoli valori di x).

Come si vede, la differenza fra questo caso ed il precedente consiste in ciò, che l'antenna attuale equivale ad una porzione (di altezza h_1) di una del tipo precedente la cui altezza h uguaglia il quarto della lunghezza d'onda corrispondente alla frequenza d'eccitazione. In altre parole, si può anche dire che, con l'aggiunta della capacità all'estremo, si realizza un *allungamento* dell'onda (diminuzione della frequenza di risonanza) rispetto a quella pertinente all'antenna semplice di pari altezza.

13. - Antenna caricata con induttanza alla base. — Per le applicazioni, è particolarmente importante esaminare altri tipi di modificazioni che è possibile apportare all'antenna semplice marconiana, allo scopo di adattarla o, come si dice, *accordarla* su una frequenza diversa da quella cui corrisponde una lunghezza d'onda pari al quadruplo dell'altezza effettiva h_1.

Essi consistono nell'inserzione di opportune impedenze alla *base*, anzichè all'estremità, che supporremo non *caricata*, cioè tale che all'estremo si abbia un nodo di corrente ($\mathbf{I}_1 = 0$ e quindi $\mathbf{Z}_1 = \infty$).

Per vedere come si possa realizzare ciò, partiamo dalla (25') e calcoliamo con tale formola il valore, che qui indicheremo con $\mathbf{Z}_0$, dell'impedenza all'origine.

Dividendo ambo i termini della frazione per $\mathbf{Z}_1$, e facendo poi tendere $\mathbf{Z}_1$ all'infinito, si ottiene:

$$\mathbf{Z}_0 = -jR \cot ah_1 ,$$

valore che sarà in generale diverso da zero, salvo il caso, dianzi esaminato e studiato, in cui è $ah_1 = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ cioè $h_1 = (2k+1)\frac{\lambda}{4}$, vale a dire in cui la frequenza di eccitazione corrisponde ad una di quelle per le quali l'antenna comprende un numero dispari di quarti di lunghezza d'onda.

Supponiamo dapprima che la lunghezza d'onda d'eccitazione $\lambda = \frac{2\pi}{a}$ sia maggiore di quella naturale ($= 4h_1$) dell'antenna. In tal caso è $ah_1 < \frac{\pi}{2}$, quindi $\mathbf{Z}_0$ è una reattanza negativa. Se dunque fra antenna e terra si interpone una reattanza positiva uguale a $-\mathbf{Z}_0 = jR \cot ah_1$, cioè si *carica* l'antenna *alla base* con una induttanza L tale che sia:

$$L\omega = R \cot ah_1 \,, \tag{32}$$

si realizza l'annullamento della impedenza totale, cioè la risonanza.

Quanto alle distribuzioni dei valori di $\mathbf{V}$ e di $\mathbf{I}$, dalle (8), posto $\mathbf{I}_1 = 0$, $x_1 - x = x'$, con che x' rappresenta la distanza del punto generico dall'estremo superiore, si ha:

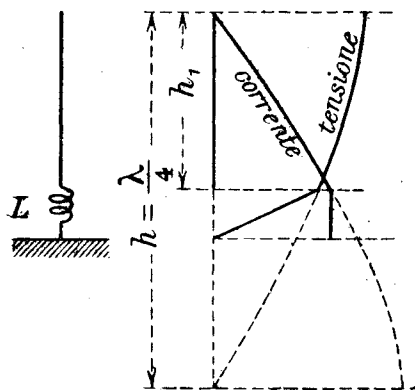
$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 \cos ax' \,, \quad jR\mathbf{I} = -\mathbf{V}_1 \operatorname{sen} ax' \,,$$

cioè, scrivendo $\frac{2\pi}{\lambda}$ al posto di a:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 \cos 2\pi \frac{x'}{\lambda} \,, \quad jR\mathbf{I} = -\mathbf{V}_1 \operatorname{sen} 2\pi \frac{x'}{\lambda} \,. \tag{33}$$

La grandezza $2\pi \frac{x'}{\lambda}$ può intendersi rappresentare la *misura angolare* dell'ascissa x' del punto considerato, a partire dall'estremo superiore, essendo la lunghezza d'onda ragguagliata all'angolo giro 2π [1]. Siccome x' varia da 0 ad h_1, tale misura angolare varia da 0 ad un valore $< \frac{\pi}{2}$, e quindi le distribuzioni predette corrispondono ad archi di sinusoidi aventi una «base» (indicata con h in fig. 102) più lunga dell'antenna effettiva, cioè si tratta di archi inferiori al quarto.

Fig. 102

Si realizza anche qui un *allungamento* dell'onda, ma la distribuzione dei valori di V e di I è ben diversa da quella del caso precedente; invero qui, per h_1 notevolmente minore di h, risulta pressochè lineare la distribuzione di I e pressochè costante quella di V. Naturalmente poi, nella induttanza L, avendo questa carattere concentrato, la corrente si man-

[1] In altri termini, la misura angolare così definita è l'angolo il cui rapporto all'angolo giro uguaglia la frazione di lunghezza d'onda rappresentata da $\frac{x'}{\lambda}$ (cfr. App., *A*, 6).

tiene costante, e la tensione cade linearmente a zero, con che il diagramma si completa come indicato in figura.

Facendo l'ipotesi che h sia notevolmente maggiore di h_1, cioè che h_1 sia trascurabile di fronte ad h, si conclude che in generale, per una linea a costanti distribuite, il tronco compreso fra un nodo di corrente ed il successivo ventre può essere sostituito con una conveniente induttanza. Nel caso in cui si tratti di eccitazione su armoniche, cosicchè la intera linea (o antenna) comprenda parecchi quarti di lunghezza d'onda, tale procedimento può attuarsi addirittura fra due nodi successivi, realizzandosi così la *soppressione* del tratto fra essi compreso, senza per questo alterare la distribuzione dei valori di V e di I negli altri tratti.

A suo tempo vedremo la utilità di un tale artificio per la realizzazione di certi tipi di antenne per altissime frequenze (onde corte).

Per un'antenna di lunghezza $< \frac{\lambda}{4}$ che, come si è visto, può essere resa risonante con l'aggiunta di una conveniente induttanza, si può dare una espressione approssimata della reattanza che risulta molto utile nelle applicazioni.

Basta pensare che, per $x < \pi$, si ha (App. A, 1):

$$x \operatorname{ctg} x = 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} - \frac{2x^6}{945} - \frac{x^8}{4725} - \dots$$

Posto $x = ah_1$ e trascurando i termini al di là del secondo (1), si può scrivere

$$\operatorname{ctg} ah_1 = \frac{1}{ah_1} - \frac{ah_1}{3},$$

e quindi, introducendo le induttanze statiche $L = lh_1$, $C = ch_1$:

$$\mathbf{Z} = -j\sqrt{\frac{L}{C}}\left(\frac{1}{\omega\sqrt{LC}} - \frac{\omega\sqrt{LC}}{3}\right) = -\frac{j}{\omega C} + j\frac{\omega L}{3}.$$

Questa formola insegna che un'antenna di lunghezza convenientemente inferiore al quarto di lunghezza d'onda può trattarsi come una reattanza costituita dalla capacità statica effettiva e da un terzo della induttanza statica effettiva.

14. - Antenna caricata con capacità alla base. — Se invece la lunghezza dell'onda eccitatrice $\lambda = \frac{2\pi}{a}$ è minore di quella naturale dell'an-

(1) Ciò equivale a valutare il secondo termine con un errore relativo espresso da $\frac{x^2}{15}$. Si osservi che per $x = 0{,}15\,\pi$, cioè per una lunghezza $h_1 = 0{,}3\lambda$, l'errore relativo nel valore di $\operatorname{ctg} x$ risulta di poco superiore all'1%.

tenna, risulta $ah_1 > \frac{\pi}{2}$, e pertanto $\mathbf{Z}_0$ corrisponde ad una reattanza positiva. Ragionando come sopra, si conclude che, caricando l'antenna alla base con una capacità C tale che sia

$$-\frac{1}{C\omega} = R \cot ah_1, \tag{34}$$

(il che è possibile perchè, essendo $ah_1 > \frac{\pi}{2}$, il secondo membro ha valore negativo) si realizza la risonanza, cioè si perviene ad un *accorciamento* dell'onda (ben inteso rispetto al valore $4h_1$).

Tale accorciamento non può però spingersi illimitatamente, giacchè, per un dato h_1, per adattare il sistema a valori di ω (e quindi di a) via via crescenti, occorrono capacità C via via più piccole; ma se si arriva a $C = 0$, cioè se si *isola* completamente l'antenna, la base diviene un nodo di corrente, e pertanto la lunghezza totale dell'antenna deve allora corrispondere ad una mezza lunghezza d'onda: ciò val quanto dire che l'accorciamento non si può spingere oltre la metà (1).

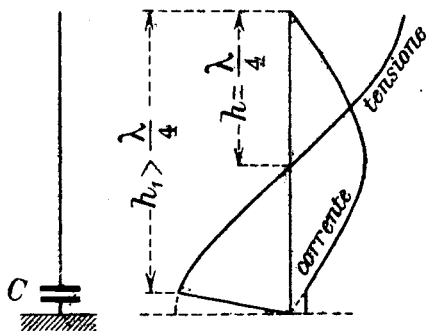



Fig. 103

Lo studio della distribuzione dei valori di V e di I può farsi con le stesse formole (33) di dianzi, ove è da osservare che, siccome nel caso attuale la misura angolare dell'antenna supera il quadrante, si perviene ad un diagramma del tipo indicato nella fig. 103. Il ventre di corrente non è più alla base dell'antenna, ma sempre dista dall'estremo superiore per un quarto della lunghezza d'onda. Attraverso la capacità di base C, avente carattere concentrato, la corrente si serba costante, e la tensione raggiunge linearmente il valore nullo.

15. - Rappresentazione grafica. — La relazione fra le induttanze L e le capacità C costituenti il carico di base ed i corrispondenti valori della

(1) A rigore, parrebbe che si dovesse dire: « ad un multiplo della mezza lunghezza d'onda ». Ma, se la variazione di C avviene in modo graduale a partire da $C = \infty$, cioè dall'antenna non caricata, e si suppone che questa in tale caso sia fatta funzionare in quarto d'onda, mano a mano che ci si avvicina a $C = 0$, le lunghezze d'onda corrispondenti alla risonanza vanno con continuità variando da $4h_1$ a $2h_1$ mentre ah_1 partendo da $\frac{\pi}{2}$ $(C = \infty)$ giunge gradualmente a π $(C = 0)$. Così, se si partisse da $\lambda = \frac{4}{3} h_1$, si giungerebbe ad h_1, e così via.

lunghezza d'onda è contenuta nelle (32) e (34), la quale ultima può scriversi sotto la forma:

$$-C\omega = \frac{1}{R} \operatorname{tg} ah_1 = \frac{1}{R} \operatorname{tg} 2\pi \frac{x_1}{\lambda}.$$

Tali relazioni possono illustrarsi graficamente osservando che, tracciati i diagrammi delle funzioni (di ω, o, se si vuole, di ah_1)

$$y = R \cot ah_1 \quad \text{rispettivamente} \quad y = \frac{1}{R} \operatorname{tg} ah_1 ,$$

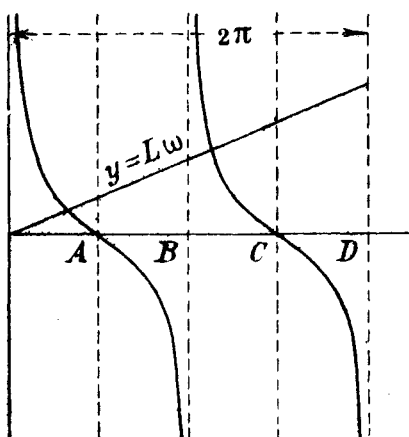
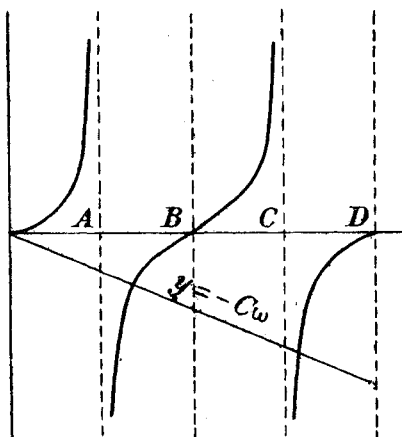



Fig. 104 Fig. 105

e le rette:

$$y = L\omega \quad \text{rispettivamente} \quad y = -C\omega ,$$

le ascisse dei punti d'incontro di quei diagrammi con queste rette corrispondono alle pulsazioni di risonanza relative ad una data L (rispettivamente C).

Dall'esame della fig. 104, dove, essendo portati in ascissa i valori di ah_1, i punti $A, B, C, D \ldots$ corrispondono ad $ah_1 = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \ldots$ cioè a $\lambda = 4h_1, \frac{4h_1}{2}, \frac{4h_1}{3}, h_1, \ldots$, si scorge che per $L = 0$ le lunghezze d'onda di risonanza sono quelle corrispondenti a $\frac{4h_1}{2k+1}$ (k intero), mentre, per valori di $L > 0$, esse sono ordinatamente maggiori di queste, e tanto più quanto maggiore è L, cioè il coefficiente angolare della retta $y = L\omega$.

Analogamente, esaminando la fig. 105 si vede che, mentre in assenza di capacità alla base, cioè per $C = \infty$, la retta $y = -C\omega$ diviene normale all'asse $ABCD \ldots$ e quindi le sue « intersezioni » col grafico della

$y = \frac{1}{R} \operatorname{tg} a h_1$ corrispondono ai punti come A, C, ..., cioè ancora a $\lambda = \frac{4h_1}{2k+1}$, quando invece la capacità aggiunta abbia un valore finito, le lunghezze d'onda di risonanza sono rispettivamente minori di quelle, e tanto più quanto minore è la inclinazione della retta $y = - C\omega$, cioè il valore di C: riducendosi ai valori $\lambda = \frac{4h_1}{2k}$ (punti B, D, ...) quando C si riduce a zero, cioè quando l'antenna sia perfettamente isolata dal suolo.

16. - Linee dissipative con estremo aperto. — Come è stato già avvertito, il regime stazionario non può verificarsi se non nel caso ideale di linea a dissipazioni nulle, e pertanto la trattazione contenuta nei nn. precc. non ha che un carattere schematico. Essa è tuttavia utilissima come una prima approssimazione atta a dare una visione qualitativa delle distribuzioni di corrente e di tensione che si verificano nelle antenne r. t. o comunque in linee a basse perdite.

Nella pratica radiotecnica la teoria generale delle linee trova applicazione essenzialmente nel caso delle antenne (reali), in quello delle condutture destinate alla loro alimentazione, in quello delle bobine percorse da corrente ad alta frequenza, e così via. Nei due ultimi casi la costante dissipativa (alludiamo qui alla r, in quanto la g è per lo più sensibilmente nulla) è quasi essenzialmente dovuta alla resistenza ohmica, nel primo caso invece ad un elemento di cui avremo occasione di occuparci studiando la propagazione, la così detta *resistenza di radiazione*. Nei casi concreti saranno dunque da applicarsi le formole generali, alle quali però si potranno in generale apportare alcune semplificazioni formali quando, come generalmente si verifica nelle applicazioni indicate, la costante dissipativa r è abbastanza piccola in confronto alla reattanza unitaria $l\omega$, e quindi la parte reale β della costante di propagazione è piccola in confronto alla parte immaginaria α.

Cominceremo collo studiare il caso di una linea aperta all'estremo opposto all'alimentazione. Sarà dunque da porre $\mathbf{I}_1 = 0$ e $\mathbf{Z}_1 = \infty$ nelle formole fondamentali. Queste allora forniscono per la tensione di entrata $\mathbf{V}_e$, la corrente d'entrata $\mathbf{I}_e$, e l'impedenza $\mathbf{Z}_e$ i valori

$$\mathbf{V}_e = \mathbf{V}_1 \operatorname{ch} \gamma x_1 , \quad \mathbf{I}_e = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{Z}_0} \operatorname{sh} \gamma x_1 , \quad \mathbf{Z}_e = \mathbf{Z}_0 \operatorname{cth} \gamma x_1 . \tag{35}$$

Per un punto generico a distanza x dall'estremo si avrà analogamente

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 \operatorname{ch} \gamma x , \quad \mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{Z}_0} \operatorname{sh} \gamma x , \quad \mathbf{Z} = \mathbf{Z}_0 \operatorname{cth} \gamma x . \tag{36}$$

Dividendo membro a membro per le precedenti si ottengono le seguenti uguaglianze

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_e \frac{\mathrm{ch}\gamma x}{\mathrm{ch}\gamma x_1}, \quad \mathbf{I} = \mathbf{I}_e \frac{\mathrm{sh}\gamma x}{\mathrm{sh}\gamma x_1}, \quad \mathbf{Z} = \mathbf{Z}_e \frac{\mathrm{cth}\gamma x}{\mathrm{cth}\gamma x_1},$$

mediante le quali si calcolano i valori di **V**, **I** e **Z** in un punto qualunque in funzione dei corrispondenti elementi d'entrata. In queste formole, occorre non dimenticarlo, le distanze x, x_1 debbono intendersi misurate a partire dall'estremo aperto.

Le distribuzioni dei valori della tensione e della corrente corrispondono dunque a quelli delle funzioni $\mathrm{ch}\gamma x$, $\mathrm{sh}\gamma x$. Quando β è abbastanza piccolo da potersi considerare come grandezze piccole di primo ordine i numeri βx (per $x \leq x_1$), si può scrivere, secondo la formola di Taylor scritta assumendo $j\alpha x$ come valore iniziale di γx:

$$\mathrm{ch}\gamma x \cong \cos \alpha x + j\beta x \operatorname{sen} \alpha x + \frac{\beta^2 x^2}{2} \cos \alpha x + \ldots,$$

$$\mathrm{sh}\gamma x \cong j \operatorname{sen} \alpha x + \beta x \cos \alpha x + j \frac{\beta^2 x^2}{2} \operatorname{sen} \alpha x + \ldots$$

Pertanto per i valori di **V** e di **I** nel punto generico di ascissa x si hanno le seguenti espressioni (approssimate a meno di termini in $\beta^2 x^2$):

$$\text{(37)} \quad \mathbf{V} \cong \mathbf{V}_1(\cos \alpha x + j\beta x \operatorname{sen} \alpha x), \quad \mathbf{I} \cong \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{Z}_0}(j \operatorname{sen} \alpha x + \beta x \cos \alpha x).$$

Quanto a $\mathbf{Z}_0$ ed al suo modulo Z_0, negli stessi limiti di approssimazione, si può ritenere

$$Z_0 = \sqrt{\frac{l}{c}}, \quad \mathbf{Z}_0 = Z_0\left(1 - j\frac{\beta}{\alpha}\right) = Z_0\left(1 - j\frac{\beta\lambda}{2\pi}\right),$$

dove il secondo termine fra parentesi risulta anch'esso un numero piccolo di primo ordine, talchè l'espressione di **I**, scrivendo $1 + j\frac{\beta}{\alpha}$ in luogo di $\frac{1}{1 - j\frac{\beta}{\alpha}}$, diviene:

$$\text{(38)} \quad \mathbf{I} \cong \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{Z}_0}\left(j \operatorname{sen} \alpha x + \frac{\beta}{\alpha} \operatorname{sen} \alpha x + \beta x \cos \alpha x\right).$$

I primi termini delle (37) e (38) corrispondono ad una distribuzione del tipo stazionario di cui l'estremo libero ($x = 0$) rappresenta un ventre di tensione ed un nodo di corrente. Ma la presenza dei termini successivi fa sì che, all'infuori dell'estremo libero, non si verificano mai i valori nulli delle ampiezze di tensione e di corrente; invero, nei punti

in cui è nullo il contributo dei termini successivi, non sono nulli i primi. Tuttavia per valori di x per i quali il prodotto βx sia abbastanza piccolo, la lieve influenza dei termini successivi fa sì che il regime è poco diverso dallo stazionario e va via via scostandosi da questo mano a mano che ci si allontana dall'estremo, e, a parità di allontanamento, tanto più rapidamente quanto maggiore è β.

La presenza dei termini successivi al primo determina anche un graduale sfasamento delle tensioni fra loro e delle correnti fra loro. Precisamente si ha che, nei nostri limiti di approssimazione, la fase (rispetto a $\mathbf{V}_1$) della tensione generica è misurata da arctg $(\beta x \operatorname{tg} \alpha x)$ e quella della corrente generica da arctg $(\beta a + \beta x \operatorname{cotg} \alpha x)$. In nessun punto la tensione sarà in quadratura con la corrente, giacchè, come sappiamo, ciò non può verificarsi che nel regime stazionario (e quindi con dissipazione nulla).

Esistono invece dei punti in cui la corrente è in fase con la tensione e quindi la impedenza $\mathbf{Z}$ è una pura resistenza. Per determinarli conviene ricorrere alla espressione (25) di $\mathbf{Z}$. Ricordando (App., A, 3) che gli argomenti di cth γx e di $\mathbf{Z}_0$ hanno per tangente rispettivamente $-\frac{\operatorname{sen} 2\alpha x}{\operatorname{sh} 2\beta x}$ e $-\frac{\beta}{\alpha}$, si ha che i punti cercati sono quelli soddisfacenti alla relazione

$$\operatorname{sen} 2\alpha x = -\frac{\beta}{\alpha} \operatorname{sh} 2\beta x .$$

Per la supposta piccolezza di βx, questa equivale sensibilmente a $\operatorname{sen} 2\alpha x = 0$, e pertanto i punti stessi sono quelli che distano dall'estremo per un multiplo qualunque del quarto di lunghezza d'onda [1].

Il modulo della tensione nel punto generico si calcola mediante la (36). Avendo presente l'espressione del modulo di chγx (App., A, formole (27)) e scrivendo βx in luogo di shβx, si trova:

$$V = V_1 \sqrt{\beta^2 x^2 + \cos^2 \alpha x} \; ; \tag{39}$$

e così per la corrente:

$$I = \frac{V_1}{Z_0} \sqrt{\beta^2 x^2 + \operatorname{sen}^2 \alpha x} \; (^2) . \tag{40}$$

Queste espressioni raggiungono dei massimi e dei minimi: precisamente, i punti di massima e minima tensione sono molto prossimi a

[1] Tenendo conto del termine trascurato, si troverebbe che i punti in discorso sono lievemente spostati dalle posizioni qui indicate.

[2] Bisogna qui intendere $Z_0 = \sqrt{\frac{l}{c}} \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}}$ per conservare in tutti i fattori lo stesso grado di approssimazione.

quelli definiti da $\cos^2 \alpha x = 1$ rispettivamente $\cos^2 \alpha x = 0$ e l'opposto avviene pei massimi e minimi della corrente. Tali punti, che chiameremo *pseudoventri* e *pseudonodi*, sono dunque successivamente distanziati di un quarto di lunghezza d'onda dall'estremo libero, e coincidono quindi con quelli in cui la corrente è in fase con la tensione. I successivi valori pseudonodali della tensione e della corrente sono proporzionali a βx, quindi variano linearmente con la distanza dall'estremo, mentre i valori pseudoventrali risultano proporzionali a $\sqrt{1 + \beta^2 x^2}$, cioè alle ordinate di una iperbole.

Le distribuzioni delle ampiezze di tensione e di corrente si presentano come ai diagrammi disegnati in fig. 106, dove con linee tratteggiate sono

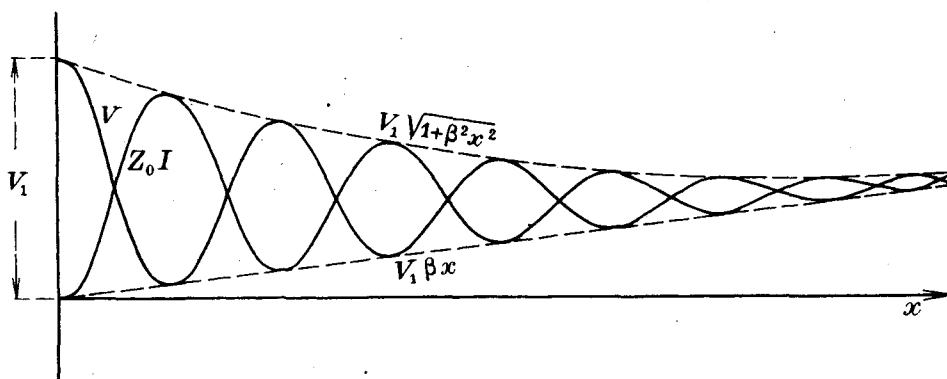



Fig. 106

indicate la retta e l'iperbole luoghi dei punti corrispondenti alle ampiezze pseudonodali e pseudoventrali. L'esame di tali diagrammi mette chiaramente in evidenza quanto sopra asserito, che cioè l'andamento delle ampiezze della tensione e della corrente va scostandosi tanto più da quello stazionario quanto più ci si allontana dall'estremo libero, e, a parità di distanza da questo, tanto meno quanto minore è β (in figura si è supposto $\beta\lambda = 10^{-3}$, cioè un'attenuazione di 10^{-3} neper per ogni lunghezza d'onda.

Non si deve dimenticare che tali diagrammi forniscono i valori delle ampiezze di corrente e di tensione, ma nulla dicono sulle loro fasi, per le quali si hanno le relazioni dianzi precisate.

Per calcolare il modulo Z dell'impedenza nel punto x, divideremo membro a membro le (39), (40) [1], ottenendo così

$$Z_0 \sqrt{\frac{\beta^2 x^2 + \cos^2 \alpha x}{\beta^2 x^2 + \operatorname{sen}^2 \alpha x}}.$$

[1] Non si può ricorrere qui allo sviluppo di Taylor, perchè, pei punti iniziali del tipo $j\alpha(2k + 1)\frac{\pi}{2}$ che qui particolarmente interessano, la funzione e le sue derivate non sono finite.

Questo modulo presenta, naturalmente, massimi e minimi nei pseudoventri e nei pseudonodi di tensione (rispettivamente pseudonodi e pseudoventri di corrente), nei quali punti, come si è visto, la **Z** si riduce ad una pura resistenza. I valori di tali resistenze si ottengono immediatamente dalla precedente facendo $\text{sen}^2\, \alpha x = 1$, $\cos^2 \alpha x = 0$ per i minimi, $\text{sen}^2\, \alpha x = 0$, $\cos^2 \alpha x = 1$ per i massimi. Siccome, nei limiti d'approssimazione in cui ci siamo posti, è lecito trascuare $\beta^2 x^2$ in confronto all'unità, questi valori risultano sensibilmente

$$Z_0 \beta x \quad \text{per} \quad x = (2k+1)\frac{\lambda}{4} \quad \text{(minimi)}, \tag{41}$$

$$\frac{Z_0}{\beta x} \quad \text{per} \quad x = 2k\frac{\lambda}{4} \quad \text{(massimi)}, \tag{42}$$

dove k rappresenta un numero intero qualunque.

L'essere **Z** una resistenza significa che un tronco di linea aperta ad un estremo, di lunghezza uguale ad un multiplo di quarti di lunghezza d'onda, equivale ad un circuito risonante (ben inteso per la frequenza cui tale lunghezza d'onda si riferisce).

Viene allora naturale di chiedere quali siano i caratteri di un tale circuito risonante ed in primo luogo se esso sia paragonabile ad un circuito tipo serie o parallelo.

La risposta è immediata, se si pensa che il carattere discriminativo di tali due tipi di circuiti consiste in ciò, che, alla frequenza di risonanza, l'impedenza è minima per il tipo serie, massima per il tipo parallelo, rispetto alle impedenze che il circuito stesso presenta fuori risonanza. Ora, siccome modificare la frequenza equivale a modificare in senso inverso la lunghezza d'onda e quindi la misura in lunghezze d'onda del tronco in esame, si conclude subito che questo equivale ad un sistema serie nel caso (41), ad un sistema parallelo nel caso (42).

Proponiamoci di calcolare, per ciascuno dei due casi, i valori della induttanza e della capacità del circuito (ordinario, a costanti concentrate) equivalente. Per raggiungere lo scopo nel modo più agevole conviene valutare il coefficiente di risonanza. A tal uopo, cominciamo col calcolare la variazione della impedenza d'entrata per una piccola variazione della frequenza d'eccitazione, o, il che fa lo stesso, per una piccola variazione della lunghezza d'onda. Differenziando la terza delle (34) ritenendo x costante e $\boldsymbol{\gamma} = \beta + j\alpha$ funzione di λ pel tramite di $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}$, con che è $\frac{d\boldsymbol{\gamma}}{d\lambda} = j\frac{d\alpha}{d\lambda} = -j\frac{\alpha}{\lambda}$, si ottiene:

$$d\mathbf{Z} = j\frac{Z_0}{\text{sh}^2 \boldsymbol{\gamma} x}\, \alpha x \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

Specificando poi per i valori (41), (42) di x che ci interessano, e sosti-

tuendo 1 e βx a chβx, shβx nello sviluppo di sh$^2\gamma x$, la precedente si riduce a

$$d\mathbf{Z} = -jZ_0 \alpha x \frac{d\lambda}{\lambda}, \quad \text{rispett.} \quad = j \frac{Z_0}{\beta^2 x^2} \alpha x \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

La variazione di $\mathbf{Z}$ è dunque una pura reattanza, ed il valore assoluto del suo rapporto all'impedenza di risonanza è, in ciascuno dei due casi,

$$\frac{\alpha}{\beta} \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{2\pi}{\beta\lambda} \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

Ora, ricordando (III, 8, formola (15')) che in un circuito semplice serie o parallelo l'analogo rapporto uguaglia il prodotto del doppio del coefficiente di risonanza per $\frac{|d\omega|}{\omega} \left(= \frac{|d\lambda|}{\lambda} \right)$, si deduce che il coefficiente di risonanza ε del tronco è:

$$\varepsilon = \frac{\pi}{\beta\lambda}.$$

Si può dunque dire che il tronco considerato si comporta come un circuito di decremento uguale all'importo dell'attenuazione per una lunghezza d'onda.

Ricordando poi che è $\alpha = \omega \sqrt{lc} = \frac{2\pi}{\lambda}$, all'espressione di ε si possono anche dare le forme seguenti:

$$\varepsilon = \frac{\alpha}{2\beta} = \frac{l\omega}{r} = \frac{\alpha^2}{rc\omega}.$$

È particolarmente notevole il fatto che il valore trovato per ε è indipendente dal numero di quarti di lunghezza d'onda di cui il tronco è costituito, e vale tanto pel caso di equivalenza a sistema serie (numero dispari di quarti) quanto parallelo (numero pari di quarti).

Calcolato ε, è molto facile determinare i valori di L e C che insieme con la resistenza (41) o (42) completano il circuito equivalente. Basta ricordare le relazioni

$$L = \frac{R\varepsilon}{\omega}, \quad C = \frac{1}{R\varepsilon\omega} \quad \text{e} \quad C = \frac{G\varepsilon}{\omega}, \quad L = \frac{1}{G\varepsilon\omega}$$

valevoli pei casi (41) e (42) rispettivamente. Nel primo caso sarà da porre $R = Z_0 \beta x$, nel secondo $G = \frac{\beta x}{Z_0}$ con $x = k\frac{\lambda}{4}$, essendo k un intero dispari, rispettivamente pari.

Si trova così (distinguiamo con gli indici s, p i casi serie e parallelo): pel caso (41):

$$R_s = \frac{R_t}{2}, \quad L_s = \frac{L_t}{2}, \quad C_s = \frac{4}{(k\pi)^2} \frac{C_t}{2} = \frac{C_t}{2\theta^2} \quad (k \text{ dispari});$$

pel caso (42):

$$G_p = \frac{R_t}{2} \frac{c}{l} = \frac{R_t}{2Z_0^2}, \quad C_p = \frac{C_t}{2}, \quad L_p = \frac{4}{(k\pi)^2} \cdot \frac{L_t}{2} = \frac{L_t}{2\theta^2} \quad (k \text{ pari}),$$

dove $R_t = rx$, $C_t = cx$, $L_t = lx$ rappresentano quelle che si potrebbero chiamare la resistenza, induttanza, capacità « statiche » del tronco, e $\theta = \frac{k\pi}{4}$ è la metà della « misura angolare » del tronco stesso.

Avremo occasione di ritornare successivamente su queste espressioni per metterne in luce alcuni significati energetici. Intanto qui osserviamo che all'elemento dissipativo G_p del sistema parallelo equivalente ad un tronco composto con un numero intero di mezze lunghezze d'onda si può dare un aspetto particolarmente espressivo, trasformando il sistema stesso in uno a due rami contenenti l'uno la C, l'altro la L sopra calcolate, accompagnate da resistenze in serie. Il valore complessivo R_p' di queste, da calcolarsi mediante la $R_p' = \frac{GL}{C}$, risulta

$$R_p' = \frac{R_t}{2\theta^2}.$$

Per es. un tronco costituito dal conduttore coassiale del tipo studiato a pag. 208, funzionante in quarto d'onda sulla frequenza di 10 MHz ($\omega = 6{,}28 \cdot 10^7$, $\lambda = 30$ m) e quindi della lunghezza di 7,50 m, aperto ad una estremità, risulta equivalente ad un circuito R, L, C serie con $R = 7{,}75 \cdot 10^{-4}\Omega$, $L = 0{,}96\ \mu$H, $C = 264\ \mu\mu$F, il cui coefficiente di risonanza è circa 7800. Un analogo tronco della lunghezza di 15 m si comporta invece come un circuito parallelo avente lo stesso coefficiente di risonanza, con $G = 0{,}26 \cdot 10^{-6}$S; $C = 340\ \mu\mu$F, $L = 1{,}16\ \mu$H. E per tronchi di lunghezza multipla qualunque di 7,5 m si avrebbe equivalenza a circuiti serie (multipli dispari) o parallelo (multipli pari) sempre con $\varepsilon = 7800$. Variando la frequenza e conseguentemente le lunghezze dei tronchi, il coefficiente di risonanza varia pure, e precisamente in modo proporzionale alla radice quadrata della frequenza. Così per una frequenza di 40 MHz un tronco dello stesso conduttore concentrico lungo 1,75 m si comporterebbe come un circuito risonante serie con $\varepsilon = 15600$.

Queste possibilità di realizzazione di sistemi equivalenti a circuiti ad alto coefficiente di risonanza mediante tronchi di linea a basse perdite sono del più alto interesse pratico, in quanto che con gli ordinari circuiti a costanti concentrate, se le frequenze sono dell'ordine di alcuni MHz, raramente i valori di ε superano poche centinaia, e se si arriva ad alcune decine di MHz, i massimi valori di ε raggiungibili scendono al di sotto del centinaio, mentre qui, come si è or ora osservato, il coefficiente di risonanza, per un dato tipo di conduttore, aumenta con la frequenza.

Gli esatti valori dei successivi massimi e minimi d'impedenza sono

$$Z_0 \text{cth}\left(\beta x + j2\pi\frac{x}{\lambda}\right) \quad \text{con } x \text{ multiplo di } \frac{\lambda}{4},$$

cioè, avendo presenti le formole (29) di App., A, 3:

$$Z_0 \text{th}\frac{\beta\lambda}{4}, \quad Z_0 \text{cth}\frac{\beta\lambda}{2}, \quad Z_0 \text{th}\beta\frac{3\lambda}{4}, \quad Z_0 \text{ cth}\,\beta\lambda, \dots .$$

e si può osservare che la media geometrica di due consecutivi di tali valori non uguaglia Z_0, ma s'avvicina tanto più a Z_0 quanto più ci si allontana dall'estremo libero, mentre gli stessi valori dei massimi e minimi vanno via via avvicinandosi tra loro.

Giova considerare anche i successivi valori delle ampiezze di tensione e di corrente ai pseudonodi ed ai pseudoventri. Essi sono:

per le tensioni

$$V_1 \text{ (ventre)}, \ V_1 \text{sh}\frac{\beta\lambda}{4} \text{ (nodo)}, \ V_1 \text{ch}\frac{\beta\lambda}{2} \text{ (ventre)}, \ V_1 \text{sh}\frac{3\beta\lambda}{4} \text{(nodo), ecc.},$$

per le correnti

$$0 \text{ (nodo)}, \ \frac{V_1}{Z_0}\text{ch}\frac{\beta\lambda}{4} \text{ (ventre)}, \ \frac{V_1}{Z_0}\text{sh}\frac{\beta\lambda}{2} \text{ (nodo)}, \ \frac{V_1}{Z_0}\text{ch}\frac{3\beta\lambda}{4} \text{ (ventre), ecc.}$$

Si può così osservare che il rapporto fra una tensione pseudoventrale e la corrente pseudoventrale successiva uguaglia sensibilmente l'impedenza caratteristica; invero tali rapporti valgono

$$Z_0 \text{ch}\frac{\beta\lambda}{4} = Z_0\left(1 + \frac{\beta^2\lambda^2}{32} + \dots\right),$$

$$Z_0 \frac{\text{ch}\beta\frac{\lambda}{2}}{\text{ch}\beta\frac{3\lambda}{4}} = Z_0 \frac{1 + \frac{\beta^2\lambda^2}{8} + \dots}{1 + \frac{9\beta^2\lambda^2}{32} + \dots} \cong Z_0\left(1 - \frac{5}{32}\beta^2\lambda^2 + \dots\right), \text{ ecc.}$$

Tutte queste deduzioni ed espressioni valgono in generale e quindi anche per valori non troppo piccoli di β [1]; mano a mano che cresce β o, il che equivale, mano a mano che ci si allontana dall'estremo libero, i massimi e minimi delle correnti tendono ad avvicinarsi fra loro, e così dicasi per quelli di tensione e di impedenza. Ciò è del resto fisicamente evidente quando si pensi che il regime elettrico in ogni punto della linea

[1] Però, col crescere di β, i punti pseudonodali e pseudoventrali si allontanano da quelli corrispondenti ai multipli di $\frac{\lambda}{4}$.

è dovuto alla sovrapposizione di due distribuzioni, l'una diretta e l'altra riflessa, entrambe attenuate a partire dalla propria origine, e pertanto il contributo dell'onda riflessa riesce tanto meno importante quanto più lontano dall'estremo libero (punto di riflessione) è il punto che si considera, e quanto maggiore è il fattore d'attenuazione, talchè per elevati valori di βx (punti lontani o β elevato) la distribuzione non differisce sensibilmente da una in regime progressivo.

Fuori dei punti pseudonodali e pseudoventrali, l'impedenza d'entrata è in generale composta di resistenza e reattanza. Il suo valore complesso può facilmente ottenersi dalla terza delle (36) applicando lo sviluppo di Taylor alla $\mathrm{cth}\gamma x$, il che è lecito perchè in punti diversi dai pseudonodi di corrente, la $\mathrm{ctg}\alpha x$ è finita. Si trova così, arrestando lo sviluppo ai termini in $\beta^2 x^2$:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_0 \left[-j \operatorname{cotg} \alpha x \left(1 - \frac{\beta^2 x^2}{\operatorname{sen}^2 x}\right) + \frac{\beta x}{\operatorname{sen}^2 \alpha x} \right] \quad (\text{per } \alpha x \neq k\pi).$$

Come si vede, la reattanza ha carattere capacitivo per un tronco inferiore a un quarto di lunghezza d'onda, oppure compreso fra $2\frac{\lambda}{4}$ e $3\frac{\lambda}{4}$, ecc., magnetico per $\frac{\lambda}{4} < x < \frac{\lambda}{2}$, oppure $\frac{3\lambda}{4} < x < \lambda$, ecc. Essa ha cioè gli stessi caratteri che avevamo riscontrato nel caso del regime stazionario.

17. - Linee dissipative con estremo cortocircuitato. - Lo studio, fatto nel n. prec., di una linea aperta ad un estremo, è di particolare interesse in Radiotecnica, sopratutto per la sua immediata applicazione al caso delle antenne.

Considerazioni del tutto analoghe si possono svolgere nel caso (duale) di linea cortocircuitata all'estremo. Le formole fondamentali per questo caso sono le

$$(43) \qquad \mathbf{V}_e = \mathbf{Z}_0 \mathbf{I}_u \mathrm{sh}\gamma x_1\,, \quad \mathbf{I}_e = \mathbf{I}_u \mathrm{ch}\gamma x_1\,, \quad \mathbf{Z}_e = \mathbf{Z}_0 \mathrm{th}\gamma x_1\,,$$

che si deducono dalle (35) scambiando la corrente con la tensione e le impedenze $\mathbf{Z}_0$, $\mathbf{Z}_e$ con le ammettenze $\frac{1}{\mathbf{Z}_0}$, $\frac{1}{\mathbf{Z}_e}$. Pertanto tutte le conseguenze dedotte nel caso precedente si potranno applicare al caso attuale con le modificazioni dettate dalla legge di dualità. In particolare avremo che in una linea cortocircuitata le distribuzioni dei moduli delle tensioni e delle correnti corrispondono a quelle schematizzate in fig. 106 per le correnti e le tensioni; si avranno i pseudonodi di corrente (tensione) in corrispondenza dei precedenti pseudoventri di corrente (tensione) e viceversa; l'impedenza d'entrata ha carattere di pura resistenza per lun-

ghezze prossime ai multipli $k\frac{\lambda}{4}$ del quarto di lunghezza d'onda, ed i tronchi così limitati si comportano come circuiti serie per k pari, parallelo per k dispari. Dato il suo carattere autoduale, rimane invariata l'espressione del comune coefficiente di risonanza, mentre, per gli elementi del circuito equivalente, le espressioni (41) e (42) dovranno riferirsi la prima a k pari, la seconda a k dispari. L'impedenza d'entrata nel punto generico presenta reattanza magnetica per $2k\frac{\lambda}{4} < x < (2k+1)\frac{\lambda}{4}$, capacitiva per $(2k+1)\frac{\lambda}{4} < x < 2k\frac{\lambda}{4}$, e così via.

18. - Linee dissipative chiuse comunque. — I precedenti casi di linea aperta o chiusa in corto circuito non sono che casi particolari della chiusura su una impedenza qualunque $\mathbf{Z}_u$, diversa, ben inteso, dall'impedenza caratteristica. In tal caso le distribuzioni di corrente e di tensione potranno sempre pensarsi (n. 4) ottenute sovrapponendo due distribuzioni dei tipi semplici considerati, e precisamente, dette $\mathbf{V}_u$ ed $\mathbf{I}_u$ la tensione e la corrente al termine, fra loro legate dalla relazione $\mathbf{V}_u = \mathbf{Z}_u\mathbf{I}_u$, le distribuzioni componenti saranno l'una del tipo ad estremo aperto con tensione terminale $\mathbf{V}_u$, l'altra del tipo ad estremo cortocircuitato, con corrente terminale $\mathbf{I}_u$.

Non è privo di interesse notare che, introducendo l'indice di riflessione $\boldsymbol{\theta}$ definito a pag. 202, si possono pel caso generale assegnare espressioni della tensione, corrente e impedenza formalmente analoghe a quelle relative al caso della linea cortocircuitata. Basta invero, nelle formole fondamentali

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_u \mathrm{ch}\gamma x + \mathbf{Z}_0\mathbf{I}_u \mathrm{sh}\gamma x\,,$$

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_u}{\mathbf{Z}_0}\mathrm{sh}\gamma x + \mathbf{I}_u \mathrm{ch}\gamma x\,,$$

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_0\frac{\mathbf{Z}_u \mathrm{ch}\gamma x + \mathbf{Z}_0 \mathrm{sh}\gamma x}{\mathbf{Z}_u \mathrm{sh}\gamma x + \mathbf{Z}_0 \mathrm{ch}\gamma x}\,,$$

sostituire $\mathbf{Z}_0\mathrm{th}\boldsymbol{\theta}$ a $\mathbf{Z}_u$. Si ottiene così

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{V}_u}{\mathrm{sh}\boldsymbol{\theta}}\mathrm{sh}(\gamma x + \boldsymbol{\theta}) = \frac{\mathrm{ch}\boldsymbol{\theta}}{\mathbf{I}_u\mathbf{Z}_0}\mathrm{sh}(\gamma x + \boldsymbol{\theta})\,,\quad \mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_u}{\mathbf{Z}_0\mathrm{sh}\boldsymbol{\theta}}\mathrm{ch}(\gamma x + \boldsymbol{\theta}) = \frac{\mathbf{I}_u}{\mathrm{ch}\boldsymbol{\theta}}\mathrm{ch}(\gamma x + \boldsymbol{\theta})\,,\quad \mathbf{Z} = \mathbf{Z}_0\mathrm{th}(\gamma x + \boldsymbol{\theta})\,. \tag{44}$$

La chiusura in corto circuito corrisponde a $\boldsymbol{\theta} = jk\pi$, la linea aperta si ha per $\boldsymbol{\theta} = j(2k+1)\frac{\pi}{2}$, alla chiusura sull'impedenza caratteristica corrisponde $\boldsymbol{\theta} = \infty$; per un valore generico $\boldsymbol{\theta} = \mu + j\nu$ dell'indice di riflessione, il modulo dell'impedenza $\mathbf{Z}$ vale (cfr. App., A, 3, terza delle (27)):

$$Z = Z_0\sqrt{\frac{\mathrm{sh}^2(\beta x + \mu) + \mathrm{sen}^2\,(\alpha x + \nu)}{\mathrm{sh}^2(\beta x + \mu) + \cos^2\,(\alpha x + \nu)}}\,.$$

Se, come il solito, supponiamo β abbastanza piccolo, i termini in $\mathrm{sh}^2(\beta x + \mu)$ si possono ritenere costanti lungo la linea e pertanto l'impedenza passa per successivi massimi e minimi nei punti definiti da $\mathrm{sen}^2\,(\alpha x + \nu) = 1$, rispettivamente $\cos^2\,(\alpha x + \nu) = 1$.

Come nei casi elementari già trattati, tali massimi e minimi sono distanziati di un quarto di lunghezza d'onda, ed i massimi sono tanto meno diversi dai minimi quanto maggiore è $\mathrm{sh}^2(\beta x + \mu)$, cioè quanto più ci si allontana dal punto di riflessione e quanto maggiore è l'indice di riflessione. Col crescere indefinito di questo, la distribuzione riflessa tende a mancare e quindi l'impedenza **Z** tende a divenire costante.

Per una linea di lunghezza fissata, l'impedenza d'entrata varia, al variare della frequenza d'eccitazione, con legge analoga alla precedente, raggiungendo dei massimi e dei minimi per le frequenze per le quali è $\mathrm{sen}^2\,(\alpha x + \nu) = 1$ rispettivamente $\cos^2\,(\alpha x + \nu) = 1$. Due consecutive di tali frequenze sono tali che per una di esse la linea contiene un quarto di lunghezza d'onda in più che per l'altra; e così le due frequenze relative a due consecutivi massimi sono caratterizzate da analoga differenza di mezza lunghezza d'onda. Questa semplice osservazione suggerisce un metodo relativamente semplice per determinare l'ubicazione del punto di riflessione, qualora sia nota la velocità di propagazione v e viceversa. Operando invero a distanza x da esso, con pulsazione variabile, sia ω_1 una pulsazione cui corrisponde un massimo di **Z** ed ω_2 quella relativa al massimo successivo. Sarà

$$\alpha_1 x + \nu = \alpha_2 x + \nu + \pi\,,$$

essendo

$$\alpha_1 = \frac{\omega_1}{v}\,, \quad \alpha_2 = \frac{\omega_2}{v}\,,$$

se, come avviene nelle linee a piccola perdita, la velocità di propagazione si può ritenere indipendente dalla frequenza. Dalle precedenti si deduce subito

$$x = \frac{\pi v}{\omega_1 - \omega_2}\,,$$

che consente di calcolare x non appena sia nota la velocità di propagazione v e viceversa.

Analogamente, operando a frequenza costante, si può invece calcolare questa rilevando la distanza fra due punti successivi di massimo di impedenza. Invero tale distanza corrisponde a $\frac{\lambda}{2}$, cioè a $\frac{\pi v}{\omega}$ (fili di Lecher).

19. - Quadripolo equivalente a una linea. - Determinazione di Z_0 e γ. — Da quanto esposto nel principio di questo capitolo, risulta chiaro che una linea di data lunghezza x_1 e di data costituzione, nei riguardi delle

operazioni eseguite ai suoi estremi, equivale sempre ad un ben determinato quadripolo simmetrico, precisamente quello la cui impedenza caratteristica coincide con la impedenza caratteristica della linea, ed il cui esponente di trasduzione uguaglia il prodotto γx_1 della lunghezza x_1 per la costante di propagazione γ della linea stessa.

Il T equivalente ad una tale linea è definito dai valori

$$\mathbf{Z}_1 = 2\mathbf{Z}_0 \operatorname{th} \frac{\gamma x_1}{2}, \quad \mathbf{Z}_2 = \frac{\mathbf{Z}_0}{\operatorname{sh}\gamma x_1}$$

dell'impedenza longitudinale $2\frac{\mathbf{Z}_1}{2}$ e trasversale $\mathbf{Z}_2$; analogamente le impedenze costitutive del Π equivalente valgono:

$$\mathbf{Z}_a = \frac{\mathbf{Z}_0}{2} \operatorname{cth} \frac{\gamma x_1}{2}, \quad \mathbf{Z}_b = \mathbf{Z}_0 \operatorname{sh}\gamma x_1 .$$

Ovviamente, per x_1 piccolissimo, $\mathbf{Z}_1$ e $\mathbf{Z}_b$ equivalgono sensibilmente a $\mathbf{z}x_1$, e $\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{Z}_a$ a $\frac{1}{\mathbf{y}x_1}$, cioè il quadripolo equivalente si compone con gli stessi elementi che costituiscono l'impedenza longitudinale e l'ammettenza trasversale *totali* del (piccolissimo) tronco, ma per x_1 qualunque, il quadripolo equivalente non è da confondersi col così detto T (o Π) *nominale*, cioè col quadripolo definito dai valori $\mathbf{z}x_1$ e $\frac{1}{\mathbf{y}x_1}$ delle impedenze longitudinale e trasversale.

Un tronco di linea di lunghezza determinata può sempre, come un quadripolo qualunque, considerarsi un organo trasformatore di impedenza, e precisamente secondo la legge

$$\mathbf{Z}_e = \mathbf{Z}_0 \frac{\mathbf{Z}_u \operatorname{ch}\gamma x_1 + \mathbf{Z}_0 \operatorname{sh}\gamma x_1}{\mathbf{Z}_u \operatorname{sh}\gamma x_1 + \mathbf{Z}_0 \operatorname{ch}\gamma x_1}$$

Sotto questo punto di vista, presentano particolare interesse quelle linee mediante le quali è possibile trasformare resistenze in resistenze. Affinchè $\mathbf{Z}_u$ e $\mathbf{Z}_e$ abbiano entrambi valori reali che indicheremo con R_u, R_e, dalla precedente si deduce che deve sussistere la relazione

$$\mathbf{Z}_0(R_e - R_u)\operatorname{ch}\gamma x_1 = (\mathbf{Z}_0^2 - R_e R_u)\operatorname{sh}\gamma x_1 . \tag{45}$$

Questa non può essere soddisfatta da una linea qualunque; possiamo anzi soggiungere che se una tale relazione sussiste per due distinte coppie R_e, R_u; R'_e, R'_u, non potendo essere simultaneamente nulli $\operatorname{ch}\gamma x_1$, $\operatorname{sh}\gamma x_1$, dovrà essere:

$$(R_e - R_u)(\mathbf{Z}_0^2 - R'_e R'_u) = (R'_e - R'_u)(\mathbf{Z}_0^2 - R_e R_u) ,$$

da cui si deduce per $\mathbf{Z}_0^2$ un valore reale (necessariamente positivo [1])). Quindi $\mathbf{Z}_0$ stessa è reale, dopo di che dalla (43) si deduce che tale è anche thγx_1. Allora γx_1 deve essere della forma $\beta x_1 + jk\frac{\pi}{2}$, cioè la linea deve contenere un numero intero di quarti di lunghezza d'onda. In particolare, se si suppone $\beta = 0$, la precedente diviene

$$R_e = \frac{R_0^2}{R_u} \quad \text{oppure} \quad R_e = R_u\,,$$

secondo che la lunghezza della linea equivale ad un multiplo dispari o pari di $\frac{\lambda}{4}$.

Si conclude dunque che, per trasformare una resistenza in un'altra resistenza diversa, basta utilizzare una linea non dissipativa di lunghezza multipla dispari di $\frac{\lambda}{4}$ avente resistenza caratteristica uguale alla media geometrica delle due resistenze. Ed inoltre si può affermare che una qualunque linea non dissipativa comprendente un numero intero di mezze lunghezze d'onda è atta a trasformare una resistenza qualunque in altra uguale.

La determinazione delle costanti fondamentali $\mathbf{Z}_0$ e γ di una linea di data lunghezza può, come per un qualunque quadripolo, effettuarsi mediante operazioni eseguite dall'esterno. Basta all'uopo determinare l'impedenza a vuoto $\mathbf{Z}_v$ e quella di cortocircuito $\mathbf{Z}_c$, cioè le impedenze d'entrata della linea aperta e cortocircuitata. Dalle relazioni:

$$\mathbf{Z}_v = \mathbf{Z}_0 \mathrm{cth}\gamma x_1\,, \quad \mathbf{Z}_c = \mathbf{Z}_0 \mathrm{th}\gamma x_1\,,$$

si deduce

$$\mathbf{Z}_0^2 = \mathbf{Z}_v \mathbf{Z}_c\,, \quad \mathrm{th}^2\gamma x_1 = \frac{\mathbf{Z}_c}{\mathbf{Z}_v}\,.$$

È bene osservare che, operando in tal modo, nota la lunghezza x_1, la parte reale β di γ riesce univocamente determinata, ma la parte immaginaria α lo è soltanto a meno di multipli di $\frac{\pi}{\lambda}$. Per precisarla senza ambiguità bisognerebbe, tenendo presente la relazione $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}$, conoscere un valore — anche approssimato — della velocità v, dopo di che, essendo nota la frequenza, α riesce perfettamente determinata. Una valutazione grossolana di v può in generale farsi utilizzando i valori — sempre approssimativamente noti — delle costanti primarie, oppure per via

[1]) Essendo l, c diversi da zero, l'impedenza caratteristica non può ridursi ad una pura reattanza.

sperimentale mediante il procedimento indicato al n. prec., secondo il quale basta operare a pulsazione variabile e procurarsi due successivi valori $\frac{\omega_1}{2\pi}, \frac{\omega_2}{2\pi}$ della frequenza per i quali risulta massima l'impedenza Z_v (oppure la Z_c).

Ad es., per un tronco di linea telefonica di 8 km, si siano rilevati, con $\omega = 5000$ sec^{-1}, i seguenti valori

$$Z_v = 2000\,\Omega\,, \quad \varphi_v = 70^\circ\,, \quad Z_c = 1300\,\Omega\,, \quad \varphi_c = -75^\circ\,,$$

dove φ_v, φ_c rappresentano gli argomenti di $\mathbf{Z}_v$ e $\mathbf{Z}_c$; e si sappia che la velocità v è di circa 16000 km/sec (quindi $a \cong 0{,}312$ rad/km).

Gli elementi Z_0 e φ_0 dell'impedenza caratteristica risultano

$$Z_0 = 1610\,\Omega\,, \quad \varphi_0 = -2^\circ 30'\,, \quad \text{quindi} \quad \mathbf{Z}_0 = 1610 - j\,69{,}4\,;$$

e per la $\text{th}\gamma x_1$ si ha:

$$\text{th}\gamma x_1 = \sqrt{0{,}65}\,(\cos 72^\circ 30' - j \,\text{sen}\, 72^\circ 30') = 0{,}242 - j\,0{,}770\,,$$

da cui, utilizzando le formole (28) di App., *A*, 3:

$$\text{th}\,2\beta x_1 = \frac{2 \cdot 0{,}242}{1 + 0{,}65} = 0{,}293\,, \quad \text{tg}\,2a x_1 = -\frac{0{,}77}{1 - 0{,}65} = -2{,}2\,,$$

cioè:

$$2\beta x_1 = 0{,}301\,, \quad 2a x_1 = -1{,}14 + k\pi \;(\text{radianti})\,.$$

Dalla prima si ricava subito $\beta = 0{,}0188$ neper/km, e dalla seconda, sapendo che $2ax_1$ deve risultare prossimo a $2 \cdot 0{,}312 \cdot 8 = 5$, si deduce $k = 2$ e quindi $2ax_1 = 5{,}14$ da cui $a = 0{,}321$ rad/km.

20. - Relazioni energetiche. — Vogliamo ora dedicarci più particolarmente allo studio delle relazioni energetiche che accompagnano il funzionamento di una linea a costanti distribuite.

Per maggiore chiarezza, cominceremo coll'esame del regime stazionario propriamente detto, per il cui verificarsi, come sappiamo, è necessario che siano rigorosamente nulle le costanti dissipative.

Consideriamo un tronco comprendente una o più mezze lunghezze d'onda. Se ad es. l'origine è un nodo di corrente ed ivi la tensione vale $\mathbf{V}_1$, i valori di $\mathbf{V}$ e di $\mathbf{I}$ all'ascissa generica x sono

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 \cos ax\,, \quad \mathbf{I} = \mathbf{I}_1 \,\text{sen}\, ax,$$

dove $\mathbf{I}_1$ rappresenta la corrente ventrale. Il modulo di questa uguaglia il rapporto della tensione all'impedenza caratteristica

$$R_0 = \sqrt{\frac{l}{c}}\,,$$

cioè si ha:

$$lI_1^2 = cV_1^2; \tag{46}$$

e quanto alla fase, essa è in quadratura con $\mathbf{V}_1$, cioè si ha anche:

$$R_0\mathbf{I}_1 = j\mathbf{V}_1 .$$

Esplicitiamo i valori istantanei v ed i della tensione e della corrente nel punto generico:

$$v = V_1 \cos ax \operatorname{sen} \omega t , \quad i = I_1 \operatorname{sen} ax \cos \omega t ,$$

ed andiamo a calcolare le quantità di energia elettrica dW_e e magnetica dW_m che si trovano accumulate nel tratto compreso fra le ascisse x ed $x + dx$. Essendo cdx e ldx la capacità e l'induttanza di tale tratto, sarà

$$\begin{aligned} 2dW_e &= cdx \cdot v^2 = cV_1^2dx \cdot \cos^2 ax \operatorname{sen}^2\omega t , \\ 2dW_m &= ldx \cdot i^2 = lI_1^2dx \cdot \operatorname{sen}^2 ax \cos^2 \omega t . \end{aligned}$$

Per un dato valore di x, il valore medio della somma $dW_e + dW_m$ durante un qualunque semiperiodo vale

$$\frac{dx}{4} (cV_1^2 \cos^2 ax + lI_1^2 \operatorname{sen}^2 ax) ,$$

perchè i valori medi di $\operatorname{sen}^2 \omega t$ e di $\cos^2 \omega t$, durante un semiperiodo qualunque [1], valgono entrambi $\frac{1}{2}$. E, siccome, in virtù della (46), la somma dei due termini fra parentesi vale $cV_1^2 = lI_1^2$, si può affermare che, nell'intervallo di tempo predetto, il valore medio della somma dell'energia elettrica e magnetica accumulate in qualunque tratto dx della linea è costante. Durante l'intervallo stesso, l'una cresce e l'altra diminuisce, con perfetto compenso fra le due. In sostanza questo fatto è implicito in ciò, che, come fu osservato, l'impedenza in ogni punto è una pura reattanza, ed il comportamento or ora rilevato è appunto quello di una reattanza qualsivoglia (Cfr. El., VIII, 19).

Quel che c'è di notevole nel caso attuale si è che, per la simmetria delle precedenti relazioni rispetto alla variabile temporale ωt ed alla va-

---

[1] Essendo

$$\operatorname{sen}^2 \omega t = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\omega t) , \quad \cos^2 \omega t = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\omega t) ,$$

si può anche asserire che valgono $\frac{1}{2}$ anche i valori medi estesi ad un solo quarto di periodo purchè questo sia scelto opportunamente, ad es. fra $\omega t = 0$ e $\omega t = \frac{\pi}{2}$, cioè si tratti del quarto di periodo in cui la tensione va crescendo in valore assoluto da zero al massimo mentre la corrente decresce, o viceversa.

riabile locale ax, ad analoga conclusione si può pervenire considerando, *per ogni determinato istante*, un tronco comprendente un multiplo qualunque di mezze lunghezze d'onda. Si ha cioè che la quantità di energia immagazzinata nel sistema lungo un tratto siffatto, in un istante qualunque, è costantemente la stessa, e precisamente tenendo presente che è $\int_0^{\frac{\lambda}{2}} \text{sen}^2\, ax dx = \frac{\lambda}{4}$, essa vale

$$\frac{\lambda}{8}\, cV_1^2\, \text{sen}^2\, \omega t + \frac{\lambda}{8}\, lI_1^2 \cos^2 \omega t = \frac{\lambda}{8}\, cV_1^2 = \frac{\lambda}{8}\, lI_1^2\, .$$

Durante un certo quarto di periodo, l'energia elettrica aumenta a scapito della magnetica, nel successivo quarto avviene l'opposto, conservandosi costante la somma delle due. Si può anzi ulteriormente precisare che, mentre tale costanza può essere senz'altro asserita per un tronco *qualunque* di lunghezza $\frac{\lambda}{2}$, essa si verifica anche per un tronco di soli $\frac{\lambda}{4}$ (o multiplo dispari di tale lunghezza) purchè esso sia quello compreso fra un nodo e un ventre di corrente (o di tensione), come facilmente si rileva tenendo presente una precedente osservazione (nota di pag. prec.).

Dunque, in regime stazionario, un tronco di lunghezza $\frac{\lambda}{2}$ nulla richiede all'esterno per mantenersi in oscillazione. Pertanto, caricando un estremo con una resistenza o più generalmente con una impedenza, all'altro estremo si dovrà fornire potenza secondo un diagramma temporale identico a quello richiesto dal carico. In particolare il generatore dovrà fornire la stessa potenza attiva e reattiva che il carico richiederebbe qualora fosse direttamente connesso col generatore.

Altrettanto avviene nel caso di un tronco di lunghezza $\frac{\lambda}{4}$ limitato ad es. fra un ventre di corrente e il successivo nodo: un tale tronco nulla richiede all'esterno per il proprio funzionamento in regime stazionario. Se lo si carica al nodo di corrente, dove la tensione è V_1, con una resistenza R, occorrerà immettere all'altro estremo la stessa potenza che così viene richiesta dal carico. In tal caso si avrà anche un funzionamento di tipo trasformatorico. Invero, il funzionamento in tali condizioni può intendersi dovuto alla coesistenza di due regimi stazionari, l'uno con estremo aperto (nodo di corrente) a tensione terminale V_1 e quindi con corrente $\frac{V_1}{R_0}$ all'origine, l'altro con estremo cortocircuitato (ventre di corrente) con corrente $I_1 = \frac{V_1}{R}$ e quindi con tensione $R_0 I_1$ all'origine. Si ha

dunque al carico tensione V_1 e corrente I_1, all'origine tensione $\frac{R_0}{R} V_1$ e corrente $\frac{R}{R_0} I_1$; il sistema dunque funziona come un trasformatore perfetto avente il rapporto $\frac{R_0}{R}$; in particolare fra la resistenza di carico R e quella d'entrata R_e sussiste la relazione

$$RR_e = R_0^2 ,$$

che già avevamo segnalato al n. prec.

Ma, all'infuori di questi casi eccezionali, il fabbisogno energetico istantaneo per alimentare un dato carico di estremità, non risulta uguale a quello richiesto dal carico. Basta pensare che, in regime stazionario, una linea di lunghezza diversa da multipli di $\frac{\lambda}{4}$ equivale ad una reattanza; quindi, per mantenere in essa l'oscillazione, occorre che ad uno degli estremi venga inserito un organo capace di assorbire e fornire tempestivamente energia. Si tratta, è vero, di assorbimenti mediamente compensati, *nel tempo*, dalle forniture, ma tuttavia la presenza di un generatore si impone. È sostanzialmente questo il noto (El., VIII, 19) comportamento delle reattanze nei circuiti a corrente alternata. Da quanto precede consegue che un tale sistema, caricato ad un estremo con una resistenza, deve all'altro estremo venire alimentato non soltanto in modo attivo nella misura richiesta dal carico, ma anche in modo reattivo.

Si potrebbe chiedere se tale intervento reattivo possa essere evitato in qualche caso particolare ed eventualmente sotto quali condizioni.

Affinchè un tal caso si verifichi, non potendosi fare assegnamento sulle compensazioni energetiche fra uno ed altro elemento della linea, la potenza richiesta al carico dovrà in ogni istante risultare uguale a quella fornita dall'alimentatore, e pertanto la differenza di fase tra corrente e tensione all'inizio dovrà uguagliare quella all'estremo caricato. In particolare, se il carico è rappresentato da una pura resistenza R_u, anche l'impedenza d'entrata dovrà risultare una pura resistenza R_e. Basta allora applicare la (25′) per dedurre che deve essere soddisfatta la relazione:

$$R_0(R_e - R_u) \cos ax_1 + j(R_e R_u - R_0^2) \operatorname{sen} ax_1 = 0 ,$$

equivalente alle due seguenti:

$$(R_e - R_u) \cos ax_1 = 0 , \quad (R_e R_u - R_0^2) \operatorname{sen} ax_1 = 0 .$$

Siccome $\cos ax_1$ e $\operatorname{sen} ax_1$ non sono nulli, da queste si deduce

$$R_e = R_u = R_0 .$$

Tanto basta (n. 3, 5°) per assicurare che il regime è progressivo. Si può quindi concludere che per una linea di lunghezza qualunque tale

regime è il più conveniente per trasmettere potenza dall'uno all'altro estremo, in quanto che con esso è assicurata sia l'assenza delle fluttuazioni energetiche fra generatore e carico — che si accompagnano con una trasmissione attraverso un organo a carattere reattivo quale è una linea di lunghezza diversa da multipli di $\frac{\lambda}{4}$ — sia le fluttuazioni che necessariamente si verificano fra uno ed altro punto della linea nei casi in cui $\left(\text{lunghezze multiple di } \frac{\lambda}{2} \text{ o di } \frac{\lambda}{4}\right)$ questa, pur non richiedendone al generatore, è costretta a divenire essa stessa sede di migrazioni energetiche per far fronte alle necessità derivanti dal fatto che i fabbisogni energetici non si verificano contemporaneamente nella stessa misura nei vari punti di uno stesso tratto, quantunque vi sia compensazione per il tratto intero.

Queste considerazioni possono estendersi al caso generale. Se, per semplicità, ci limitiamo al caso di linee a basse perdite, si verifica tosto che la totale energia accumulata nel mezzo, per un tronco comprendente una mezza lunghezza d'onda, è costante, e pertanto un tale tronco si presta a realizzare una trasmissione in condizioni favorevoli in quanto all'origine si deve immettere la potenza richiesta all'estremo, aumentata soltanto di quella dovuta alla dissipazione lungo la linea stessa, senza cioè che occorra intervenire in modo reattivo.

Ad interessanti conclusioni si perviene poi se si va a calcolare la dissipazione lungo la linea. Per semplificare, supporremo che l'impedenza di carico $\mathbf{Z}_u$ sia una pura resistenza, al pari dell'impedenza caratteristica $\mathbf{Z}_0$ e che tale sia pure l'impedenza d'entrata, talchè la trasmissione non interessi che potenza attiva. In tale caso, la parte immaginaria dell'indice di riflessione $\boldsymbol{\theta}$ corrisponde ad un multiplo di π cioè è $\boldsymbol{\theta} = \mu + jk\pi$ e quindi th$\boldsymbol{\theta}$ equivale a $\pm$ thμ, ed inoltre, detta x_1 la lunghezza della linea, sarà αx_1 multiplo di $\frac{\lambda}{4}$. La dissipazione totale lungo la linea è data da

$$r\int_0^{x_1} I^2 dx + g\int_0^{x_1} V^2 dx\,,$$

dove I e V rappresentano i moduli della corrente e della tensione nel punto generico. La potenza erogata all'origine (cioè all'estremo caricato con $\mathbf{Z}_u$) vale $Z_u I_u^2$, quindi la dissipazione relativa p (rapporto della dissipazione alla potenza di carico) vale:

$$p = \frac{r}{Z_u I_u^2}\int_0^{x_1} I^2 dx + \frac{g}{Z_u I_u^2}\int_0^{x_1} V^2 dx\,.$$

Scrivendo $Z_0 \text{th}\mu$ in luogo di Z_u e ponendo per I, V i loro valori tratti dalle (44) cioè (App., A, 3, formole (27)):

$$I = \frac{I_u}{\text{ch}\mu} \sqrt{\frac{\text{ch}2(\beta x + \mu) + \cos 2\alpha x}{2}}, \quad V = \frac{I_u Z_0}{\text{ch}\mu} \sqrt{\frac{\text{ch}2(\beta x + \mu) - \cos 2\alpha x}{2}},$$

si ha

$$p = \frac{r}{Z_0} \int_0^{x_1} \frac{\text{ch}2(\beta x + \mu) + \cos 2\alpha x}{2\text{ch}\mu\text{sh}\mu} dx + Z_0 g \int_0^{x_1} \frac{\text{ch}2(\beta x + \mu) - \cos 2\alpha x}{2\text{ch}\mu\text{sh}\mu} dx =$$

$$= \frac{r}{Z_0 \text{sh}2\mu} \left(\frac{\text{sh}2(\beta x_1 + \mu)}{2\beta} + \frac{\text{sen } 2\alpha x_1}{2\alpha} \right) + \frac{Z_0 g}{\text{sh}2\mu} \left(\frac{\text{sh}2(\beta x_1 + \mu)}{2\beta} - \frac{\text{sen } 2\alpha x_1}{2\alpha} \right) =$$

$$= \frac{\text{sh}2(\beta x_1 + \mu) - 1}{\text{sh}2\mu},$$

l'ultimo passaggio giustificandosi con la (20) e per essere αx_1 multiplo di $\frac{\lambda}{4}$.

Questa espressione decresce col crescere del numero positivo μ [1], raggiungendo il suo minimo valore per $\mu \to \infty$, cioè quando l'impedenza di carico coincide con l'impedenza caratteristica e quindi il regime è progressivo.

Resta così chiarita, sotto un punto di vista energetico, la fondamentale importanza della nozione di impedenza caratteristica e del regime progressivo che ad essa è intimamente legato. Questo invero può definirsi come quello col quale si realizza, da un punto all'altro della linea, una data trasmissione di potenza riducendo al minimo le dissipazioni lungo la linea stessa, ed evitando migrazioni delle energie accumulate nei campi elettrici e magnetici.

È appunto per questo che, nelle applicazioni, quando una linea è adibita a trasporto di energia, si tende sempre a disporre le cose in modo che la chiusura di essa venga fatta sulla impedenza caratteristica.

Ovviamente queste considerazioni valgono anche per un sistema quadripolare qualunque, e, nel caso di sistema non simmetrico, alla impedenza caratteristica si dovrà sostituire la impedenza immagine. In particolare si ha che, quando l'effettivo apparecchio su cui è destinata ad erogare una data linea (o un dato quadripolo) ha impedenza $\mathbf{Z}$ diversa dalla impedenza caratteristica $\mathbf{Z}_0$, gioverà interporre fra tra il sistema ed il carico un opportuno quadripolo avente per impedenze immagini $\mathbf{Z}_0$ e $\mathbf{Z}$.

Tutto questo vale per una linea considerata come organo di trasmissione fra un sistema generatore ed un sistema ricevitore. Ma nella pra-

---

[1] Infatti è $\frac{d}{d\mu} \frac{\text{sh}2(\beta x_1 + \mu)}{\text{sh}2\mu} = -\frac{2\text{sh}2\beta x_1}{\text{sh}^2 2\mu} < 0$.

tica radiotecnica si incontrano, come già si è detto (n. 14), degli organi (antenne) assimilabili a linee e destinati ad erogare potenza, non alla estremità, bensì *lungo il loro percorso*. In altre parole, si tratta di sistemi per i quali il fenomeno dissipativo legato all'elemento da noi indicato con r costituisce la effettiva ragion d'essere del sistema stesso. In tal caso, come a suo tempo verrà spiegato, tale r assumerà più propriamente il nome di *resistenza di radiazione*, e la somma delle potenze ri^2dx relative ai vari punti costituirà la così detta *potenza irradiata*.

Il problema allora si presenta in modo, per così dire, opposto a quello della trasmissione: si tratta cioè non solo di non trasmettere potenza al terminale, ma anzi di « dissiparne » lungo la linea. Si comprende senz'altro come in tal caso giovi precisamente disporre le cose in guisa che la linea funzioni in regime il più possibilmente lontano dal progressivo. Naturalmente non si potrà avere un regime stazionario, in quanto la dissipazione, per ipotesi, non è nulla, ma converrà operare col minimo valore della parte reale μ dell'indice di riflessione, valore a dire con $\mu = 0$, cui corrisponde valore nullo od infinito dell'impedenza di chiusura, cioè con linea aperta o cortocircuitata all'estremo. E converrà altresì che la linea stessa abbia una lunghezza multipla di $\frac{\lambda}{4}$, onde poter fruire delle compensazioni energetiche reattive di cui ampiamente ci siamo occupati nel n. prec. Ove la lunghezza non possa o non voglia farsi multipla di $\frac{\lambda}{4}$, occorrerà corredare la linea all'uno o all'altro dei suoi estremi di una conveniente reattanza, il cui ufficio è quello di sostituire il tratto di linea mancante; e a tale proposito non abbiamo che a richiamare quanto fu dettagliatamente esposto al n. 14.

Qui aggiungeremo qualcosa in ordine alla potenza attiva, che necessariamente deve essere fornita al sistema in misura corrispondente alla dissipazione. Tale potenza si commisura ovviamente alla parte reale dell'impedenza d'entrata, che già fu da noi calcolata al n. 16. In particolare abbiamo quivi trovato che, per una linea aperta di lunghezza $\frac{\lambda}{4}$, la resistenza d'entrata vale $\frac{r\lambda}{8}$, cioè la metà della « resistenza totale » che il tronco presenterebbe qualora fosse percorso da corrente uguale in tutti i suoi punti. Ciò si spiega agevolmente pensando che le ampiezze di corrente nei vari punti variano sensibilmente come le ordinate di un arco di sinusoide, ed il quadrato dell'ordinata media di questo vale la metà del quadrato dell'ordinata massima [1]. Pertanto, se ad es. si alimenta

[1] Invero è $\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^2\alpha d\alpha = \frac{1}{2}$.

al ventre di corrente, e quindi con corrente di ampiezza corrispondente all'ordinata massima, la resistenza corrispondente R deve risultare metà della predetta resistenza totale, affinchè la potenza immessa uguagli la dissipazione totale.

In pratica, avviene spesso che la r non è esattamente conosciuta mentre tale è la R (che può intendersi misurata dal rapporto fra la potenza ed il quadrato della corrente ventrale); in tal caso quella può dedursi da questa mediante la

$$r = \frac{2R}{x_1} = \frac{2P}{x_1 I^2_{max}},$$

essendo x_1 la lunghezza del tronco, P la potenza, I_{max} la corrente ventrale.

Nel caso di lunghezza x_1 multiplo pari di $\frac{\lambda}{4}$, la resistenza all'entrata non corrisponde ad $\frac{rx_1}{2}$, ma alla terza proporzionale dopo questa e la resistenza caratteristica $\sqrt{\frac{l}{c}}$, cioè si ha:

$$R = \frac{2}{rx_1} \frac{l}{c}.$$

Da questo valore può ancora dedursi per r una espressione simile alla precedente purchè ci si riferisca alla tensione (ventrale) V_{max} anzichè alla corrente (necessariamente nodale). Infatti la corrente vale sensibilmente $\frac{V_m}{Z_0} = V_m \sqrt{\frac{c}{l}}$ e, uguagliando la potenza P al prodotto di R pel quadrato della corrente, si ottiene

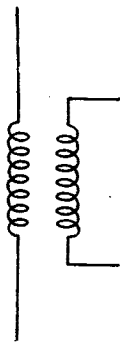
$$r = \frac{2V^2_{max}}{x_1 P}.$$

OSSERVAZIONE. - Tutte le precedenti considerazioni si possono riferire indifferentemente al caso di una linea a due fili, o anche ad un solo filo, quando un conduttore di conducibilità infinita (ad es. approssimativamente, la terra) funge da secondo filo.

Fig. 107

Ciò porta a ritenere estese le considerazioni stesse a sistemi del tipo indicato in fig. 107, i quali si possono considerare come linee a due fili divaricati anzichè paralleli. È evidente che per sistemi siffatti appare meno attendibile la nozione di una costante induttanza unitaria e di una costante capacità unitaria; tuttavia nei casi che interessano la pratica radiotecnica (antenne) è possibile assegnare convenienti valori di l e c in guisa che le conseguenze della teoria generale risultino sufficientemente aderenti alla realtà.

21. - Bobine di induttanza considerate come linee. — Le nozioni acquisite mediante lo studio dei circuiti a costanti distribuite consentono di precisare il comportamento di taluni circuiti e segnatamente delle bobine con le quali di consueto si realizzano cospicui valori di induttanza.

Come già si è osservato (II, 12), in un tale circuito si trovano ad essere vicini dei tratti di conduttore a diverso potenziale; essi pertanto possono assimilarsi a veri e propri circuiti a costanti distribuite con resistenza e induttanza in serie, e capacità in derivazione. L'equivalenza, da noi indicata, di un tale sistema ad un circuito R, L in parallelo con una capacità C, è da considerarsi grossolana, specialmente nelle applicazioni con correnti ad altissima frequenza.

Siccome si tratta, come si è detto, di una linea, avremo a considerare una certa lunghezza d'onda caratteristica di ogni frequenza, che potrà divenire, per frequenze opportunamente elevate, dello stesso ordine di grandezza della lunghezza del circuito, con che si avranno in generale massimi e minimi di corrente e di tensione.

In particolare, si osservi che può perdere significato la nozione di « corrente in una bobina » o quanto meno una tale nozione dovrà completarsi con l'indicazione del punto cui si intende riferire la corrente. Se l'alimentazione è fatta mediante introduzione (per via induttiva) di una f. e. m. che possa pensarsi localizzata in un punto — per lo più al centro —, la bobina si comporterà come una linea a due fili aperta; agli estremi si avrà pertanto un nodo di corrente ed un ventre di tensione. Se poi la bobina fa parte di un ordinario circuito, le rimanenti parti di questo fungeranno da impedenza di carico rispetto alla linea equivalente alla bobina stessa.

CAPITOLO SESTO

APPLICAZIONI VARIE - TRASFORMATORI - FILTRI

I sistemi quadripolari sono largamente usati nella pratica in quanto, come si è visto nel Cap. IV, la loro interposizione fra due sistemi circuitali consente di conseguire una qualunque alterazione di impedenza.

Vogliamo qui studiare con qualche dettaglio alcuni tipi di quadripoli che più frequentemente si incontrano nella pratica.

1. - Impedenza semplice. — Il più semplice quadripolo (non simmetrico) è quello costituito da una impedenza **Z** interposta fra l'entrata e l'uscita (fig. 108). Le relative equazioni fondamentali sono evidentemente le seguenti:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_e = \mathbf{E}_u + \mathbf{Z}\mathbf{I}_u\,, \\ \mathbf{I}_e = \mathbf{I}_u\,. \end{cases}$$

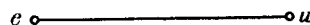
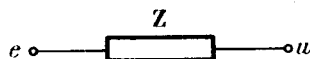



Fig. 108

I coefficienti **A** e **D** sono dunque entrambi unitari, **B** coincide con **Z**, e **C** è nullo. È interessante rilevare che la condizione $\mathbf{C} = 0$ è *caratteristica* di un tale sistema. Infatti, dalla terza delle (16) del Cap. IV, si ha che, se è $\mathbf{C} = 0$, la $\mathbf{Z}_2$ del T equivalente è infinita, quindi il sistema si riduce al tipo precedente con $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2$. Si conclude quindi che in tal caso i numeri **A** e **D** debbono necessariamente essere uguali e quindi entrambi uguali all'unità.

2. - Cellule a squadra. — Un altro interessante esempio di quadripoli non simmetrici è quello costituito dalle così dette *cellule a squadra*, formate con la « metà » di un T o di un Π, corrispondenti cioè ad uno schema come quello indicato in fig. 109 *a*), che può considerarsi la metà dei T e Π completi che si ottengono aggregando, a destra (per il T) o a sinistra (per il Π) della squadra disegnata, la sua inversa, come indicato nelle figg. 109 *b*) e *c*).

Si vede subito che le impedenze immagini di tali cellule non sono altro che le impedenze caratteristiche del T e del Π di cui sopra e l'esponente di trasduzione è la metà di quello pertinente a ciascuno di questi stessi quadripoli completi.

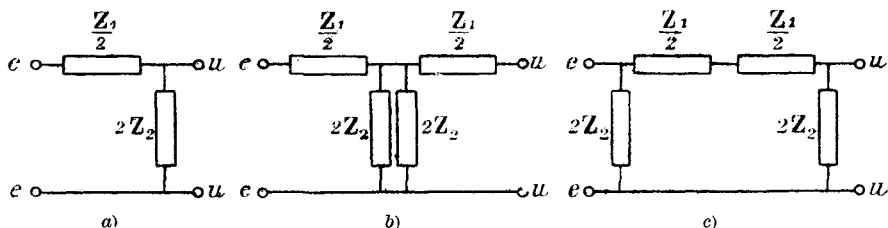



Fig. 109

Nel caso particolare in cui $\mathbf{Z}_1$ e $\mathbf{Z}_2$ sono delle pure reattanze jX_1 e jX_2, l'applicazione delle formole generali dà:

$$\mathbf{Z}_{ie} = \sqrt{-\left(X_1X_2 + \frac{X_1^2}{4}\right)}, \quad \mathbf{Z}_{iu} = \frac{-X_1X_2}{\sqrt{-\left(X_1X_2 + \frac{X_1^2}{4}\right)}},$$

da cui segue

$$\mathbf{Z}_{ie}\mathbf{Z}_{iu} = -X_1X_2 .$$

Se è $X_1 = -X_2$, come ad es., avviene quando X_1 e X_2 sono dovute ad una induttanza L ed a una capacità C costituenti un sistema risonante per una certa pulsazione ω_0, si ha:

$$\mathbf{Z}_{ie}\mathbf{Z}_{iu} = \frac{L}{C}, \quad LC = \frac{1}{\omega_0^2} .$$

Le impedenze immagini possono ridursi a due resistenze R_e ed R_u. La condizione a ciò necessaria e sufficiente è che risulti positivo il radicando delle precedenti espressioni, per il che deve essere

$$LC\omega^2 < 1 ,$$

essendo ω la pulsazione di funzionamento.

Fra L, C, ω, R_e, R_u si hanno allora le relazioni:

$$R_e = \sqrt{\frac{L}{C} - L^2\omega^2}, \quad R_u = \frac{L}{C}\sqrt{\frac{1}{\frac{L}{C} - L^2\omega^2}}, \tag{1}$$

da cui segue $R_e < R_u$. Da queste si dedurranno i valori di due delle cinque grandezze predette, date le altre tre.

Per es. date R_e ed R_u (di cui la prima non superiore alla seconda) ed ω, i valori di L e C risulteranno determinati da:

$$L^2\omega^2 = R_eR_u - R_e^2, \quad C^2\omega^2 = \frac{1}{R_eR_u} - \frac{1}{R_u^2} .$$

Un tale sistema ovviamente coincide con gli ordinari circuiti di cui ci siamo occupati nel cap. III, 13, a due rami in parallelo con reattanze di opposto segno, e la relazione $R_e R_u = \frac{L}{C}$ è precisamente quella che lega la resistenza disposta in serie in uno dei rami (R_e) con quella (R_u) cui il sistema stesso equivale per quella pulsazione (definita appunto da una qualunque delle (1)) per la quale si annulla la sua reattanza.

Le equazioni fondamentali del sistema considerato sono:

$$\mathbf{E}_e = (1 - LC\omega^2)\mathbf{E}_u + jL\omega\mathbf{I}_u\,, \quad \mathbf{I}_e = jC\omega\mathbf{E}_u + \mathbf{I}_u\,.$$

È interessante osservare che, per la pulsazione $\frac{1}{\sqrt{LC}}$, esso, alimentato a tensione $\mathbf{E}_e$ costante, fornisce in uscita una corrente $\mathbf{I}_u$ pure costante, indipendente cioè dall'impedenza di chiusura. Invertendo il senso di funzionamento, si otterrebbe la trasformazione di corrente costante in tensione costante. Di questo singolare comportamento ci si può rendere conto direttamente riflettendo che la corrente $\mathbf{I}_e$ uguaglia sempre la somma di $\mathbf{I}_u$ con la corrente $\mathbf{I}_2$ assorbita dalla branca trasversale $\mathbf{Z}_2$, dal che segue che la impedenza $\mathbf{Z}_1$ può considerarsi percorsa dalle due correnti $\mathbf{I}_2$ ed $\mathbf{I}_u$. Ora, essendo $\mathbf{Z}_1 = jX$, $\mathbf{Z}_2 = -jX$, la caduta di tensione attraverso $\mathbf{Z}_1$ e $\mathbf{Z}_2$ della corrente $\mathbf{I}_2$ è nulla, e quindi per equilibrare la tensione d'entrata non resta che la caduta di tensione determinata dal passaggio di $\mathbf{I}_e - \mathbf{I}_2$, cioè $\mathbf{I}_u$, attraverso $\mathbf{Z}_1$: ciò val quanto dire che è costante il rapporto di $\mathbf{E}_e$ ad $\mathbf{I}_u$.

3. - Dispositivi a ponte. — Come è noto, un sistema a ponte è costituito da quattro impedenze $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{Z}_3$, $\mathbf{Z}_4$ connesse in circuito chiuso a formare un *quadrilatero* (fig. 110), due vertici opposti del quale funzionano da morsetti di entrata, gli altri due da morsetti di uscita.

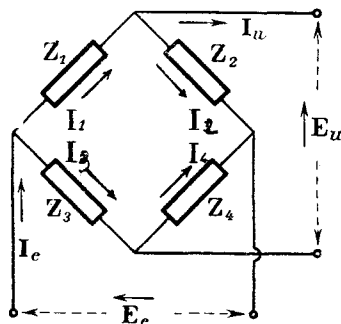
Se indichiamo con $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$, $\mathbf{I}_3$, $\mathbf{I}_4$ le correnti nelle quattro impedenze, ed al solito con $\mathbf{E}_e$, $\mathbf{I}_e$; $\mathbf{E}_u$, $\mathbf{I}_u$ gli elementi di entrata e d'uscita, si ha evidentemente, con riguardo ai sensi indicati dalle frecce:

Fig. 110

$$(2) \quad \begin{cases} \mathbf{E}_e = \mathbf{Z}_1\mathbf{I}_1 + \mathbf{Z}_2\mathbf{I}_2 = \mathbf{Z}_3\mathbf{I}_3 + \mathbf{Z}_4\mathbf{I}_4 \\ \mathbf{E}_u = -\mathbf{Z}_1\mathbf{I}_1 + \mathbf{Z}_3\mathbf{I}_3 = \mathbf{Z}_2\mathbf{I}_2 - \mathbf{Z}_4\mathbf{I}_4\,, \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} \mathbf{I}_e = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_3 = \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_4 \\ \mathbf{I}_u = \mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_4 - \mathbf{I}_3\,. \end{cases}$$

Dalle (3) si ricava:

$$(4) \qquad \mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_u\,, \quad \mathbf{I}_3 = \mathbf{I}_e - \mathbf{I}_1\,, \quad \mathbf{I}_4 = \mathbf{I}_e + \mathbf{I}_u - \mathbf{I}_1\,,$$

e sostituendo questi valori nel secondo e terzo membro di una qualunque delle (2) si ottiene la relazione:

$$(5) \qquad (\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_4)\mathbf{I}_e + (\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_4)\mathbf{I}_u = \mathbf{I}_1(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_4)\,,$$

dalla quale si deduce il valore di $\mathbf{I}_1$ in funzione di $\mathbf{I}_e$ ed $\mathbf{I}_u$, ogni qualvolta $\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_4$ sia diverso da zero.

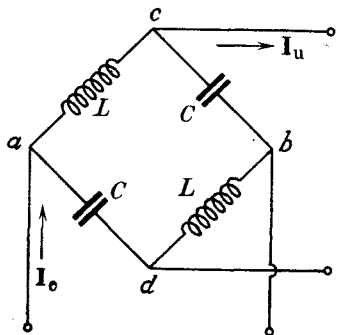



Fig. 111

Qualora invece la somma delle quattro impedenze fosse nulla, dalla relazione (5) seguirebbe:

$$(6) \qquad (\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_4)\mathbf{I}_e + (\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_4)\mathbf{I}_u = 0\,,$$

e se ne dedurrebbe che la grandezza $\mathbf{C}$ che compare nelle equazioni fondamentali è nulla. Il sistema allora, per quanto sappiamo, equivale ad una semplice impedenza interposta fra l'entrata e l'uscita. Un tale caso evidentemente non presenta interesse alcuno. Affinchè esso non si verifichi, è necessario che la (6) non costituisca un vincolo fra $\mathbf{I}_e$ ed $\mathbf{I}_u$, cioè che si abbia:

$$-\mathbf{Z}_2 = -\mathbf{Z}_3 = \mathbf{Z}_4\,,$$

e, siccome è nulla la somma delle quattro impedenze, si avrà anche $\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_4$, ossia in definitiva:

$$\mathbf{Z}_1 = -\mathbf{Z}_2 = -\mathbf{Z}_3 = \mathbf{Z}_4\,.$$

Ora si osservi che, se le $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{Z}_3$, $\mathbf{Z}_4$ sono impedenze effettive, esse non potranno avere negative le parti reali, onde dalla precedente si deduce che le impedenze stesse debbono necessariamente ridursi a reattanze pure, di valori rispettivi:

$$\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_4 = jX\,, \quad \mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_3 = -jX\,.$$

La costituzione di un tale ponte è dunque quella indicata in fig. 111, dove L e C soddisfano la condizione $LC\omega^2 = 1$ alla pulsazione ω di funzionamento, talchè si ha $X = L\omega = \dfrac{1}{C\omega}$.

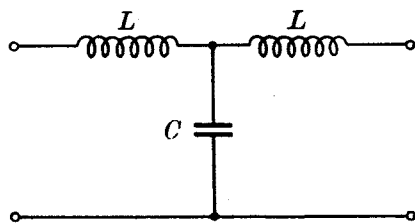



Fig. 112

Le equazioni fondamentali (2) e (3) si riducono in tal caso a

$$\mathbf{E}_e = jX\mathbf{I}_u\,, \quad \mathbf{E}_u = -jX\mathbf{I}_e\,.$$

Il T equivalente è il sistema simmetrico disegnato in fig. 112, l'impedenza caratteristica vale $\sqrt{\dfrac{L}{C}}$, e l'esponente di trasduzione, come agevolmente

si riconosce, vale $e^{j\frac{\pi}{2}}$. Il sistema può dunque pensarsi come il quadripolo equivalente ad una linea non dissipativa di lunghezza uguale ad $\frac{1}{4}$ di lunghezza d'onda. Così, al pari di questa (IV, 18), esso è atto a trasformare una resistenza R_u in un'altra R_e ad essa legata dalla relazione

$$R_e R_u = \frac{L}{C}\,.$$

Riservandoci di esaminare successivamente le proprietà del ponte di fig. 111, osserviamo che, escluso il caso $\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_4 = 0$, la (5) si può risolvere rispetto ad $\mathbf{I}_1$. Sostituendone il valore nelle (2), dopo avere utilizzato le (4), si ottiene:

$$\mathbf{ZE}_u = -\alpha\mathbf{I}_u - \delta\mathbf{I}_e\,,\quad \mathbf{ZE}_e = \delta\mathbf{I}_u + \beta\mathbf{I}_e\,, \tag{7}$$

avendo posto:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_4\,,\quad \alpha = (\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_3)(\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_4)\,,\\ \beta &= (\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2)(\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_4)\,,\quad \delta = \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_4 - \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Per giungere alla forma tipica, basta aggregare alla prima delle (7) la relazione che si ottiene eliminando $\mathbf{I}_e$ fra le due. Si ottiene così:

$$\begin{cases} \delta\mathbf{ZE}_e = -\beta\mathbf{ZE}_u + (\delta^2 - \alpha\beta)\mathbf{I}_u \\ \delta\mathbf{I}_e = -\mathbf{ZE}_u - \alpha\mathbf{I}_u\,. \end{cases}$$

Il determinante dei secondi membri vale $\mathbf{Z}\delta^2$ e quindi non è nullo se tale non è δ. In questo caso dunque il ponte è un quadripolo invertibile e le corrispondenti relazioni fondamentali sono:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_e = -\dfrac{\beta}{\delta}\mathbf{E}_u + \dfrac{\delta^2 - \alpha\beta}{\delta\mathbf{Z}}\mathbf{I}_u \\[2mm] \mathbf{I}_e = -\dfrac{\mathbf{Z}}{\delta}\mathbf{E}_u - \dfrac{\alpha}{\delta}\mathbf{I}_u\,. \end{cases}$$

Le impedenze a vuoto dai due lati sono $\frac{\beta}{\mathbf{Z}}$ ed $\frac{\alpha}{\mathbf{Z}}$; come è fisicamente evidente e d'altra parte facilmente si riconosce esaminando le (8), esse non sono altro che le impedenze costituite dai sistemi $\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2$, $\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_4$ (rispettivamente $\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_3$, $\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_4$) disposti in parallelo. Le impedenze di corto circuito sono $\frac{\delta^2 - \alpha\beta}{\alpha\mathbf{Z}}$ e $\frac{\delta^2 - \alpha\beta}{\beta\mathbf{Z}}$ e, come agevolmente si verifica, corrispondono a quelle dei sistemi ottenuti disponendo in serie le coppie $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_3$; $\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{Z}_4$ (rispettivamente $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$: $\mathbf{Z}_3$, $\mathbf{Z}_4$) in parallelo.

Nel caso $\delta = 0$, cioè:

$$\mathbf{Z}_1 : \mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_3 : \mathbf{Z}_4\,,$$

il ponte è *in equilibrio* e le (7) si riducono a:

$$\mathbf{Z}\mathbf{E}_u = -\alpha\mathbf{I}_u\,, \quad \mathbf{Z}\mathbf{E}_e = \beta\mathbf{I}_e\,.$$

Esse esprimono che la impedenza d'entrata vale $\frac{\beta}{\mathbf{Z}}$ qualunque sia il valore dell'impedenza di carico. Se questa differisce da $-\frac{\alpha}{\mathbf{Z}}$, alla prima delle (9) non si può soddisfare se non con

$$\mathbf{E}_u = 0\,, \quad \mathbf{I}_u = 0\,,$$

cioè la tensione e la corrente d'uscita sono necessariamente nulle [1]. E siccome altrettanto può concludersi scambiando e con u, si può in generale asserire che, *quando il ponte è in equilibrio, gli estremi di una diagonale non risentono gli effetti di una qualunque tensione applicata agli estremi dell'altra.*

Nel caso di fig. 111, come abbiamo già osservato, le formole fondamentali (2) e (3) si riducono a

$$\mathbf{E}_e = jX\mathbf{I}_u\,, \quad \mathbf{E}_u = -jX\mathbf{I}_e\,.$$

Esse mostrano che il sistema gode della singolare proprietà che la corrente d'uscita dipende dalla sola tensione d'entrata, e non dall'impedenza di carico, mentre la tensione d'uscita dipende soltanto dalla corrente d'entrata. Tale sistema è dunque atto a trasformare una distribuzione a tensione costante in una a corrente costante e viceversa.

Questa interessante proprietà può essere opportunamente messa in evidenza col seguente ragionamento fisico diretto.

Supponiamo di alimentare la diagonale *ab* del ponte di fig. 111 con una corrente $\mathbf{I}_e$ di ampiezza costante. Comunque tale corrente si ripartisca tra le due vie ad essa offerte per giungere da *a* a *b*, si avrà fra *c* e *d* una tensione di ampiezza uguale al prodotto di I_e per il comune valore assoluto X delle quattro reattanze del ponte, ed in quadratura rispetto alla $\mathbf{I}_e$ stessa, in quanto che tale tensione, che coincide con la differenza fra le cadute di tensione determinate fra *a*, *c* ed *a*, *d* dalle correnti parziali fluenti in *adb*, *acb*, ha ampiezza uguale alla somma di queste due cadute, cioè in ogni caso XI_e, qualunque siano le correnti parziali stesse. Se poi

---

[1] Nel caso $\mathbf{Z}_u = -\frac{\alpha}{\mathbf{Z}}$, il sistema di carico sarebbe una impedenza uguale e contraria alla $\frac{\alpha}{\mathbf{Z}}$, cioè a quella che il ponte presenta a vuoto del lato u. Ciò evidentemente non può verificarsi se non quando, essendo nulle le resistenze, la chiusura del lato u sia fatta con una pura reattanza opposta a $\frac{\alpha}{\mathbf{Z}}$; è ovvio che allora il sistema ponte-carico soddisfa alle condizioni di risonanza, e quindi può essere sede di corrente anche in assenza di alimentazione.

si chiudono i morsetti *c*, *d* su una qualunque impedenza, la corrente $\mathbf{I}_u$ che in essa andrà a fluire si dividerà in due parti $\mathbf{I}_{u1}$ e $\mathbf{I}_{u2}$ fra le vie *cad*, *cbd*, ma siccome l'impedenza di ciascuna di tali vie è nulla, nessuna tensione viene a localizzarsi per tal fatto fra *c* e *d*, onde, come si era asserito, l'ampiezza della tensione **E** fra *c* e *d* vale costantemente XI_e. Al variare della corrente erogata dal lato *cd*, varia invece la tensione richiesta ai nodi *a* e *b* d'alimentazione, come agevolmente si riconosce riflettendo che la corrente $\mathbf{I}_u$ si dividerà in due parti $\mathbf{I}_{u1}$ e $\mathbf{I}_{u2}$, cui, ragionando come sopra, si riconosce corrispondere una tensione XI_u fra *a* e *b*. Così, mentre per $I_u = 0$ è nulla la tensione fra *a* e *b*, questa va via via crescendo di conserva con la corrente I_u erogata. Inversamente, alimentando *c*, *d* con una tensione di ampiezza E costante, fra i morsetti *a* e *b* fluirà sempre una corrente di ampiezza $\frac{E}{X}$ qualunque sia l'impedenza disposta fra i morsetti *a* e *b* stessi, in quanto che, come sopra si è veduto, solo una tale corrente è atta a determinare una controtensione capace di equilibrare la **E** impressa fra *c* e *d*.

4. - **Trasformatori.** — Sebbene un qualunque quadripolo possa considerarsi come un « trasformatore » nel senso più largo della parola, questo nome viene generalmente riservato ai dispositivi consistenti essenzialmente in una coppia di circuiti elettrici magneticamente influenti l'uno sull'altro.

Nel caso di funzionamento con frequenze relativamente basse (frequenze industriali, e, con qualche riserva, anche acustiche) è relativamente facile realizzare elevati valori del coefficiente d'accoppiamento, da cui consegue la possibilità di trasferire al circuito secondario una parte ragguardevole della potenza elettrica somministrata al primario.

Per raggiungere tale intento giova servirsi di nuclei di materiale ferromagnetico; con questi si costituisce un circuito magnetico, generalmente chiuso, col quale vanno a concatenarsi due circuiti elettrici. Siccome, data l'elevata permeabilità del nucleo in confronto a quella del mezzo circostante, le linee magnetiche riescono praticamente confinate entro il nucleo stesso, vengono ridotte al minimo le così dette *fughe* o *dispersioni*, con che il quadrato M^2 della mutua induttanza risulta assai prossimo al prodotto L_1L_2 delle induttanze dei due circuiti.

Il complemento all'unità del rapporto $k^2 = \frac{M^2}{L_1L_2}$ viene talvolta denominato *coefficiente di dispersione*, in quanto esso misura sensibilmente il rapporto fra il flusso disperso ed il flusso principale quali si definiscono nella teoria dei trasformatori (v. El., XIII, 3). Invero, se con $1 + \tau_1$, $1 + \tau_2$ si indicano i rapporti fra il flusso totale generato dalla corrente primaria (risp. secondaria) e la parte di esso che si concatena col cir-

cuito secondario (rispett. primario), il coefficiente di dispersione vale $1 - \frac{1}{(1+\tau_1)(1+\tau_2)}$, che, per piccoli valori di τ_1, τ_2, si confonde sensibilmente con $\tau = \tau_1 + \tau_2$. D'altra parte fra le induttanze ridotte $\frac{L_1}{1+\tau_1}$, $\frac{L_2}{1+\tau_2}$ e la mutua induttanza effettiva sussiste la relazione caratteristica degli accoppiamenti perfetti, cioè

$$M^2 = \frac{L_1 L_2}{(1+\tau_1)(1+\tau_2)} \cong L_1 L_2 (1-\tau) \, .$$

Sostituendo $k^2 L_1 L_2$ ad M^2, si deduce $\tau = 1 - k^2$, come sopra asserito.

Nei trasformatori industriali, il valore di τ è dell'ordine di $10^{-3} \div 10^{-4}$ e dello stesso ordine di grandezza risulta la differenza fra l'unità ed il coefficiente d'accoppiamento k; più precisamente si ha

$$k = \sqrt{1-\tau}\, , \quad \text{cioè} \quad k \cong 1 - \frac{\tau}{2} \, .$$

Se i circuiti primario e secondario sono costituiti con n_1, n_2 spire, le induttanze proprie L_1, L_2 e la mutua M risultano sensibilmente proporzionali ad n_1^2, n_2^2, $n_1 n_2$; quindi per la riduzione degli elementi di secondario a primario o viceversa, di cui si è parlato in III, 27, si può sensibilmente utilizzare il rapporto $n_1 : n_2$ in luogo di $\sqrt{L_1} : \sqrt{L_2}$, come appunto si suol fare nella ordinaria teoria dei frasformatori.

Il quadripolo equivalente, ridotto a primario, ha la branca trasversale coincidente con l'induttanza kL_1, e le longitudinali di induttanza complessiva $2(1-k)L_1 \cong (1-k^2)L_1 = \tau L_1$, quasi trascurabile in confronto a quella, il che equivale ad avere a che fare con un trasformatore perfetto (con induttanza $M = k\sqrt{L_1 L_2}$), essendo i due avvolgimenti completati, *fuori* del trasformatore, con le induttanze $(1-k)L_1$ e $(1-k)L_2$. A questi elementi reattivi debbono poi intendersi aggiunti gli elementi a carattere dissipativo, che, per quanto riguarda le branche longitudinali, corrispondono alle effettive resistenze ohmiche degli avvolgimenti, ridotte, a seconda dei casi, a primario o a secondario, da considerarsi in serie con le reattanze $j\omega(1-k)L_1$, e per quanto riguarda la branca trasversale, possono simboleggiarsi con una resistenza in parallelo così commisurata che l'effetto Joule ad essa pertinente corrisponda alla somma delle dissipazioni per isteresi e correnti parassite.

Trasformatori con nucleo di ferro vengono usati anche per frequenze della gamma acustica. Essi differiscono da quelli per frequenze industriali per una più spinta laminazione del ferro — diretta a ridurre le dissipazioni per correnti di Foucault — e sopratutto pel fatto che in essi si adottano bassi valori dell'induzione magnetica. Invero, man mano che cresce la frequenza, è necessario ridurre i valori della densità di flusso per non

incorrere in elevati valori delle dissipazioni per isteresi e correnti parassite, che, come è noto, sono entrambe sensibilmente proporzionali al quadrato dell'induzione e inoltre proporzionali rispettivamente alla prima e alla seconda potenza della frequenza. Per conciliare queste esigenze con quella di una sensibile efficienza magnetica, bisogna ricorrere a materiali aventi elevati valori di permeabilità per piccoli valori dell'induzione. In questo senso sono raccomandabili certe leghe di ferro e nichel, quali il permalloy.

Un trasformatore perfetto (ideale) dovrebbe avere perdite nulle, coefficiente di accoppiamento unitario, cioè dispersioni nulle, e induttanze L_1, L_2 infinitamente grandi, con valore finito del rapporto $u^2 = \frac{L_1}{L_2}$. Il quadripolo equivalente avrebbe indeterminate le impedenze immagini, e pertanto si presterebbe a trasformare un'impedenza qualunque in un'altra avente rapporto u^2 con la prima.

Ci si avvicina a tali condizioni ideali ogni qualvolta il quadrato dell'impedenza Z_m del ramo trasversale sia notevolmente maggiore di ciascuna delle impedenze Z_1, Z_2 delle due branche longitudinali del circuito equivalente, essendo tutte tali impedenze ridotte o a primario o a secondario. In tal caso, se il lato primario viene alimentato con una tensione alternativa $\mathbf{E}$, ai capi di un'impedenza inserita al secondario si disporrà di una tensione $\mathbf{V}$ sensibilmente uguale ad $\frac{n_2}{n_1}\mathbf{E}$, e la corrente $\mathbf{I}_1$ erogata dal primario sarà prossimamente uguale al prodotto di $\frac{n_1}{n_2}$ per la corrente $\mathbf{I}_2$ che circolerà nell'impedenza secondaria. Invero, la differenza fra $\mathbf{E}$ e $\mathbf{V}$ corrisponde alle cadute di tensione dovute al passaggio delle correnti $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ per le branche longitudinali del T, che saranno molto piccole in confronto ad E e V_1 se, come si è supposto, è $Z_1 \ll Z_m$ e $Z_2 \ll Z_m$; e la corrente I_2 risulterà sensibilmente uguale ad $\frac{n_1}{n_2} I_1$ se Z_m è sufficientemente grande.

Questo ragionamento suppone tacitamente che nella valutazione di Z_1 e Z_2 si intenda in esse conglobata, per la prima, l'impedenza interna del generatore cui è dovuta la $\mathbf{E}$, e per la seconda la stessa impedenza di carico, cioè dovrà Z_m superare notevolmente sia la impedenza complessiva della branca primaria sia quella della branca secondaria. E non è fuori di luogo osservare che, ove da tali condizioni si sia lontani, sono da attendersi risultati sensibilmente diversi da quelli abituali. Ad es. quando l'impedenza interna R_1 del generatore d'alimentazione è molto elevata ed in confronto ad essa la reattanza $L_1\omega$ del primario è piuttosto piccola — come può avvenire ad es. nel caso di primario in serie con tubi elettronici, quando il funzionamento sia limitato alle più basse frequenze della gamma acustica — la corrente primaria risulta

praticamente $= \frac{E}{R_1}$ indipendentemente dal valore di L_1, e quindi la tensione secondaria nel funzionamento a vuoto (dalla quale poco differisce quella ai capi del carico, se la resistenza e la reattanza di dispersione secondaria sono, come generalmente accade, piccole in confronto all'impedenza di carico) ridotta a primario risulta sensibilmente $= L_1\omega \frac{E}{R_1}$: la tensione secondaria effettiva vale quindi $L_1\omega \frac{E}{R_1} \frac{n_2}{n_1}$, essendo n_2, n_1 i numeri di spire secondarie e primarie, laddove, quando l'impedenza interna fosse molto esigua, la tensione secondaria ridotta a primario si serberebbe praticamente uguale alla primaria E e quindi la tensione secondaria effettiva uguaglierebbe $E \frac{n_2}{n_1}$. La tensione secondaria effettiva varia dunque, nel secondo caso, in modo inversamente proporzionale al numero n_1 delle spire primarie, mentre nel primo, ricordando che L_1 è proporzionale ad n_1^2, essa varierebbe proporzionalmente ad n_1.

Come si è detto, dei fenomeni secondari nel ferro (isteresi, correnti parassite) si può tenere approssimativamente conto associando all'induttanza della branca trasversale del T equivalente una conveniente (piccola) resistenza in serie o una (grande) resistenza in parallelo. I valori di tali resistenze saranno da desumersi dalle considerazioni a suo tempo fatte (Cap. II).

Occorre infine tenere presente che le successive spire di ciascun avvolgimento, come già si è osservato in generale in II, 13, si comportano come armature di condensatori, ed altrettanto avviene degli avvolgimenti rispetto ai supporti, non solo, ma anche del primario rispetto al secondario. Di ciò può tenersi approssimativamente conto pensando le induttanze proprie e mutue completate con opportune capacità in parallelo, che indicheremo con C_p, C_s, C_m, con riferimento a quelle che interessano il solo primario, il solo secondario e la coppia di avvolgimenti (di cui si sono supposti connessi due estremi, il che è ovviamente lecito secondo il punto di vista che qui ci occupa).

5. - Quadripolo equivalente. - Curve di risposta. — Il quadripolo equivalente dovrà pertanto completarsi secondo lo schema rappresentato in fig. 113, in cui R_1, R_2 rappresentano le resistenze ohmiche degli avvolgimenti. La capacità C_p può considerarsi come un carico supplementare in parallelo sul generatore, e la capacità C_s è pensata aggiunta in derivazione sul carico secondario. Gli elementi R_2, $(1-k)L_2$ e C_s figurano nello schema ridotti a primario, cioè i primi due divisi, il terzo moltiplicato per il quadrato n^2 del rapporto fra i numeri delle spire secondarie e primarie. Quanto alla capacità C_m, la intenderemo derivata fra gli estremi dei due avvolgimenti, supposti in accoppiamento perfetto (cioè

come se le reattanze di fuga fossero esterne all'apparecchio). Essa pertanto risulta sottoposta ad una tensione effettiva uguale ad $(n \pm 1)$ volte quella che esiste ai capi della branca centrale (e che espressa in termini di primario indicheremo con E), il doppio segno riferendosi ai due casi in cui i due avvolgimenti hanno disposizione tale che, supposti riuniti per un capo, la tensione E fra il capo libero dell'uno ed il capo comune risulta in fase, oppure in opposizione, rispetto a quella fra il capo comune ed il capo libero dell'altro. La potenza reattiva in giuoco in tale C_m vale

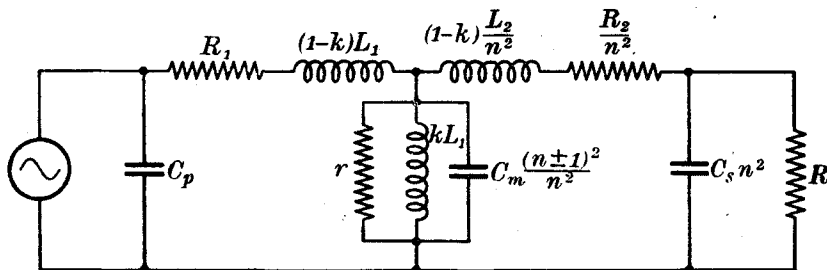



Fig. 113

$C_m \omega E^2 (n \pm 1)^2$ e pertanto la capacità C_m può sostituirsi con una di valore $C_m (n \pm 1)^2$ derivata sulla tensione E, cioè sulla branca trasversale del circuito equivalente, come indicato in figura.

L'impedenza caratteristica del trasformatore coincide prossimamente con la media geometrica della impedenza trasversale $\mathbf{Z}_m$ e della longitudinale $\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2$, come facilmente si riconosce pensando che, essendo $Z_m \gg Z_1 + Z_2$, l'impedenza a vuoto vale circa $\mathbf{Z}_m$, e quella di corto circuito circa $\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2$. Richiamando le considerazioni svolte a proposito delle proprietà energetiche dell'impedenza caratteristica, si deduce che, chiudendo il secondario su questa, si realizza il massimo rendimento del sistema.

La presenza delle capacità $C_s n^2$ e $C_m (n \pm 1)^2$ dà luogo ad un fatto che interessa rilevare perchè di grande importanza, come vedremo a suo tempo, nel funzionamento degli amplificatori a trasformatore. Se si alimenta il primario con una tensione di ampiezza costante, di cui venga fatta gradualmente crescere la frequenza, si incontra dapprima una frequenza — detta *di risonanza in parallelo* — per la quale la corrente assorbita dal primario è minima. Essa è quella per la quale il sistema costituito dalla branca centrale e dai rami su di essa derivati a destra costituisce un sistema risonante. Trascurando la resistenza dell'induttanza di fuga $(1 - k)L_1$, la pulsazione ω_p di cui si parla è determinata da:

$$\frac{1}{kL_1\omega_p} = C_m (n \pm 1)^2 \omega_p + \frac{1}{\dfrac{1}{C_s n^2 \omega_p} - (1 - k) L_1 \omega_p} .$$

A questa relazione si può sensibilmente sostituire la:

$$L_1[C_s n^2 + C_m(n \pm 1)^2]\omega_p^2 = 1,$$

cioè

$$(10) \qquad L_1 C_2 \omega_p^2 = 1 \quad \text{con} \quad C_2 = n^2 \left[C_s + C_m \left(1 \pm \frac{1}{n}\right)^2 \right],$$

cui si perviene pensando la $C_m(n \pm 1)^2$ derivata ai capi di $C_s n^2$ anzichè sulla branca kL_1, il che è praticamente lecito per la piccolezza della reattanza $(1 - k)L_1\omega_p$ in confronto alla $\frac{1}{C_s n^2 \omega_p}$.

Aumentando la frequenza, la reattanza $kL_1\omega$ della branca trasversale aumenta fino a che la sua presenza non modifica sensibilmente la reattanza offerta dal sistema parallelo costituito dalla capacità $C_m(n \pm 1)^2$ e dal sistema di $C_s n^2$, $(1 - k)L_1$ in serie. Frattanto si perviene ad una pulsazione ω_s — detta *di risonanza in serie* — caratterizzata dall'annullamento della reattanza offerta dalle due induttanze di fuga e dalle capacità $C_m(n \pm 1)^2$ e $C_s n^2$. Tenuto conto che è $1 - k = \frac{\tau}{2}$, tale ω_s risulta definita da

$$\frac{\tau}{2} L_1\omega_s + \frac{\left(\frac{\tau}{2} L_1\omega_s - \frac{1}{C_s n^2 \omega_s}\right)\left(-\frac{1}{C_m(n \pm 1)^2\omega_s}\right)}{\frac{\tau}{2} L_1\omega_s - \frac{1}{C_s n^2\omega_s} - \frac{1}{C_m(n \pm 1)^2\omega_s}},$$

alla quale relazione, trascurando i termini in τ^2 in confronto a quelli contenenti la prima potenza di τ, si può dare l'aspetto più semplice:

$$\tau\omega_s^2 L_1 \left[\frac{1}{2} C_m(n \pm 1)^2 + C_s n^2\right] = 1,$$

cioè:

$$(11) \qquad \tau L_1 C_2' \omega_s^2 = 1$$

$$\text{con} \qquad C_2' = n^2 \left\{ C_s + \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{1}{n}\right)^2 C_m \right\} = C_2 - \frac{1}{2} C_m (n \pm 1)^2.$$

La capacità C_2' differisce in generale ben poco da C_2 [1], talchè, confrontando le (10), (11), si deduce:

$$\omega_p \cong \omega_s \sqrt{\tau}.$$

Il rapporto fra le frequenze di risonanza serie e parallelo corrisponde dunque approssimativamente alla radice quadrata del coefficiente di di-

---

(1) Negli ordinari trasformatori telefonici, le C_s sono dell'ordine di $150 \div 200$ μμF, le C_m dell'ordine di $20 \div 30$ μμF, ed il rapporto n è generalmente $3 \div 5$.

spersione. Ad es., per valori di τ dell'ordine di $(1 \div 1{,}5)10^{-2}$, si ha $\omega_s = (10 \div 12)\omega_p$.

È interessante esaminare la così detta *curva di risposta* del trasformatore alle varie frequenze d'eccitazione, cioè il diagramma della tensione secondaria a vuoto (a parità di tensione impressa al primario) in funzione della frequenza. Nelle applicazioni radiotecniche l'alimentazione

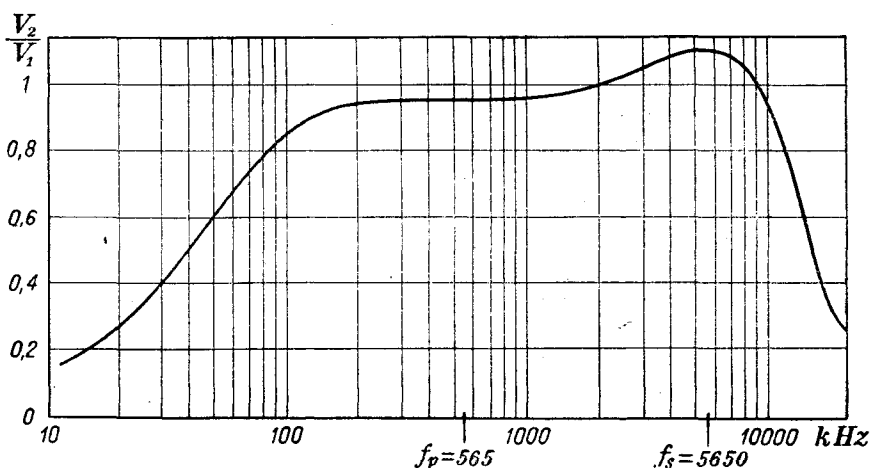



Fig. 114

del primario è generalmente effettuata con un tubo elettronico, equivalente, come vedremo, ad un generatore di elevata resistenza interna. Intenderemo allora tale resistenza conglobata con la resistenza del primario, cosicchè si avrà in definitiva da studiare il comportamento di un circuito del tipo disegnato in fig. 113 ma con resistenza R_1 molto elevata.

La fig. 114 mostra un tale diagramma per un sistema caratterizzato dai seguenti valori dei parametri

$$R_1 = 17\,500\ \Omega\,, \quad R_2 = 1\,000\ \Omega\,, \quad R_m = 300\,000\ \Omega\,,$$
$$n = 3\,, \quad \tau = 10^{-2}\,, \quad C_2 \cong C_2' = 1\,600\ \mu\mu\mathrm{F}\,, \quad L_1 = 50\ \mathrm{H}\,,$$

cui corrisponde

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_2}} = 3\,520 \ (f_p = 565\ \mathrm{Hz}),\ \omega_s = \frac{1}{\sqrt{\tau L_1 C_2}} = 35\,200 \ (f_s = 5\,650\ \mathrm{Hz}).$$

Per basse frequenze, il circuito equivalente può sensibilmente ritenersi ridotto a quello di fig. 115 *a*) dove nella resistenza indicata con R sono conglobate la resistenza interna del generatore, quella del primario e quella del secondario (ridotta, ben inteso, a primario). Esso è dedotto dal circuito completo sopprimendo le reattanze di dispersione e le capa-

città derivate, e ritenendo $kL_1 \cong L_1$. Applicando poi a tale circuito la trasformazione indicata in I, 12, ad esso si potrà sostituire quello di fig. 115 *b*), a tre branche in parallelo alimentate dalla corrente $\frac{V_1}{R}$. La tensione secondaria risulta

$$\mathbf{V}_2 = \frac{\mathbf{V}_1}{R} \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_m} + \frac{1}{jL_1\omega}},$$

cioè $\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_m} + \frac{R_1}{jL_1\omega}}$, da cui $\frac{V_2}{V_1} = \frac{L_1\omega}{\sqrt{R_1^2 + (\omega L_1)^2\left(\frac{R_1}{R_m} + 1\right)^2}}$.

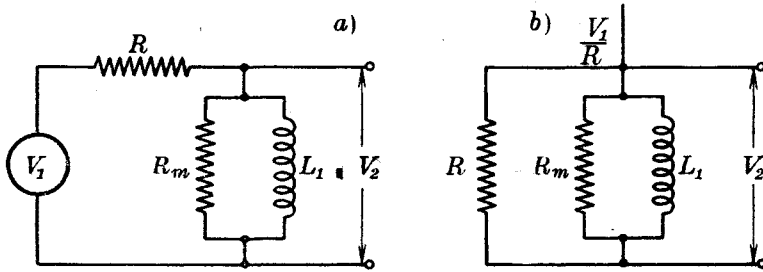
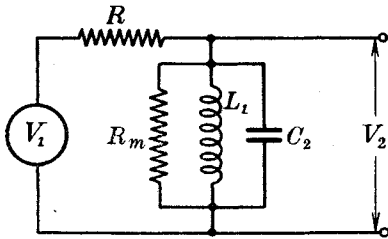



Fig. 115

Essendo in generale $R_m \gg R_1$, tale espressione si semplifica in

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{L_1\omega}{\sqrt{R_1^2 + (L_1\omega)^2}}.$$

Finchè $L_1\omega$ si mantiene abbastanza piccolo in confronto ad R_1 (1), il rapporto $\frac{V_2}{V_1}$ varia in modo sensibilmente proporzionale ad ω. Aumentando la frequenza, nel circuito equivalente si dovrà tener conto dell'effetto di C_2, secondo le indicazioni della fig. 116. Alla frequenza di risonanza parallelo, il sistema equivale alla disposizione in serie di R ed R_m, ed il rapporto $\frac{V_2}{V_1}$ tende pertanto a

$$\frac{R_m}{R_1 + R_m},$$

valore assai prossimo all'unità. La risonanza parallelo non è però molto acuta in quanto che la resistenza

Fig. 116

(1) Per $0 < L_1\omega < \frac{1}{2} R_1$, il radicale varia fra R_1 e 1,12 R_1.

R è dello stesso ordine di grandezza della reattanza $L_1\omega$, non solo, ma la presenza di τL_1 in serie con C_2 modifica la tensione V_2 secondo il rapporto

$$\frac{1}{\omega C_2} : \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_2}\right),$$

il cui valore assoluto è maggiore dell'unità.

Col crescere di ω, va diminuendo l'influenza dei rami L_1 e R_m in parallelo, mentre quel rapporto va crescendo fino a raggiungere un massimo alla risonanza serie. Tale aumento è però rallentato dalla presenza di L_1 in parallelo e comunque non è molto rapido perchè il circuito serie cui il sistema tende ad equivalere per le più alte frequenze, ha risonanza poco acuta a causa dell'elevato valore di R_1. Pertanto si ha che per le pulsazioni comprese fra ω_p e ω_s le variazioni di V_2 si mantengono in limiti modesti, facendosi sensibili soltanto nell'immediata prossimità della pulsazione ω_p. Oltrepassata questa, l'influenza della L_1 in parallelo si riduce praticamente nulla, talchè il sistema equivalente si semplifica tendendo a quello di fig. 117, ed il rapporto $\frac{V_2}{V_1}$ cade secondo la legge

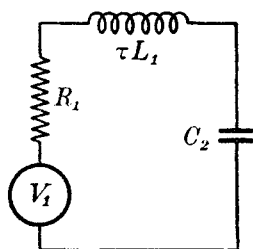



Fig. 117

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{C_2\omega\sqrt{R^2 + \left(\tau L\omega - \frac{1}{C_2\omega}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\varepsilon_s^2}\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)^2 + \left[\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)^2 - 1\right]^2}}$$

$$\left(\varepsilon_s = \frac{1}{R_1}\sqrt{\frac{\tau L}{C_2}}\right).$$

Dell'andamento generale di $\frac{V_2}{V_1}$ in funzione della frequenza si ha un esempio in fig. 114, nella quale si vede che, per una larga gamma di frequenze, il rapporto stesso si serba poco discosto dall'unità. Diminuendo le dispersioni, la gamma stessa si allarga, ma il diagramma presenterà, nell'intervallo fra ω_p ed ω_s, un avvallamento tanto più sensibile quanto più ω_p differisce da ω_s. Ciò ovviamente è dovuto al fatto che le due depressioni a destra di ω_p e a sinistra di ω_s non riescono convenientemente colmate dall'azione correttrice che il sistema τL_1, C_2 esercita su L_1 per pulsazioni non molto superiori ad ω_p, rispett. che L_1 esercita sul sistema τL_1, C_2 per pulsazioni non molto inferiori ad ω_s.

Quando si debba operare con elevate frequenze, i trasformatori a nucleo di ferro non possono più usarsi, data l'importanza notevole che per essi acquistano i fenomeni secondari (correnti parassite, isteresi). Si ricorre allora a dispositivi senza nucleo, i quali sostanzialmente non dif-

feriscono dai precedenti se non per l'ordine di grandezza del fattore d'accoppiamento k, che in tal caso differisce dall'unità di alquanti decimi. L'assenza di nuclei consente anche facilmente la realizzazione di sistemi in cui il coefficiente k può essere, entro certi limiti, variato. Per il comportamento di tali apparecchi non vi è che applicare quanto è stato dettagliatamente esposto al Cap. III.

6. - Quadripoli a carattere filtrante. — Presentano un particolare interesse per le applicazioni telefoniche e r. t. quei sistemi quadripolari per i quali è nulla la parte reale dell'esponente di trasduzione.

In tal caso, nell'ipotesi di chiusura sull'impedenza immagine, in ogni caso necessaria per realizzare il più conveniente funzionamento del quadripolo, la potenza apparente di uscita è uguale a quella di entrata, in quanto che il rapporto fra le due, avendo nullo il logaritmo, vale uno. E se, come spesso accade, si ha a che fare con quadripoli simmetrici, e quindi di chiusura sulla impedenza caratteristica, si realizza separatamente la uguaglianza fra i moduli delle correnti e fra quelli delle tensioni.

Se ciò avviene, non per una sola frequenza, ma per un gruppo — in generale continuo, cioè, come si suol dire, per una *banda* — di frequenze, la corrispondente cellula quadripolare prende il nome di *filtro*, in quanto che la sua interposizione fra un sistema alimentatore ed un sistema ricettore fa sì che, se quello contiene elementi (correnti, tensioni) di varie frequenze, in questo si ritrovano inalterati (in ampiezza, ma in generale non in fase) solo quelli aventi frequenze appartenenti alla banda o zona di filtrazione.

Tale zona, come s'è detto, è in generale continua. Se essa comprende tutte le pulsazioni inferiori ad una certa ω_2, il filtro si chiama *passa-basso*, ed ω_2 ne è la pulsazione *limite* (o *di frontiera*, o *di taglio*); se invece comprende tutte le pulsazioni superiori ad una certa ω_1, il filtro prende il nome di *passa-alto* e la zona di filtrazione è anche in questo caso determinata dalla sola ω_1, che ancora si denomina pulsazione limite, o frontiera (inferiore). Se le pulsazioni della banda di filtrazione sono quelle comprese fra due certe frontiere ω_1 ed ω_2 ($\omega_1 < \omega_2$) diverse da 0 e da ∞, il filtro dicesi *passa-banda* o *a banda passante*. Si possono infine avere anche filtri ad *eliminazione di banda*, tali cioè che la gamma costituita dalle pulsazioni passanti è quella *esterna* ad un certo intervallo ω_1, ω_2 ($\omega_1 < \omega_2$).

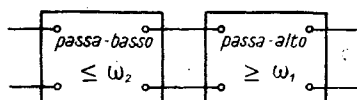



Fig. 118

È facile vedere che, con degli elementi di filtro passa-basso e passa-alto si possono costruire tutti gli altri.

Invero, per $\omega_1 < \omega_2$, disponendo in cascata un passa-basso di frontiera ω_2 con un passa-alto di frontiera ω_1, si forma ovviamente un sistema atto a lasciar passare ogni pulsazione compresa fra ω_1 ed ω_2 e ad arrestare le altre (fig. 118); ed analogamente, se si dispongono « in pa-

rallelo » un passa-basso di frontiera ω_1, con un passa-alto di frontiera ω_2, come alla fig. 119, si costituisce un sistema che lascia passare, attraverso il primo elemento, ogni pulsazione $< \omega_1$, e, attraverso il secondo, ogni pulsazione $> \omega_2$, mentre le pulsazioni comprese fra ω_1 ed ω_2 non trovano passaggio nè per l'una nè per l'altra via.

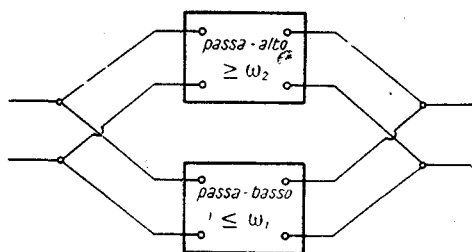



Fig. 119

7. - **Condizioni di filtrazione. - Filtri tipici elementari.** — Vediamo sotto quali condizioni un T simmetrico può avere proprietà filtranti, cioè indaghiamo se esistono pulsazioni tali che, quando il quadripolo sia chiuso sulla sua impedenza caratteristica, esso non produca, per quelle pulsazioni, attenuazione di corrente e di tensione.

Come si è detto, tale condizione equivale all'altra che l'esponente di trasduzione $\mathbf{g}$ sia un numero immaginario puro; quindi dalla (19') di Cap. IV, ricordando che (App., A, 1) è:

$$\frac{e^{ja} + e^{-ja}}{2} = \cos a \,,$$

si deduce che $1 + \frac{\mathbf{Z}_1}{2\mathbf{Z}_2}$ deve essere reale e compreso fra -1 e $+1$, cioè $\frac{\mathbf{Z}_1}{4\mathbf{Z}_2}$ reale e compreso fra 0 e -1.

Deve dunque innanzi tutto aversi un valore reale e negativo per il rapporto $\frac{\mathbf{Z}_1}{4\mathbf{Z}_2}$ e pertanto questo numero dovrà avere per argomento $\pm \pi$. Siccome poi gli argomenti di $\mathbf{Z}_1$ e $\mathbf{Z}_2$ sono compresi fra $-\frac{\pi}{2}$ e $+\frac{\pi}{2}$, ciò non può verificarsi se non quando l'argomento di $\mathbf{Z}_1$ è $\pm\frac{\pi}{2}$ e quello di $\mathbf{Z}_2$ è $\mp\frac{\pi}{2}$. Ne segue che le due impedenze $\mathbf{Z}_1$ e $\mathbf{Z}_2$ debbono essere delle pure reattanze, che indicheremo con jX_1 e jX_2, essendo X_1, X_2 numeri reali di segno opposto. Più precisamente poi, deve il rapporto $\frac{X_1}{4X_2}$ risultare compreso fra 0 e -1.

Se la costituzione del sistema è data, le grandezze X_1 e X_2 sono delle note funzioni della pulsazione ω, e le inequazioni

$$-1 < \frac{X_1}{4X_2} < 0 \tag{12}$$

definiscono le (eventuali) pulsazioni per le quali il quadripolo ha proprietà filtranti.

Siccome poi il quadrato dell'impedenza caratteristica

$$Z_0^2 = -X_1X_2 - \frac{X_1^2}{4} = -X_1^2\left(\frac{X_2}{X_1} + \frac{1}{4}\right)$$

è positivo o negativo secondo che il rapporto $\frac{X_1}{4X_2}$ è interno o esterno all'intervallo $(-1, 0)$, si conclude che le frequenze per le quali l'attenuazione è nulla oppure diversa da zero sono quelle per le quali l'impedenza caratteristica è una pura resistenza, rispettivamente una pura reattanza.

Che nel primo caso l'attenuazione prodotta dal quadripolo sia nulla si può senz'altro dedurre mediante il ragionamento che già facemmo in altra occasione (pag. 205). Nel secondo caso, la misura dell'attenuazione si può calcolare mediante la (19‴) del Cap. IV, la quale fornisce

$$e^g = 1 + \frac{X_1}{2X_2} + \frac{X_0}{X_2} \quad \text{per} \quad \frac{X_1}{X_2} > 0 \quad \text{oppure} \quad \frac{X_1}{X_2} < -4\,,$$

essendo jX_0 la reattanza caratteristica. Siccome tale X_0 ha sempre il segno di X_1 (1), si verifica agevolmente che il valore assoluto del secondo membro è sempre > 1, e precisamente esso risulta positivo (attenuazione senza sfasamento) o negativo (attenuazione con inversione di fase) secondo che è $\frac{X_1}{X_2} > 0$ o $\frac{X_1}{X_2} < -4$.

Prima di proseguire, è bene notare che una reattanza qualunque, certamente ottenuta connettendo in vario modo delle induttanze e delle capacità, ha un valore (algebrico) X che, al crescere della frequenza, *cresce sempre*.

(1) Il segno spettante ad X_0 si determina pensando che le reattanze jX_1, jX_2 siano il $\lim\limits_{R_1\to 0} \mathbf{Z}_1$, $\lim\limits_{R_2\to 0} \mathbf{Z}_2$ delle impedenze $\mathbf{Z}_1 = R_1 + jX_1$, $\mathbf{Z}_2 = R_2 + jX_2$ *a resistenza positiva*. Allora, partendo da

$$\mathbf{Z}_0^2 = \mathbf{Z}_1^2\left(\frac{\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1} + \frac{1}{4}\right),$$

si ha che $\mathbf{Z}_0$ vale il prodotto di $\mathbf{Z}_1$ per quella delle radici quadrate di $\frac{\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1} + \frac{1}{4}$ che ha positiva la parte reale. Da ciò segue che, nei casi in cui $\mathbf{Z}_0$ tende ad una pura reattanza jX_0 $\left(\text{cioè per } \frac{X_1}{X_2} > 0 \text{ oppure } < -4\right)$, tale X_0 ha sempre il segno di X_1. Infatti se X_1 e X_2 hanno lo stesso segno (primo caso), il fattore $\frac{\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1} + \frac{1}{4}$ tende ovviamente ad un numero reale positivo, ed altrettanto avviene quando X_1 e X_2 hanno segni opposti (secondo caso), perchè in tal caso il valore assoluto di $\frac{X_2}{X_1}$ è minore di $\frac{1}{4}$.

La cosa è evidente per gli elementi semplici del tipo L o C, perchè tanto $L\omega$ quanto $-\frac{1}{C\omega}$ sono funzioni *crescenti* di ω. Se ad uno di questi se ne aggiunge un secondo in serie, siccome la reattanza risultante è la somma delle componenti, si avrà che, essendo ciascuna di queste crescente con ω, altrettanto avverrà della loro somma. Se invece il secondo elemento X_2 viene aggiunto in parallelo al primo X_1, si ottiene una reattanza complessiva di valore:

$$X = \frac{1}{\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2}},$$

e poichè il denominatore di questa espressione è certamente funzione *decrescente* di ω, perchè tali sono i due termini $\frac{1}{X_1}$, $\frac{1}{X_2}$ che lo compongono, ne segue che X è crescente con ω. Se ad un sistema di due elementi se ne associa un terzo, tale associazione non potrà farsi che disponendo questo in serie o in parallelo ad uno dei due primi, e si conclude subito che il sistema risultante ha reattanza crescente con la frequenza, e così continuando si arriva a stabilire che la proposizione enunciata è vera sempre.

Per una reattanza X composta di elementi variamente collegati fra loro, si potranno avere in generale dei valori di ω pei quali la reattanza complessiva risulta nulla, altri pei quali essa risulta infinita. Il corrispondente diagramma dei valori di X avrà un andamento tale che, per pulsazioni crescenti, il passaggio attraverso una delle prime avviene con mutamento di segno dal negativo al positivo, attraverso una delle seconde con mutamento dal positivo al negativo.

Si osservino, ad es., i diagrammi della fig. 120, i quali rappresentano le variazioni della reattanza in sistemi la cui costituzione è accanto a ciascuno indicata.

Il primo *a*) è ovviamente rettilineo, il secondo *b*) è un ramo di iperbole equilatera: per il terzo *c*), che è pure un ramo di iperbole, si ha una pulsazione $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ per cui è $X = 0$, mentre il valore $X = \infty$ non si ha che per $\omega = 0$ ed $\omega = \infty$; per il quarto *d*) si ha $X = 0$ per $\omega = 0$, $\omega = \infty$, e $X = \infty$ per la pulsazione $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; pel quinto *e*) si ha una pulsazione $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$ (oltre la $\omega = \infty$) per cui è $X = 0$, ed una $\omega_2 = \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{LC_1C_2}}$ (oltre la $\omega = 0$) per cui si ha $X = \infty$. Nelle figure,

insieme ai diagrammi delle reattanze X, sono anche indicati quelli delle corrispondenti suscettanze b, il che riesce assai comodo in quei casi (ad es. *d*) ed *e*)) in cui si ha a che fare con connessioni in parallelo. I diagrammi di suscettanza nei casi elementari *a*) e *b*) sono rispettivamente una iperbole ed una retta, nel caso *c*) si trova ancora una iperbole; nel

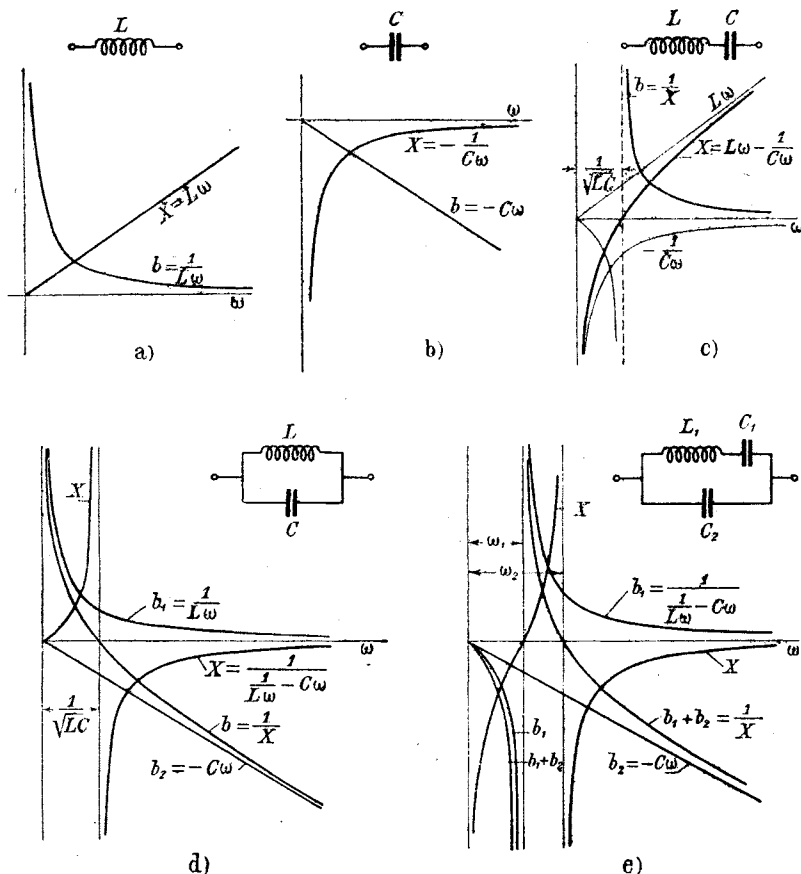
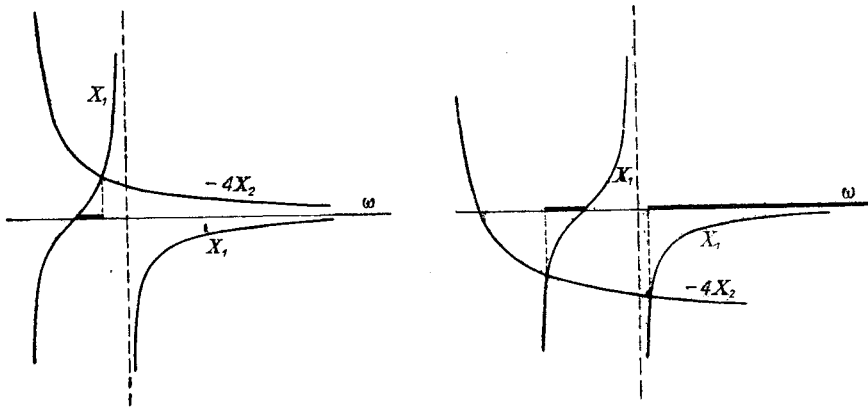



Fig. 120

caso *d*) si ha pure una iperbole, per tracciare la quale converrà *sommare* i diagrammi delle suscettanze $b_1 = L\omega$ e $b_2 = -C\omega$ delle due branche, e poi costruire il diagramma *reciproco* (cioè ad ordinate reciproche) di quello; analogamente, nel caso *e*) si sono sommati i diagrammi delle suscettanze b_1 e b_2 delle due branche ed invertito il risultato.

In generale, per conoscere se un quadripolo di reattanze ha proprietà filtranti e determinare le eventuali relative bande, basta risolvere le ine-

quazioni (12), il che può farsi assai agevolmente una volta che siano tracciati i diagrammi delle variazioni di X_1 ed X_2.

Invero, le pulsazioni cercate sono ovviamente quelle per le quali i diagrammi di X_1 e di $-4X_2$, il primo dei quali ha andamento crescente, il secondo decrescente, sono così disposti che il primo si svolge più vicino all'asse ω che non l'altro. Per es., nei due casi della fig. 121, le bande di passaggio sarebbero quelle corrispondenti ai segmenti dell'asse ω segnati con tratto ingrossato.

Figs 121

Limiteremo le nostre considerazioni a quei quadripoli le cui reattanze costitutive X_1 ed X_2 presentano una sola pulsazione (escluse la 0 e la ∞) per la quale la rispettiva reattanza assume valore nullo o infinito. Esse quindi non potranno essere costituite che da uno o due elementi L, C, fra loro connessi in serie o in parallelo.

Ciò premesso, possiamo facilmente risolvere il problema della costruzione di un quadripolo di reattanze avente proprietà filtranti per le pulsazioni di una certa gamma o banda definita dalle frontiere ω_1, ω_2 ($\omega_1 < \omega_2$), ponendo anche la condizione che le reattanze costitutive del medesimo siano composte con non più di due elementi del tipo L, C. Questi potranno essere fra loro connessi in serie o in parallelo, talchè le reattanze X_1, X_2 saranno tali da presentare, nell'intervallo $(0, \infty)$, non più di una frequenza *di risonanza* e non più di una frequenza *di antirisonanza*, così chiamando, per brevità, le frequenze per le quali la relativa reattanza assume il valore zero rispettivamente infinito.

Siccome, nell'intervallo (ω_1, ω_2), X_1 e X_2 debbono risultare di segni opposti, nessuna delle due cambierà segno nell'interno dell'intervallo stesso oppure esse cambieranno segno simultaneamente. Escludendo per ora questo caso, ciascuna delle X_1, X_2 serberà segno costante nella gamma.

Inoltre a ciascuna delle frontiere dovrà verificarsi l'una o l'altra delle relazioni:

$$\frac{X_1}{X_2} = 0 \quad \text{oppure} \quad X_1 = -4X_2 .$$

Ora, si osservi che il rapporto $\frac{X_1}{X_2}$, nell'interno della gamma, è sempre crescente o sempre decrescente secondo che X_1 è negativa o positiva, come si deduce dall'esame della

$$\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{X_1}{X_2}\right) = \frac{1}{X_2^2}\left(X_2\frac{\partial X_1}{\partial\omega} - X_1\frac{\partial X_2}{\partial\omega}\right)$$

e dal fatto che in ogni caso è $\frac{\partial X_1}{\partial\omega} > 0$, $\frac{\partial X_2}{\partial\omega} > 0$. Da ciò segue che se all'una delle frontiere è soddisfatta l'una delle precedenti, necessariamente all'altra frontiera si verifica l'altra; e precisamente si avrà:

$$\text{per} \quad X_1 > 0 \qquad \left(\frac{X_1}{X_2}\right)_{\omega=\omega_1} = 0 , \quad (X_1 + 4X_2)_{\omega=\omega_2} = 0 ;$$

$$\text{per} \quad X_2 < 0 \qquad (X_1 + 4X_2)_{\omega=\omega_1} = 0 , \quad \left(\frac{X_1}{X_2}\right)_{\omega=\omega_2} = 0 .$$

Dunque, per la costruzione del filtro richiesto basterà assumere:

a) per X_1 una reattanza nulla per $\omega = \omega_1$ e (quindi) positiva per $\omega > \omega_1$, e per X_2 una reattanza uguale a $-\frac{X_1}{4}$ per $\omega = \omega_2$, la quale sarà certamente negativa per $\omega < \omega_2$; oppure:

b) per X_2 una reattanza infinita per $\omega = \omega_1$ e (quindi) negativa per $\omega > \omega_1$ e per X_1 una reattanza che sia positiva per $\omega = \omega_1$ ed uguale a $-4X_2$ per $\omega = \omega_2$; oppure ancora:

c) per X_1 una reattanza nulla per $\omega = \omega_2$ e (quindi) negativa per $\omega < \omega_2$, e per X_2 una reattanza uguale a $-\frac{X_1}{4}$ per $\omega = \omega_1$, la quale sarà certamente positiva per $\omega > \omega_1$; o infine:

d) per X_1 una reattanza infinita per $\omega = \omega_2$ e (quindi) positiva per $\omega < \omega_2$, e per X_2 una reattanza che sia negativa per $\omega = \omega_2$ e uguale a $-\frac{X_1}{4}$ per $\omega = \omega_1$.

I tipi così costruiti sono i così detti filtri *elementari* o *tipici*.

I quattro tipi, qualora ω_1, ω_2 siano entrambi finiti e diversi da zero, corrispondono agli schemi rappresentati nella fig. 122 (a ciascuno dei quali sono annessi i diagrammi delle variazioni di X_1 e $-4X_2$

dai quali si rileva effettivamente la gamma passante) dove $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ è uguale ad ω_1 nei casi *a*) e *b*), ed uguale ad ω_2 nei casi *c*) e *d*).

Invece, se si tratta di filtri passa-basso ($\omega_1 = 0$), non sono ammissibili che le soluzioni *a*) in cui X_1 sia ridotta ad una semplice induttanza

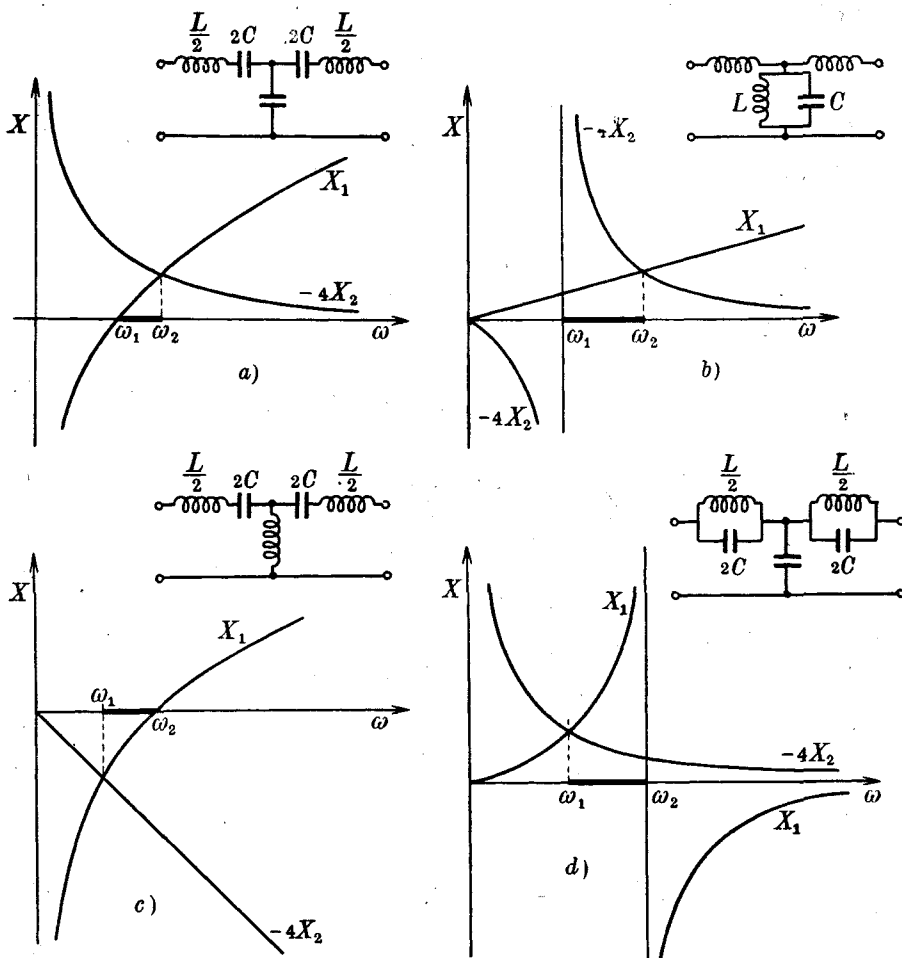



Fig. 122

o la *b*) in cui X_2 si riduce ad una capacità, con che si perviene al tipo rappresentato in fig. 122 *a*), dove la induttanza $L = 2 \cdot \frac{L}{2}$ e la capacità C costituiscono un sistema risonante per la pulsazione $\frac{\omega_2}{2}$; e se si tratta di filtri passa-alto ($\omega_2 = \infty$), occorre limitarsi alle soluzioni *c*) e *d*) in

cui X_1 sia ridotto ad una semplice capacità, rispettivamente X_2 ad una semplice induttanza, cioè ai tipi rappresentati nelle rispettive figure, dove la capacità $C = \frac{1}{2} \cdot 2C$ e la induttanza L costituiscono un sistema risonante per la pulsazione $\frac{\omega_1}{2}$.

8. - Filtri simmetrici. — L'attenuazione, che nell'interno della gamma di filtrazione è nulla, può raggiungere valore infinito fuori della gamma stessa, e precisamente, tenendo presente la relazione

$$\text{chg} = 1 + \frac{X_1}{2X_2}, \tag{13}$$

si vede che ciò può verificarsi per $X_1 = \infty$ (con X_2 finito) o per $X_2 = 0$ (con X_1 non nullo), cioè per le pulsazioni per le quali X_2 è risonante oppure X_1 antirisonante, come del resto è fisicamente evidente in quanto la circostanza dell'essere X_2 risonante equivale ad offrire un passaggio di impedenza nulla (corto circuito), come l'antirisonanza di X_1 costituisce una barriera insormontabile.

La condizione soprascritta, nel caso dei filtri-tipo, è verificata solo per le pulsazioni nulla o infinita, e precisamente si tratta dell'una o dell'altra a secondo che la relazione $X_1 + 4X_2 = 0$ è soddisfatta da ω_1 o da ω_2; si ha cioè che la pulsazione di attenuazione infinita si trova soltanto da quella parte della gamma che confina con la frontiera caratterizzata da $X_1 + 4X_2 = 0$ [1].

Dunque, sotto questo aspetto, è a dirsi che il comportamento del filtro non è simmetrico. Si può tuttavia conferirgli un carattere di simmetria facendo sì che la gamma di passaggio risulti, per così dire, costituita da due contigue gamme, relative a due filtri tipici, fra di loro riunite attraverso una pulsazione soddisfacente ad $\frac{X_1}{X_2} = 0$.

Più esattamente, se si tiene presente che nell'interno della intera gamma X_1 e X_2 debbono essere di segni opposti, si deduce subito che nell'interno della gamma stessa deve trovarsi una pulsazione ω_0 in corrispondenza della quale X_1 e X_2 mutano simultaneamente segno, cioè tale che per essa l'annullamento di $\frac{X_1}{X_2}$ avvenga sia per l'annullamento

[1] Ciò si verifica agevolmente scrivendo la effettiva espressione di $\frac{X_1}{X_2}$. Per es., nel caso di fig. 122 *a*) si ha $\frac{X_1}{X_2} = \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) C'\omega = LC'\omega^2 - \frac{C'}{C}$ che è infinita solo per $\omega \to \infty$, nel caso *b*) si ha $\frac{X_1}{X_2} = L'\omega\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right) = L'C\omega^2 - \frac{L'}{L}$, e così via.

di X_1 che per essere $X_2 = \infty$. A ciascuna delle due frontiere si dovrà poi avere $X_1 = = - 4X_2$, talchè in definitiva le X_1 e X_2 debbono soddisfare le seguenti condizioni:

(14) $$X_1 = - 4X_2 \quad \text{per} \quad \omega = \omega_1 \quad \text{e per} \quad \omega = \omega_2,$$

(15) $$X_1 = 0\,, \quad X_2 = \infty \quad \text{per una } \omega_0 \text{ compresa fra } \omega_1 \text{ e } \omega_2\,.$$

In primo luogo, in virtù della condizione (15), X_1 sarà necessariamente costituita con un sistema L_1, C_1 serie ed X_2 con un L_2, C_2 parallelo, tali che sia $\omega_0^2 L_1 C_1 = \omega_0^2 L_2 C_2 = 1$. Poi, esplicitando la (14), si ha l'equazione

$$\left(L_1\omega - \frac{1}{C_1\omega}\right)\left(C_2\omega - \frac{1}{L_2\omega}\right) = 4\,,$$

cioè

(16) $$(L_1C_1\omega^2 - 1)(L_2C_2\omega^2 - 1) = 4C_1L_2\omega^2\,.$$

Per la condizione (14), questa equazione quadratica in ω^2 deve essere soddisfatta da ω_1^2 e da ω_2^2. Siccome il prodotto delle due radici vale $\dfrac{1}{L_1C_1L_2C_2} = \omega_0^4$, si conclude che la pulsazione ω_0 coincide con la media geometrica $\sqrt{\omega_1\omega_2}$ di ω_1 ed ω_2, e pertanto si ha

(17) $$\omega_1\omega_2L_1C_1 = \omega_1\omega_2L_2C_2 = 1\,.$$

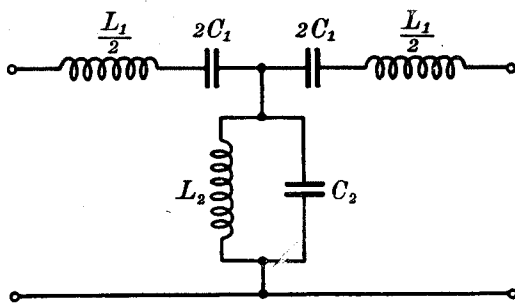



Fig. 123

I filtri così costituiti, il cui schema è rappresentato in fig. 123, godono della proprietà che, nell'interno della gamma passante, il prodotto X_1X_2 si serba costante. Precisamente si ha:

$$X_1X_2 = \frac{L_1\omega - \dfrac{1}{C_1\omega}}{\dfrac{1}{L_2\omega} - C_2\omega} = \frac{L_1C_1\omega^2 - 1}{1 - L_2C_2\omega^2}\cdot\frac{L_2}{C_1} = -\frac{L_2}{C_1} = -\frac{L_1}{C_2},$$

cioè

$$X_1X_2 = -R^2\,,$$

avendo posto

(18) $$R = \sqrt{\frac{L_2}{C_1}} = \sqrt{\frac{L_1}{C_2}}\,.$$

Siccome l'impedenza caratteristica vale

$$R_0 = \sqrt{-X_1X_2 - \frac{X_1^2}{4}} = \sqrt{R^2 - \frac{X_1^2}{4}}\,,$$

si vede che essa, per $\omega = \omega_0$, coincide con la resistenza misurata da R; non solo, ma si può aggiungere che questa rappresenta il massimo valore che R_0 può raggiungere nell'interno della gamma di passaggio. Ora, siccome le variazioni di una funzione sono meno sensibili in prossimità di un massimo, si comprende che, nell'impossibilità di chiudere il filtro su una impedenza coincidente con R_0 a tutte le frequenze, converrà effettuare la chiusura su R.

Possiamo allora risolvere completamente il problema della determinazione degli elementi L_1, C_1, L_2, C_2 costitutivi delle reattanze fondamentali X_1, X_2 in guisa da realizzare un filtro di date frontiere $\omega_1 = 2\pi f_1$, $\omega_2 = 2\pi f_2$ e di data resistenza caratteristica massima R. Ponendo, nella (16), $\omega_1\omega_2$ al posto di $\frac{1}{L_1C_1}$ ed $\frac{1}{L_2C_2}$, ed esprimendo che essa è soddisfatta per $\omega = \omega_1$ oppure per $\omega = \omega_2$, si ottiene la relazione:

$$C_1L_2 = \frac{(\omega_2 - \omega_1)^2}{4\omega_1^2\omega_2^2}\,,$$

da cui, per le (17), segue

$$C_2L_1 = \frac{4}{(\omega_2 - \omega_1)^2}\,.$$

Da queste, combinando con le (18), si traggono per L_1, C_1, L_2, C_2 i valori

$$(19)\qquad \begin{aligned} L_1 &= \frac{2R}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{R}{\pi(f_2 - f_1)}\,, & L_2 &= \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_1\omega_2}R = \frac{f_2 - f_1}{4\pi f_1 f_2}R\,,\\ C_1 &= \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_1\omega_2 R} = \frac{f_2 - f_1}{4\pi f_1 f_2 R}\,, & C_2 &= \frac{2}{(\omega_2 - \omega_1)R} = \frac{1}{\pi(f_2 - f_1)R}\,. \end{aligned}$$

Per $\omega_1 = 0$ (filtri passa-basso) e per $\omega_2 = \infty$ (passa-alto) non si ritrovano tipi diversi da quelli considerati al n. prec., in quanto che anche per quelli, come facilmente si verifica, è soddisfatta la condizione della costanza del prodotto X_1X_2 nell'interno della gamma di passaggio. Per tali filtri le (19) si semplificano come segue:

$$(19')\qquad \text{passa-basso}\quad L = \frac{2R}{\omega_2} = \frac{R}{\pi f_2}\,,\quad C = \frac{2}{\omega_2 R} = \frac{1}{\pi f_2 R};$$

$$(19'')\qquad \text{passa-alto}\quad C = \frac{1}{2\omega_1 R} = \frac{1}{4\pi f_1 R}\,,\quad L = \frac{R}{2\omega_1} = \frac{R}{4\pi f_1};$$

dove, nel primo caso, la X_1 si costituisce con la semplice induttanza L e X_2 con la semplice capacità C, e viceversa avviene per il secondo.

9. - Filtri derivati. - Filtri composti. — Per i filtri a cui siamo così pervenuti le pulsazioni di attenuazione infinita sono quelle di valore 0 e ∞, e l'impedenza caratteristica non è costante nell'interno della gamma di passaggio.

Si comprende però che, per ottenere una efficace azione filtrante, sarebbe desiderabile che l'attenuazione raggiungesse valori molto elevati appena al di là delle frontiere, come d'altra parte, per assicurare un funzionamento favorevole in tutta la gamma di passaggio, occorrerebbe che la resistenza caratteristica fosse praticamente costante nella gamma stessa.

Ad una risoluzione soddisfacente di entrambi questi problemi si perviene mediante le considerazioni seguenti.

Affinchè due quadripoli simmetrici abbiano la stessa impedenza caratteristica, occorre che fra le impedenze $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$; $\mathbf{Z}_1'$, $\mathbf{Z}_2'$ che li caratterizzano sussista la relazione

$$\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \frac{\mathbf{Z}_1^2}{4} = \mathbf{Z}_1'\mathbf{Z}_2' + \frac{\mathbf{Z}_1'^2}{4},$$

la quale, dato il quadripolo $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$, permette di calcolare la $\mathbf{Z}_2'$ appena sia assegnata la $\mathbf{Z}_1'$. Precisamente, posto

$$\mathbf{Z}_1' = m\mathbf{Z}_1\,, \quad \text{si ha} \quad \mathbf{Z}_2' = \frac{1-m^2}{4m}\mathbf{Z}_1 + \frac{\mathbf{Z}_2}{m}\,.$$

Presenta particolare interesse il caso in cui essendo $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$ costituite con elementi del tipo L o C, connessi fra loro in serie o in parallelo, tanto $\mathbf{Z}_1'$ quanto le due parti che costituiscono $\mathbf{Z}_2'$ possono costituirsi con elementi dello stesso tipo. Affinchè ciò sia, bisogna che m sia un numero reale e positivo, ed altrettanto avvenga di $\frac{1-m^2}{4m}$; a tali condizioni si soddisfa assumendo per m un numero positivo minore dell'unità.

Se il quadripolo o «cellula» $(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2)$ è uno di quelli a carattere filtrante studiati nei nn. prec., la cellula $(\mathbf{Z}_1', \mathbf{Z}_2')$ da esso dedotta in relazione ad un certo valore di m, si chiamerà la cellula « m » derivata da essa.

È anzitutto evidente che la gamma passante di una cellula derivata « m » non differisce da quella della cellula originaria: basta ricordare che la gamma stessa è caratterizzata dall'essere in essa reale la impedenza caratteristica, ed osservare che, per definizione, le due cellule hanno per ogni frequenza la stessa impedenza caratteristica. Invece non coincidono, per le due cellule, le pulsazioni ω_a di attenuazione infinita. Per es. nel caso che $(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2)$ sia un passo-basso tipico, cioè $X_1 = jL\omega$, $X_2 = \frac{-j}{C\omega}$ e quindi $\omega_2 = \infty$, si ha

$$\mathbf{Z}_1' = jmL\omega\,, \quad \mathbf{Z}_2' = -\frac{j}{mC\omega} + \frac{1-m^2}{4m}jL\omega\,;$$

la ω_a sarà la pulsazione che annulla $\mathbf{Z}_2'$ cioè

$$\omega_a = \frac{4}{\sqrt{(1-m^2)LC}} = \frac{\omega_2}{\sqrt{1-m^2}},$$

da cui

$$m^2 = 1 - \left(\frac{\omega_2}{\omega_a}\right)^2 \qquad (\omega_a > \omega_2).$$

Nel caso di un passo-alto tipico con $X_1 = -\frac{j}{C\omega}$, $X_2 = jL\omega$ si trova analogamente

$$\omega_a = \omega_1\sqrt{1-m^2}, \quad \text{da cui} \quad m^2 = 1 - \left(\frac{\omega_a}{\omega_1}\right)^2 \quad (\omega_a < \omega_1).$$

Infine, nel caso di un passa-banda simmetrico (ω_1, ω_2) derivato da una cellula L_1, C_1, L_2, C_2 ($L_1C_1\omega_1\omega_2 = L_2C_2\omega_1\omega_2 = 1$), le pulsazioni ω_a sono quelle che soddisfano alla equazione

$$\frac{1-m^2}{4m}\left(\frac{\omega_a^2L_1C_1 - 1}{\omega_a C_1}\right) + \frac{\omega_a L_2}{m(1-\omega_a^2 L_2 C_2)} = 0. \tag{20}$$

Si hanno cioè due pulsazioni di attenuazione infinita e precisamente

$$\begin{matrix}\omega_a' \\ \omega_a''\end{matrix} = \frac{\sqrt{(\omega_1+\omega_2)^2 - 4m^2\omega_1\omega_2} \mp (\omega_2 - \omega_1)}{2\sqrt{1-m^2}}$$

il cui prodotto, come facilmente si verifica, vale $\omega_1\omega_2$.

Dalla (20) si deduce poi

$$m^2 = 1 - \left\{\frac{\omega_a(\omega_2-\omega_1)}{\omega_a^2 - \omega_1\omega_2}\right\}^2.$$

Come si vede, in ogni caso la o le pulsazioni ω_a sono tanto più prossime alle frontiere quanto minore è m.

Si comprende dunque come associando in cascata una o più cellule « m » derivate da una unica cellula-tipo si possono anche realizzare quante si vogliano pulsazioni di attenuazione infinita, pur mantenendo all'impedenza caratteristica del complesso lo stesso valore che le compete per la cellula fondamentale.

Ma le cellule « m » consentono anche di affrontare con successo la risoluzione dell'altro problema che abbiamo posto, quello cioè di raggiungere una approssimativa costanza della resistenza caratteristica nell'interno della gamma, ed ecco come.

Per fissare le idee, riferiamoci ad una cellula passa-basso di frontiera ω_2 costituita da due induttanze $\frac{L}{2}$ in serie ed una capacità C in derivazione e calcoliamo le impedenze caratteristiche Z_{0T}', $Z_{0\Pi}'$ delle cellule a

T e a II costituite con gli elementi $X_1' = jmL\omega$, $X_2' = \frac{1-m^2}{4m} jL\omega - \frac{j}{\omega Cm}$ della cellula derivata « m ».

Ponendo

$$R^2 = \frac{L}{C}, \quad x = \frac{\omega}{\omega_2},$$

si ha

$$\mathbf{Z}_{0T}'\mathbf{Z}_{0\Pi}' = \mathbf{Z}_1'\mathbf{Z}_2' = R^2\{1-(1-m^2)x^2\}.$$

D'altra parte, per la proprietà fondamentale della cellula derivata « m », è

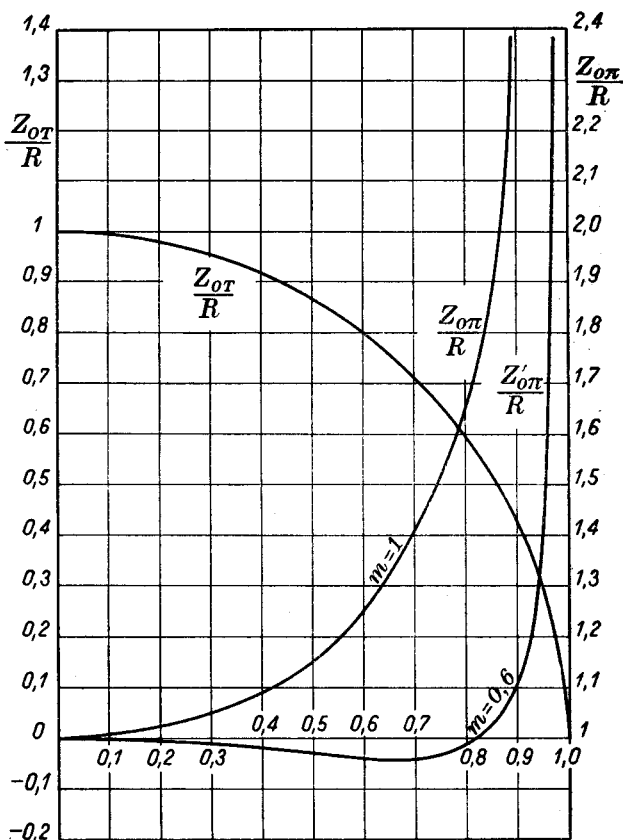
$$Z_{0T}' = Z_{0T} = R\sqrt{1-x^2},$$

talchè, sostituendo nella precedente, si ha

$$Z_{0\Pi}' = R\frac{1-(1-m^2)x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Fig. 124

In fig. 124 è rappresentato il diagramma di $Z_{0\Pi}'$ in funzione di x per i valori 1 e 0,6 di m, unitamente al (unico) diagramma di Z_{0T}' che, per ogni m, coincide con Z_{0T}. Dall'esame della precedente formola, si deduce che le variazioni di $Z_{0\Pi}'$ sono tanto meno sensibili fino a valori di x prossimi all'unità, quanto maggiore è m. Pertanto, qualora si potessero disporre le cose in modo che l'impedenza caratteristica del sistema, anzichè la Z_{0T}', fosse la $Z_{0\Pi}'$, si giungerebbe ad una soddisfacente risoluzione del nostro problema adottando convenienti valori di m.

Lo scopo può raggiungersi abbastanza facilmente associando al filtro — costituito dalla cellula fondamentale connessa in cascata con altre

tipo « m » in relazione ai desiderati valori delle pulsazioni di attenuazione infinita — un quadripolo formato con una « mezza cellula » (n. 1) del tipo « m ».

Come sappiamo, una tale cellula a squadra ha precisamente per impedenze immagini le Z'_{0T} e $Z'_{0\Pi}$, e pertanto chiudere il filtro principale con una tale cellula alla sua volta chiusa su $Z'_{0\Pi}$ equivale a caricarlo con Z'_{0T}. Scegliendo opportunamente m, si potrà far sì che $Z'_{0\Pi}$ presenti variazioni poco sentite, il che in definitiva corrisponde ad avere praticamente risoluto il problema.

La scelta di m dovrà farsi in modo da conciliare la condizione della quasi costanza dell'impedenza di chiusura con l'altra di realizzare l'attenuazione infinita per frequenza non molto discosta dalla frontiera. La prima condizione suggerirebbe di assumere m prossimo all'unità, la seconda invece di sceglierlo prossimo a zero. Si adotta generalmente una soluzione di compromesso assumendo $m = 0,6$, con che $Z'_{0\Pi}$ si mantiene praticamente costante $\left(\text{al valore } R = \sqrt{\frac{L}{C}}\right)$ fino ad oltre $x = 0,8$, come si rileva dal diagramma di fig. 124, e la relativa ω_a supera del 25 % la frontiera ω_2.

Si perviene così al seguente criterio per la costituzione del filtro: calcolati gli elementi della cellula tipica a T, si associeranno in cascata con questa una o più cellule « m » in relazione ai valori di ω_a pei quali è desiderato di raggiungere una attenuazione infinita, e si chiuderà la catena così formata con due mezze cellule ad $m = 0,6$, una per ciascuno estremo, aventi l'ufficio di portare l'impedenza caratteristica del complesso da Z_{0T} a $Z'_{0\Pi}$, al quale ultimo valore dovrà poi commisurarsi la resistenza di carico.

10. - Esempio. — A titolo di esempio, mostriamo come si potrebbe calcolare un filtro-passo-basso destinato a funzionare su un carico di 600 Ω, essendo la frequenza di frontiera $\omega_2 = 2500$ Hz e la frequenza di attenuazione infinita $\omega_a = 2700$ Hz (quale può ritenersi sufficiente per assicurare una buona « acutezza » di taglio).

La resistenza di carico dovrà corrispondere alla impedenza immagine esterna della mezza cellula terminale con $m = 0,6$, e, poichè, dette L e C l'induttanza e la capacità della corrispondente cellula-tipo, si può ritenere che per valori di m sufficientemente prossimi all'unità, la $Z'_{0\Pi}$ valga $\sqrt{\frac{L}{C}}$ in tutta la gamma di passaggio, si dedurranno gli elementi della cellula fondamentale mediante le

$$L = \frac{R}{\pi f_2} = 0,762 \text{ H}\,, \quad C = \frac{1}{\pi f_2 R} = 0,213\,\mu\text{F}\,.$$

Per assicurare il valore infinito della attenuazione per 2700 Hz, occorrerà disporre di una cellula derivata da questa con

$$m = \sqrt{1 - \left(\frac{2500}{2700}\right)^2} = 0{,}376\,.$$

Gli elementi costitutivi di tale cellula saranno:

rami longitudinali: due induttanze di $\dfrac{0{,}376 \cdot 0{,}76^2}{2} = 0{,}144$ H ciascuna,

ramo trasversale: una induttanza di $\dfrac{1 - 0{,}376^2}{4 \cdot 0{,}376}\, 0{,}762 = 0{,}435$ H ed una capacità di $0{,}376 \cdot 0{,}213 = 0{,}08\ \mu$F.

Gli elementi costitutivi delle cellule $m = 0{,}6$ saranno:

rami longitudinali: due induttanze di $\dfrac{0{,}6 \cdot 0{,}762}{2} = 0{,}2286$ H,

ramo trasversale: una induttanza di $\dfrac{1 - 0{,}6^2}{4 \cdot 0{,}6}\, 0{,}762 = 0{,}203$ H e una capacità di $0{,}6 \cdot 0{,}213 = 0{,}128\ \mu$F.

Il filtro corrisponderà dunque allo schema indicato in fig. 125.

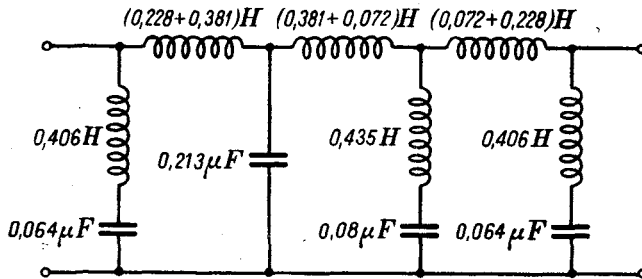



Fig. 125

Qualora ci si contentasse di una $f_a = 1{,}25\, f_2 = 3125$ Hz, si potrebbe sopprimere la cellula $m = 0{,}376$, in quanto che la presenza delle cellule terminali ad $m = 0{,}6$ basta per assicurare attenuazione infinita per detta frequenza.

Considerazioni del tutto simili potrebbero svolgersi nel caso di filtri passa-alto e bassa-banda; per questi ultimi, naturalmente, i calcoli si presentano un po' più laboriosi. Per quanto concerne le frequenze di attenuazione infinita, si deve tener presente che, quando si parte dalla cellula tipica, ad ogni valore di m corrispondono due frequenze f_a aventi per media geometrica f_0. Pertanto, ove fossero desiderati due valori $f_{a1} < f_1$ e $f_{a2} > f_2$ non soddisfacenti a quella condizione, occorrerà far uso di due distinte cellule « m », con che in definitiva il sistema presen-

terà attenuazione infinita non soltanto per le due frequenze f_{a1} ed f_{a2}, ma anche per le $\frac{f_0^2}{f_{a1}}$ ed $\frac{f_0^2}{f_{a2}}$, che sono distinte da quelle ogni qualvolta $f_{a1} f_{a2}$ differisce da f_0^2.

11. - Filtri per alternatori e per rettificatori. — Come si è detto, i filtri trovano in generale applicazione in quei casi in cui, avendo a che fare con elementi d'entrata comprendenti contemporaneamente più frequenze, interessi eliminarne talune all'uscita; più esattamente attenuarne talune, esaltandone altre.

A tale proposito è da osservare che per lo più le frequenze che per ogni breve intervallo di tempo costituiscono gli elementi d'entrata non sono in generale molto numerose; pur tuttavia la opportunità di disporre di un'azione filtrante per una intera gamma sorge pel fatto che per le pulsazioni entranti si prevedono nel tempo escursioni abbastanza ampie entro un determinato intervallo. Come vedremo in seguito, ciò è quanto si presenta nelle applicazioni radiotelefoniche.

In altri casi invece il problema della filtrazione può porsi in termini più semplici, in quanto che le pulsazioni con cui si ha a che fare non sono destinate a coprire in modo continuo tutta una gamma, ma soltanto a percorrere una serie finita (o infinita, ma *non* continua) di valori.

Ciò è quanto per esempio avviene nel caso di generatori di corrente alternata di tipo elettromeccanico (od anche di altro tipo, per es. a triodi) quando si tenda a correggere la curva di tensione della corrente generata, nel senso di depurarla dagli armonici che inevitabilmente accompagnano la sinusoide fondamentale, oppure per eliminare tutti gli elementi a carattere alternativo che accompagnano la tensione e la corrente fornite da generatori cui si chiedono tensioni o correnti continue (dinamo ordinarie, rettificatori a diodi).

In casi di tal genere, non interessa che l'azione filtrante abbia, rispetto alla frequenza, carattere continuo, mentre invece è importante che l'azione stessa sia assicurata per un largo campo di variazione della impedenza di utilizzazione. Lo scopo può raggiungersi mediante un filtro del tipo passa-basso, studiato in modo tale che alla pulsazione principale, cioè a quella che interessa conservare all'uscita, sia assicurata l'uguaglianza fra le impedenze d'entrata e d'uscita.

Ricordando quanto fu spiegato nel Cap. prec., si ha senz'altro che un sistema siffatto potrà costituirsi mediante un quadripolo equivalente ad un tronco di linea non dissipativa di lunghezza corrispondente ad un numero intero di mezze lunghezze d'onda, cioè con un quadripolo di reattanze caratterizzato dal valore $j\pi$ dell'esponente di trasduzione g, per modo che si avrà $\mathrm{ch}\,\mathrm{g} = -1$, $\mathrm{sh}\,\mathrm{g} = 0$.

Se, al solito, indichiamo con jX_1, jX_2 le reattanze del T equivalente, valutate alla pulsazione principale, dovrà dunque aversi, per la (13):

$$-1 = 1 + \frac{X_1}{2X_2}, \quad \text{cioè} \quad X_1 = -4X_2 .$$

Ciò val quanto dire che il T ha la struttura di un filtro passa-basso di cui la pulsazione ω_2 coincide con la frontiera. Evidentemente un tale stato di cose non è conveniente. È invece ovvia l'opportunità che la pulsazione desiderata venga a trovarsi nell'interno della gamma passante.

Ciò può realizzarsi facilmente costituendo il sistema con 2, 3,..., n cellule aventi struttura analoga, ma esponente di trasduzione rispettivamente uguale a $j\frac{\pi}{2}$, $j\frac{\pi}{3}$,... $j\frac{\pi}{n}$, cioè con cellule equivalenti a tronchi di linea di un quarto, un sesto,..., $\frac{1}{2n}$ di lunghezza d'onda, costituenti nel loro complesso l'equivalente di una linea di mezza lunghezza d'onda.

Possiamo anzi precisare che il complesso stesso risulterà tanto più efficiente quanto minore è il numero degli elementi che lo compongono. Infatti, indicando con L e C l'induttanza e la capacità costituenti le reattanze X_1 ed X_2, la condizione cui questi debbono soddisfare risulta essere:

$$\text{per } n = 2: \quad 0 = 1 + \frac{X_1}{2X_2} ; \quad \text{per } n = 3: \quad \frac{1}{2} = 1 + \frac{X_1}{2X_2} ;$$

$$\text{per } n = 4: \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 + \frac{X_1}{2X_2}, \ldots$$

cioè rispettivamente

$$LC\omega_0^2 = 2 , \quad LC\omega_0^2 = 1 , \quad LC\omega_0^2 = 2 - \sqrt{2} , \quad \ldots$$

La pulsazione di frontiera ω_2 che delimita la gamma di passaggio del filtro passa-basso ottenuto associando un numero qualunque di cellule siffatte è data da

$$LC\omega_2^2 = 4 ,$$

e pertanto il rapporto fra la pulsazione di frontiera e quella di funzionamento risulta, per ognuno dei considerati valori di n:

$$\sqrt{2} = 1{,}41 , \quad 2 , \quad \frac{2}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} = 2{,}28 , \quad \ldots$$

Ne consegue che, mentre per $n = 2$ la seconda armonica è già compresa nella gamma attenuata, per $n = 3$ si troverebbe invece al limite della gamma di passaggio, per $n = 4$ all'interno della gamma stessa, e così via. È dunque evidente l'utilità di adottare $n = 2$.

La costituzione del filtro diviene così quella rappresentata in fig. 126, dove la coppia L, C è risonante alla pulsazione principale di funzionamento. È da osservare che un sistema siffatto, nel caso di funzionamento a vuoto (impedenza di carico infinita), può dar luogo a sovracorrente nell'induttanza centrale; si tratta invero di un sistema equivalente ad una linea di mezza lunghezza d'onda, e il caso considerato corrisponde

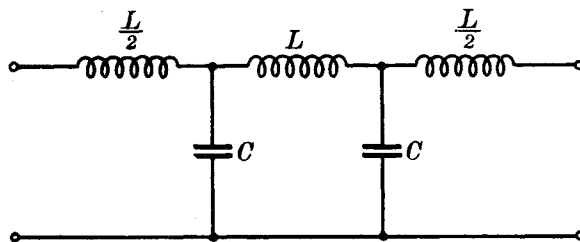



Fig. 126

a un regime stazionario con un nodo di corrente all'estremità, e quindi un ventre al centro.

Le costanti d'attenuazione relative alle successive armoniche vanno rapidamente crescendo con l'ordine delle armoniche stesse. Invero, mentre alla frequenza fondamentale si ha $X_1 = -2X_2$, per l'armonica n^{ma} il rapporto $\frac{X_1}{2X_2}$ vale $-n^2$, in quanto che X_1, X_2 divengono in valore assoluto n volte maggiore, rispettivamente minore. Detto cioè $g_n = b_n + ja_n$ l'esponente di trasduzione relativo all'armonica n^{ma}, si ha

$$\text{ch}\, g_n = \text{ch}\,(b_n + ja_n) = 1 - n^2\,,$$

vale a dire

$$\text{ch}\, b_n = n^2 - 1\,, \quad a_n = \pi\;;$$

la costante d'attenuazione dell'intero sistema, composto di due cellule, sarà $2b_n$, ed il corrispondente rapporto d'attenuazione e^{2b_n} vale circa $4(n^2 - 1)^2 - 2$ (1).

Particolarmente interessante per le applicazioni è il caso dei filtri per rettificatori, cioè di sistemi la cui funzione è di eliminare residui alternativi da apparecchi destinati a fornire tensioni e correnti continue. Tali residui sono in generale rappresentati da una componente alternata di data pulsazione ω, e le pulsazioni da eliminare sono quindi tale ω stessa ed i suoi multipli. Sistemi siffatti, dei quali avremo occasione di occuparci in sede opportuna, presentano la costituzione tipica dei filtri passa-basso,

(1) Invero, essendo $\text{ch}2b_n \doteq 2\text{ch}^2 b_n - 1 = 2(n^2 - 1)^2 - 1$ che per $n \geq 2$ è ≥ 17, il $\text{sh}2b_n$ coincide praticamente con $\text{ch}2b_n$ (per $n = 2$ la differenza fra i due numeri è minore del 2%) e quindi è $e^{2b_n} \cong 2\text{ch}2b_n$.

e la loro azione riesce tanto più efficiente quanto più lontana dalla frontiera è la minima frequenza che occorre eliminare, cioè quanto maggiori sono i valori delle induttanze disposte in serie e delle capacità derivate.

12. - **Strutture a Π.** — Ci siamo fin qui riferiti, per fissare le idee, a strutture a T, ma è evidente che tutte le considerazioni svolte nei nn. prec. si possono estendere al caso duale, scambiando ovunque reattanza

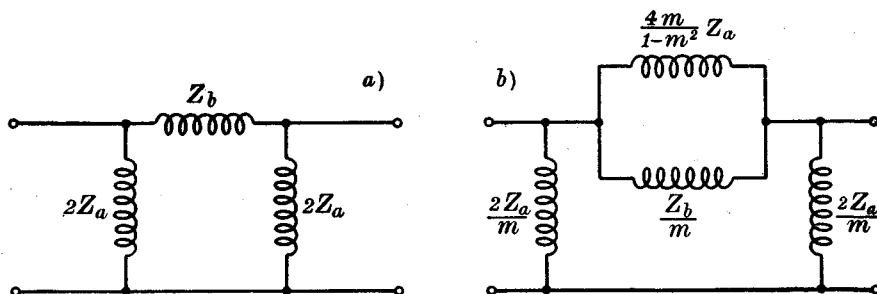



Fig. 127

con suscettanza, la disposizione a T con quella a Π; L con C, elementi in serie con elementi in parallelo, ecc.

Così, in particolare, da una cellula - tipo a Π di elementi $\mathbf{Z}_a$, $\mathbf{Z}_b$ (fig. 127 *a*), si otterranno le corrispondenti tipo « *m* » con la disposizione indicata in fig. 127 *b*).

Ad es., la disposizione duale di quella rappresentata dalla fig. 126 si presenta come in fig. 128, dove la coppia $L, \frac{C}{2}$ è risonante alla pulsazione principale, e presenta pericolo di sovratensione al condensatore centrale nel caso di corto circuito del carico.

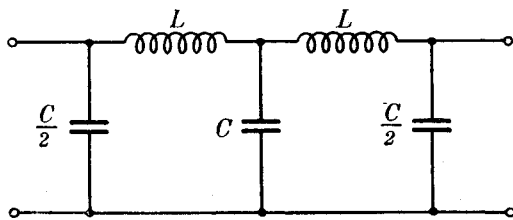



Fig. 12

13. - **Azione filtrante dei sistemi semplici serie e parallelo.** — Osserveremo infine come, per il problema che ci siamo posti al n. 11, si possa indicare una soluzione particolarmente semplice. Invero, per separare una delle componenti armoniche, per es. la fondamentale, da un elemento d'entrata di pulsazione ω, basta ricorrere ad una semplice impedenza la cui pulsazione di risonanza sia precisamente ω, ed il cui coefficiente di risonanza (III, 7) sia sufficientemente elevato, cioè tale che la corrispondente curva di risonanza presenti una notevole acuità.

Così, se un sistema (R, L, C) in serie viene alimentato con una f. e. m. periodica non sinusoidale di pulsazione $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, e le cui successive armoniche hanno le ampiezze:

$$E_1, \quad E_2, \quad \ldots, \quad E_n, \quad \ldots,$$

per lo più decrescenti (cfr. App., *A*, 7), la corrente I attraverso quella impedenza sarà pure non sinusoidale ed altrettanto avverrà ad es. della tensione V ai capi di C.

Indichiamo con

$$I_1, \quad I_2, \quad \ldots; \quad V_1, \quad V_2, \quad \ldots$$

le ampiezze delle successive armoniche di I e di V.

Tenendo presente che è $LC\omega^2 = 1$, ed indicando al solito con ε il coefficiente di risonanza $\left(\varepsilon = \frac{L\omega}{R} = \frac{1}{RC\omega}\right)$, si ha $I_1 = \frac{E_1}{R}$ per $n = 1$ e, per ogni $n > 1$:

$$I_n = \frac{E_n}{\sqrt{R^2 + \left(Ln\omega - \frac{1}{Cn\omega}\right)^2}} = \frac{E_n}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2\left(n - \frac{1}{n}\right)^2}},$$

che, se ε è sufficientemente grande, talchè l'unità possa trascurarsi in confronto ad ε^2, equivale sensibilmente a:

$$I_n = \frac{E_n}{\varepsilon\left(n - \frac{1}{n}\right)R}, \quad \text{cioè} \quad \frac{I_n}{I_1} = \frac{1}{\varepsilon\left(n - \frac{1}{n}\right)} \frac{E_n}{E_1}.$$

Quindi, anche indipendentemente dal fatto che le E_n generalmente decrescono al crescere di n, si vede che le I_n vanno rapidamente diminuendo, il che equivale a dire che la corrente I riesce sensibilmente esente da armoniche, o, come si suol dire, *pura*.

Per le componenti della tensione V ai capi di C si ha:

$$V_1 = \varepsilon E_1, \quad \text{e} \quad (\text{per } n > 1) \quad V_n = \frac{I_n}{Cn\omega} = \frac{I_n R\varepsilon}{n} = \frac{E_n}{n\left(n - \frac{1}{n}\right)},$$

da cui si vede che anche la tensione ai capi di C riesce notevolmente più pura di quella di alimentazione.

Le precedenti, per n superiore a poche unità, equivalgono approssimativamente a:

$$I_n \backsimeq \frac{E_n}{\varepsilon n R}, \quad V_n \backsimeq \frac{E_n}{n^2}.$$

Nelle applicazioni si presenta assai frequentemente la disposizione *duale* di questa, cioè il caso in cui un sistema (g, C, L) in parallelo è alimentato da una corrente I periodica non sinusoidale, di pulsazione $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Possiamo senz'altro asserire che in tal caso la tensione V ai capi del sistema ha per ampiezze della prima e della n^{ma} $(n > 1)$ armonica:

$$V_1 = \frac{I_1}{g}, \qquad V_n = \frac{I_n}{\varepsilon\left(n - \frac{1}{n}\right)g} \backsimeq \frac{I_n}{\varepsilon n g},$$

e che la corrente nel ramo L ha per ampiezza della prima armonica εI_1, e della armonica n^{ma} $(n > 1)$:

$$\frac{I_n}{n\left(n - \frac{1}{n}\right)} \backsimeq \frac{I_n}{n^2}.$$

È importante notare che la *potenza* assorbita dal sistema equivale sensibilmente a quella corrispondente alla prima armonica. Infatti per l'armonica n^{ma} (1) si ha, con ovvio significato dei simboli:

$$w_n = \frac{1}{2} V_n I_n \cos\varphi_n .$$

Ora, i valori di $\cos\varphi_1$ e $\cos\varphi_n$ $(n > 1)$ sono:

$$\cos\varphi_1 = 1, \quad \cos\varphi_n = \frac{g}{\sqrt{g^2 + \left(Cn\omega - \frac{1}{Ln\omega}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2\left(n - \frac{1}{n}\right)^2}} \backsimeq$$

$$\backsimeq \frac{1}{\varepsilon\left(n - \frac{1}{n}\right)} \backsimeq \frac{1}{\varepsilon n},$$

quindi, per ogni $n > 1$, risulta:

$$w_n \backsimeq \frac{1}{2}\,\frac{I_n^2}{\varepsilon n g}\cdot\frac{1}{\varepsilon n} = \frac{I_n^2}{2\varepsilon^2 n^2 g}.$$

Siccome poi è $w_1 = \frac{I_1^2}{2g}$, si ha:

$$\frac{w_n}{w_1} \backsimeq \frac{1}{\varepsilon^2 n^2}\left(\frac{I_n}{I_1}\right)^2,$$

e pertanto la diminuzione delle w risulta assai rapida.

(1) La potenza totale del sistema uguaglia la somma delle potenze pertinenti separatamente a ciascuna armonica, in quanto che le potenze corrispondenti alla combinazione di una corrente con una tensione aventi diverso ordine armonico, sono tutte nulle, come risulta applicando formole note (Cfr. App., *A*, 7).

A titolo di esempio, supponiamo di inviare un'onda di corrente *rettangolare* (cioè del tipo rappresentato in fig. 432, App., *A*, 7) di ampiezza 0,1 amp. e di pulsazione $\omega = 10^6$, in un circuito costituito da una $R = 5\Omega$ ed una $L = 0{,}5$ mH in parallelo con una $C = 1$ mμF. Il coefficiente di risonanza risulta $\varepsilon = 100$; per cui, essendo $LC\omega^2 = 1$, possiamo ritenere il sistema equivalente ad uno a tre rami g, L, C con gli stessi valori di L e C e con $g = \frac{1}{R\varepsilon^2} = 2 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{ohm}}$.

Le ampiezze delle successive armoniche della corrente alimentatrice essendo (cfr. App., *A*, 7):

$$I_1 = 0{,}126\,, \quad I_3 = 0{,}042\,, \quad I_5 = 0{,}025\,, \ \ldots \quad (\text{amp.})\,,$$

per le ampiezze delle successive armoniche delle tensioni V ai capi del sistema si trovano i valori:

$$V_1 = 6300\,, \quad V_3 = 7{,}87\,, \quad V_5 = 2{,}62\,, \ \ldots \quad (\text{volt})\,,$$

e per quelle della corrente i nel ramo L:

$$i_1 = 12{,}6\,, \quad i_3 = 5{,}24 \cdot 10^{-3}\,, \quad i_5 = 1{,}06 \cdot 10^{-3}\,, \ \ldots \quad (\text{amp.})\,.$$

Infine le potenze delle successive armoniche risultano:

$$w_1 = 397\,, \quad w_3 = 0{,}62 \cdot 10^{-3}\,, \quad w_5 = 0{,}07 \cdot 10^{-3}\,, \ \ldots \quad (\text{watt})\,;$$

cioè, mentre la prima è di circa 400 watt, la terza non raggiunge un milliwatt, e la quinta è soltanto di 70 microwatt.

Come si vede, l'effetto filtrante è assai energico.

I sistemi qui esaminati possono sostanzialmente ritenersi derivati dal concetto fondamentale di associare un elemento dissipativo (resistenza) ad una reattanza composta di due elementi L e C in serie o in parallelo, e pertanto tale da presentare *una* pulsazione di risonanza. La presenza dell'elemento dissipativo (che sostanzialmente può pensarsi costituire il « carico » del sistema), mentre rende possibile l'effettivo trasferimento di potenza fra l'entrata e l'uscita, determina contemporaneamente una depressione della curva di risonanza (che in assenza di esso presenterebbe un punto di infinito) rendendo così tanto meno perfetta l'azione filtrante quanto maggiore è l'importanza dell'elemento dissipativo in confronto al rapporto fra l'induttanza e la capacità, la cui radice quadrata corrisponde alla media geometrica fra le due reattanze relative.

A tale proposito è opportuno segnalare qui un interessante significato fisico del rapporto $\sqrt{\frac{L}{C}}$ fra gli elementi costitutivi di una reattanza tipo serie o parallelo. Tale reattanza, per la disposizione in serie, presenta

valore nullo alla pulsazione $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, mentre per pulsazioni ω poco diverse da questa il suo valore è

$$X = L\omega - \frac{1}{C\omega} \backsimeq 2L\omega_0\sigma = 2\sqrt{\frac{L}{C}}\,\sigma ,$$

essendo al solito $\sigma = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$ la misura del disaccordo (ed altrettanto può dirsi nel caso della disposizione parallelo con riferimento alla suscettanza). Si può dunque asserire che l'espressione $\sqrt{\frac{L}{C}}$ corrisponde al limite, per $\omega \rightarrow \omega_0$, del rapporto fra la reattanza ed il doppio del disaccordo. Essa perciò dà una misura della acutezza di risonanza del sistema L,C. Da questa nozione si può far discendere quella del coefficiente di risonanza definendo questo come rapporto fra la misura di quella acutezza e quella dell'elemento dissipativo.

Seguendo tale ordine di idee si comprende facilmente che, associando elementi dissipativi a sistemi di reattanze presentanti *più di una* pulsazione di risonanza, cioè tali da assumere valore nullo (o infinito) per più di una pulsazione, si consegue una azione filtrante analoga alla precedente, ma che da essa differisce in quanto presenterà due o più pulsazioni particolarmente favorite. E si comprende come, avvicinando opportunamente queste, si possono realizzare sistemi per i quali la curva dell'elemento di uscita in funzione della frequenza presenta ordinate sensibilmente costanti nell'intervallo fra le frequenze speciali predette, pur conservando andamenti convenientemente discendenti all'esterno degli intervalli stessi.

Un cospicuo esempio di tali sistemi è stato da noi studiato in III, 22, dove abbiamo esaminato le proprietà filtranti dei circuiti accoppiati (filtri di banda). Le attitudini filtranti di siffatti sistemi, come abbiamo veduto, sono legate al valore di un coefficiente di risonanza medio (precisamente si tratta della media armonica) dei circuiti componenti, e la larghezza della banda favorita è essenzialmente determinata dal coefficiente d'accoppiamento, mentre la pulsazione media della banda stessa è, come nel caso del circuito semplice, determinata dagli elementi costitutivi dei circuiti componenti, separatamente considerati.

CAPITOLO SETTIMO

ELEMENTI CIRCUITALI NON LINEARI CIRCUITI DIFFERENZIALI

1. - Resistenze in senso generale. - Resistenze positive e negative. — Consideriamo un apparecchio qualunque a due morsetti, tale che ai suoi capi si possa applicare una tensione V — entro certi limiti arbitraria — ottenendosi, in corrispondenza di ogni valore ad essa attribuito, una certa intensità di corrente I circolante nell'interno dell'apparecchio stesso.

Indicando con A e B i due morsetti, se conveniamo di chiamare positive le tensioni applicate quando esse sono tali da rendere, ad es., il morsetto A positivo rispetto a B, correlativamente chiameremo positive le correnti che *nell'interno* dell'apparecchio circolano nel senso da A a B.

In un certo stato di funzionamento di tale apparecchio, cioè con una certa tensione V applicata, sia I la corrispondente corrente, e poniamo:

$$R = \frac{V}{I} .$$

La grandezza R così definita, che sarà misurata in ohm, se V ed I sono misurati in volt e ampere, potrà denominarsi la *resistenza equivalente* all'apparecchio nelle condizioni di funzionamento considerate.

Quando si verifichi che tale R risulta positiva e indipendente dalla V applicata, si dirà che l'apparecchio è un conduttore *ohmico*, ed R ne misura la resistenza, intesa nel senso ordinario.

Ma non sempre ciò avviene. Si pensi ad es., ad un generatore di f. e. m. E e di resistenza interna r; per esso, come agevolmente si verifica, la R di dianzi è rappresentata da:

$$R = r - \frac{E}{I} ,$$

essendo I la intensità della corrente *erogata* dal generatore (intesa cioè positiva se cospirante con E); dunque R non è indipendente dalla tensione $V(= rI - E)$ e può anche risultare negativa.

Ciò premesso, consideriamo un circuito comprendente una sede di f. e. m. E di resistenza interna nulla (trascurabile) in serie con una resistenza ohmica (ordinaria) R.

L'equazione che esprime la legge di Ohm:

$$E - RI = 0 ,$$

può scriversi sia sotto la forma:

$$E + E' = 0 , \tag{1}$$

sia sotto l'altra:

$$R + R' = 0 , \tag{2}$$

dove nel primo caso si è posto $E' = -RI$, nel secondo invece $R' = -\frac{E}{I}$.

Sotto l'aspetto (1) essa ci dice che lo stato di funzionamento elettrico del circuito è *determinato* dalla condizione che le diverse f. e. m. in esso esistenti si facciano equilibrio, intendendo che E' sia l'equivalente di una f. e. m. contraria a quella del generatore. Il fatto che essa, a differenza della E, è dipendente dalla corrente, fa sì che il regime elettrico si realizza con una intensità di corrente ben determinata, precisamente quella che, secondo la (1), consente l'annullamento della f. e. m. *totale* agente nel circuito.

È peraltro da osservare che se in questo, anzichè una E ed una R, vi fossero due effettive sedi di f. e. m. E, E' soddisfacenti la (1), si avrebbe ancora uno stato di equilibrio, pel quale però il regime corrisponderebbe a valore *nullo* della corrente.

Di questi due casi si può agevolmente formarsi una immagine meccanica, pensando ad un sistema materiale soggetto a forze che, nel secondo caso, siano staticamente in equilibrio, e, nel primo, siano invece talune fisse e date, ed altre dipendenti dalla velocità. Nel caso delle forze in equilibrio statico, il sistema, se inizialmente era in quiete, non assume moto alcuno; nell'altro invece, in virtù delle forze applicate, assumerà una velocità crescente, la quale trova la sua limitazione — da cui consegue la stabilizzazione del moto in condizioni di equilibrio dinamico — quando le forze nascenti per effetto della velocità raggiungono valori tali da equilibrare le forze applicate.

Anche la (2) esprime uno stato di equilibrio del circuito elettrico, ma sotto la forma di annullamento della *resistenza totale*. Il generatore, in quanto *eroga* corrente, cioè è nel suo interno attraversato da corrente avente il senso dal morsetto negativo al positivo, è, in ogni suo stato di tale funzionamento generatorico, equivalente ad una resistenza negativa R', il cui valore assoluto però varia col variare della corrente erogata. Ed è appunto per questa ragione che riesce possibile alla corrente

di stabilizzarsi ad un ben determinato valore: precisamente quello pel quale la resistenza negativa equivalente al generatore risulta, secondo la (2), uguale in valore assoluto alla resistenza ohmica positiva del circuito.

Non è a credere che le cose vadano sempre così, cioè che si abbia sempre a che fare con generatori di f. e. m. costante. Per es., se la sede di f. e. m. considerata fosse rappresentata da una dinamo ad eccitazione in serie, marciante a velocità costante ed operante nel tratto rettilineo della caratteristica di magnetizzazione (1), si avrebbe per E una espressione del tipo AI, essendo I la corrente che percorre l'induttore e l'indotto (2) ed A una costante, per cui tale apparecchio equivale ad una *resistenza negativa* di valore assoluto A, e quindi *indipendente dalla corrente.*

Orbene, se è $A = R$, la (2) è identicamente soddisfatta, e quindi risulta *indeterminata* la corrente di regime, vale a dire il sistema non consente la stabilizzazione ad un particolare valore di corrente; mentre, se A è diverso da R, nessuno stato di regime è possibile (3).

In generale, quando in un circuito è inserita una sede di f. e. m. E ed un organo di resistenza equivalente R — eventualmente entrambe funzioni della corrente —, i possibili stati di funzionamento elettrico sono quelli per i quali risulta soddisfatta la equazione del tipo (1) o la sua equivalente del tipo (2).

2. - Significato energetico del segno della resistenza. — Moltiplicando la (1) per I si ha la relazione (energetica):

$$EI + E'I = 0\,,$$

la quale esprime il principio della conservazione dell'energia, in quanto che da essa si rileva che *la somma delle potenze apportate al circuito sotto forma elettrica è in ogni istante nulla.*

Come è noto (El., III, 6), ad ogni E cospirante con I corrisponde *entrata* di potenza nel sistema e conversione di essa in potenza elettrica, mentre, ovunque esiste una sede di f. e. m. E' contraria alla corrente, si ha consumo di potenza elettrica, e contemporanea *uscita* di potenza dal circuito, sotto una od altra forma a seconda della natura di E' (ad es., se E' è la f. e. m. di un accumulatore sotto carica o di un bagno elettrolitico, la potenza uscente si manifesta sotto forma chimica, se è una f. e. m. dovuta a induzione per movimento, la manifestazione uscente è di carattere meccanico, e così via).

(1) Prescindiamo per semplicità del magnetismo residuo.

(2) Si può qui prescindere dalle resistenze ohmiche degli avvolgimenti, ritenendo i loro valori sottratti dalla costante A.

(3) Si escludono i casi $I = 0$ ed $I = \infty$, di nessun interesse pratico il primo, fisicamente assurdo il secondo.

A conclusione analoga si perviene utilizzando la (2) dopo averla moltiplicata per il numero, sempre positivo, I^2, e si ha così che le resistenze positive sono indice di *uscita* di energia dal circuito, le negative di *entrata*. Si potrebbe, per così dire, pensare che, sotto tale punto di vista, le potenze entranti vengano assimilate *a calore entrante*, come se si avesse una manifestazione di tipo effetto Joule in senso opposto alla consueta.

Istruttivo a tale proposito è lo studio del circuito equivalente di una macchina asincrona (El., XIV, 4), ove la manifestazione meccanica si localizza nella resistenza $R_2 \frac{1-s}{s}$ che costituisce il carico fittizio del trasformatore equivalente e che, per valori dello scorrimento s negativi oppure positivi > 1, diviene negativa, corrispondentemente al fatto che in tali casi la potenza meccanica è *assorbita* dal rotore, anzichè *resa* al suo albero. Per contro, per $0 < s < 1$, si ha invece potenza meccanica resa, e la sua espressione assume l'aspetto caratteristico delle potenze *uscenti* sotto forma di calore Joule (rI^2 con $r = R_2 \frac{1-s}{s} > 0$), pur trattandosi di manifestazione diversa.

In modo analogo, nello studio che faremo della irradiazione energetica delle antenne r. t. trasmittenti, saremo condotti a definire una corrispondente resistenza (rapporto fra la potenza uscente e il quadrato della corrente), a mezzo della quale si conferisce alla espressione della potenza uscente stessa l'aspetto formale di calore Joule.

Del resto, è da osservare che, anche in molti dei casi in cui si tratti di vero e proprio effetto Joule, una definizione precisa della resistenza non può farsi se non ricorrendo al rapporto $\frac{\text{potenza}}{\text{quadrato corrente}}$. Basta, per es., pensare al caso di un conduttore percorso da corrente ad alta frequenza (II, 2) o comunque con distribuzione non uniforme nella sezione di passaggio: difatti, in tali casi, non è possibile in alcun altro modo addivenire alla precisazione della nozione di quella grandezza che noi denominiamo resistenza.

3. - Curva caratteristica di un apparecchio. - Conduttanza e resistenza differenziale. — Per un apparecchio generico a due morsetti, come quello descritto al n. 1, non potrà parlarsi di resistenza, se non con riferimento ad un particolare stato di funzionamento. In altri termini, il suo comportamento elettrico, anzichè da un numero, potrà essere definito soltanto assegnando la relazione $I = f(V)$ che lega i valori corrispondenti delle tensioni impresse e delle correnti circolanti.

Tale relazione, che in taluni casi potrà essere dedotta dalla conoscenza della struttura dell'apparecchio, in altri potrà solo conoscersi per

via di rilievo sperimentale diretto, costituisce quella che si chiama la equazione caratteristica dell'apparecchio; e *curva caratteristica* di esso si chiamerà il diagramma rappresentativo di quella relazione.

Come esempio, si pensi, pel primo tipo, ad un generatore di f. e. m. e resistenza interna costanti, pel secondo, ad una dinamo a corrente continua ad autoeccitazione (in serie o derivata).

Si tratterà di un conduttore *lineare* quando tale curva sia una retta passante per l'origine e attraversante il 1° e 3° quadrante, ed in tal caso il suo coefficiente angolare (rispetto all'asse I) misura la resistenza ohmica (intesa nel senso ordinario).

In generale, quando si tratti di un apparecchio *non lineare*, il coefficiente angolare, rispetto all'asse I, della congiungente della origine O con un punto qualunque P della caratteristica (fig. 129), misura la *resistenza* R_0 dell'apparecchio *nello stato di funzionamento definito da* P, e così il coefficiente angolare rispetto all'asse V misura la corrispondente conduttanza $G_0\left(=\frac{1}{R_0}\right)$.

Fig. 129

Se, a partire da P, si fa variare lo stato di funzionamento, cioè se si immagina che l'apparecchio venga fatto funzionare in condizioni costituenti un « intorno » dello stato *di riposo* (o *iniziale*) rappresentato da P e definito dai valori V_0 ed I_0 della tensione e della corrente, si avrà, pel valore I corrispondente ad un generico V:

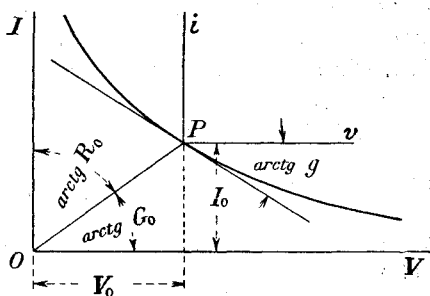
$$I = I_0 + f'(V_0)(V - V_0) + \frac{f''(V_0)}{2!}(V - V_0)^2 + \dots ,$$

cioè, ponendo $I - I_0 = i$, $V - V_0 = v$:

$$i = gv + hv^2 + \dots ,$$

dove g, h, ... rappresentano i valori delle derivate f', $\frac{f''}{2}$, ... calcolate nel punto di riposo.

Se i termini al di là del primo si possono trascurare — il che può avvenire, sia perchè si abbia a che fare con escursioni convenientemente piccole di v, sia perchè nel punto di riposo P la caratteristica sia poco dissimile da una retta e quindi i valori delle derivate f'', f''', ... siano sufficientemente piccoli —, si ha semplicemente:

$$i = gv, \quad \text{cioè} \quad I = G_0V_0 + gv,$$

vale a dire la corrente effettiva appare la somma di quella pertinente allo stato di riposo con quella che si avrebbe in un circuito (fittizio) di conduttanza g, alimentato dalla tensione differenziale v.

Perciò la costante g prende il nome di *conduttanza differenziale* dell'apparecchio *nel punto* P, cioè nello stato di funzionamento considerato.

La sua inversa $\frac{1}{g}$, che, per note proprietà delle derivate, corrisponde al coefficiente della prima potenza di i nello sviluppo di v in serie di potenze di i (1), si chiama *resistenza differenziale*.

La g può anche risultare negativa, e precisamente ciò avverrà ogni qualvolta la caratteristica abbia in P andamento discendente (come avviene nel caso della fig. 129). E pertanto un circuito che fosse sede delle tensioni e correnti differenziali v ed i apparirebbe allora avere carattere generatorico, ma ciò in generale non significa che tale sia il circuito effettivo. Ciò ad es. *non* avviene nel caso rappresentato in figura.

Quando in un circuito siano disposti in serie due apparecchi di cui sono noti i diagrammi caratteristici:

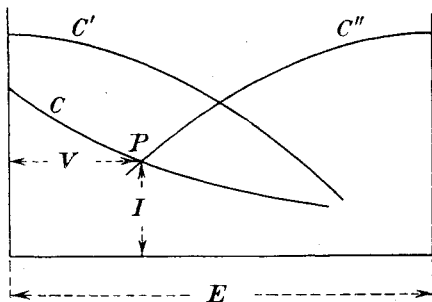
$$I = f(V), \qquad I = \varphi(V), \tag{3}$$

la determinazione della intensità di corrente che in essi fluirà quando il sistema venga alimentato con una data d. d. p. E, richiede la risoluzione della equazione:

$$f(V) = \varphi(E - V),$$

la quale esprime che sono uguali le due correnti determinate nel primo da una tensione ai capi uguale a V (incognita), nel secondo dalla tensione $E - V$ che rimane per esso disponibile. Avuto V dalla precedente equazione, una qualunque delle (3) fornirà la corrente I.

Fig. 130

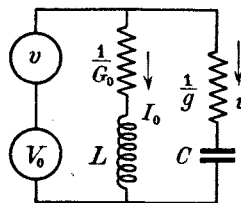
Un tale problema è suscettibile di una comoda risoluzione grafica, quando si siano disegnati i diagrammi C e C' corrispondenti alle (3). È evidente infatti che se, a partire da una ordinata distante E dall'asse delle correnti (fig. 130), si disegna un diagramma C'', simmetrico di C' rispetto alla ordinata

(1) Invero, se si risolve rispetto a V la $I = f(V)$, si troverà una relazione del tipo $V = F(I)$ dove F è la funzione inversa di f, per la quale si ha $F' = \frac{1}{f'}$, onde segue l'asserzione del testo.

mediana fra le $V = 0$, $V = E$, il punto P d'incontro di C con C' ha per ordinata la corrente cercata, mentre l'ascissa rappresenta la tensione assorbita dal primo apparecchio.

4. - Circuiti differenziali. — Il circuito (fittizio) avente per conduttanza g, e tale quindi che alimentato dalla tensione v sia percorso dalla corrente differenziale i, lo chiameremo il *circuito differenziale*, relativo, ben inteso, allo stato di riposo (V_0, I_0), o, ciò che è lo stesso, al punto P.

Per le applicazioni, ed allo scopo di interpretare correttamente i ragionamenti che molto spesso appare utile di fare sui circuiti differenziali, conviene rendersi conto della possibilità fisica, sia pur teorica, di separare gli elementi di riposo da quelli differenziali.

Fig. 131

Supponiamo, a tal fine, che al nostro sistema sia applicata una tensione $V_0 + v$, cioè pensiamo disposte in serie due sedi di f. e. m. V_0 e v, sprovviste di resistenza interna, ed alimentiamo con esse due rami disposti in parallelo (fig. 131), aventi le rispettive conduttanze G_0 e g, e contenenti, il primo, una induttanza L di valore elevatissimo (teoricamente infinito), senza resistenza, il secondo un condensatore di capacità C grandissima (teoricamente infinita), senza perdite. Supporremo inoltre che la v sia fatta variare nel tempo con una legge qualsivoglia (1).

Nel ramo (L, G_0) la corrente non può assumere valore diverso da quello, I_0, che le compete allo stato di riposo, a causa della grandissima induttanza L. Più precisamente, si deve dire che in tale ramo la f. e. m. messa in giuoco in ogni istante dalla L per variazione comunque piccola della corrente bilancia sempre la v ed è diretta, nel ramo (L, G_0), nello stesso senso in cui è diretta la v nel ramo di sinistra; pertanto, applicando la seconda legge di Kirchhoff alla maglia costituita dai due rami, si deduce che la corrente I nel ramo (L, G_0) è determinata dalla relazione:

$$V_0 + v - v = \frac{I}{G_0} \ (^2),$$

cioè vale $G_0 V_0$, e corrisponde quindi alla corrente di riposo I_0.

Similmente, nel ramo (C, g), la corrente i non fa sentire i suoi effetti in C, nel senso che la tensione sopportata dal condensatore, per la gran-

(1) Tale v potrebbe anche essere la caduta di tensione ai capi di una impedenza, attraverso la quale venga fatta variare la corrente in un modo qualsivoglia, come ad es. potrebbe realizzarsi con un condensatore che si carica attraverso un'induttanza.

(2) Il ramo di sinistra non dà contributo alla caduta di tensione che costituisce il secondo membro, perchè in esso la conduttanza è infinita.

dissima capacità di questo, non è influenzata dalle variazioni di carica conseguenti ad i, e quindi si stabilizza al valore V_0. In altri termini, la capacità C tiene il posto di una f. e. m. V_0 e diretta, nel ramo (C, g), nello stesso senso in cui V_0 è diretta nel ramo di sinistra, come indicato dalla freccia, e pertanto, applicando la solita legge alla maglia costituita dai due rami estremi, (V_0, v) e (C, g), si trova che la corrente in questo ultimo vale

$$g(V_0 + v - V_0) = gv = i\,.$$

Dunque, ai fini del comportamento *elettrico* dell'apparecchio dato, nelle supposte condizioni di lavoro, cioè per funzionamento nell'intorno di P, si può ad esso sostituire la contemporanea considerazione di due circuiti come quelli simboleggiati nella fig. 132, alimentati l'uno dalla sola V_0, l'altro dalla sola v, e contenenti l'uno una conduttanza G_0, l'altro una g. Il secondo di questi è precisamente il circuito differenziale, quale fu definito poco fa; il primo potrà chiamarsi circuito di riposo. Il funzionamento del circuito effettivo si ha mediante la sovrapposizione in un unico circuito delle tensioni e delle correnti dei due.

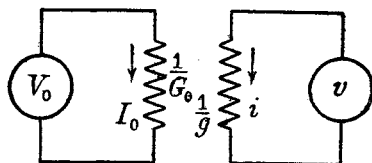



Fig. 132

Con altro schema si potrebbe ancora realizzare la separazione delle correnti I_0, i e delle tensioni V_0, v, lasciando invece sussistere integralmente il sistema caratterizzato da (G_0, g). Esso è quello rappresentato nella fig. 133: la induttanza L consente al solito di equilibrare la v, mantenendo, nel ramo di sinistra, la corrente stabilizzata al valore I_0, così come C sopporta la tensione costante V_0 qualunque sia la i che percorre il ramo di destra, nel quale non fluisce la I_0. Ne consegue che le tensioni ai capi dei due rami sono in ogni istante uguali fra loro ed alla $V_0 + v$; sono dunque soddisfatte le condizioni necessarie e sufficienti affinchè essi possano operare in parallelo, onde segue che il ramo centrale, che contiene l'apparecchio dato, si trova alimentato a tensione $V_0 + v$, e quindi sarà percorso dalla corrente $I_0 + i$, con che, come agevolmente si verifica, risulta soddisfatta la legge di Kirchhoff ai nodi.

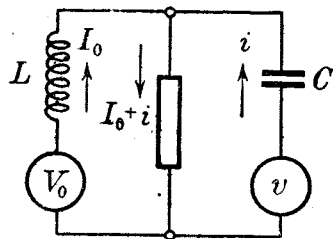



Fig. 133

In definitiva, mentre il ramo centrale si trova nelle condizioni elettriche effettive dell'apparecchio dato, i due rami laterali sono sede rispettivamente, l'uno delle sole V_0 e I_0, se si prescinde dalla tensione $-L\frac{di}{dt}$, l'altro delle sole v ed i, se si prescinde dalla tensione V_0 che si localizza ai capi di C. Volendoli separatamente chiudere, sopprimendo contempo-

raneamente le L e C ausiliarie, occorrerà che tali chiusure si facciano su due conduttanze uguali a G_0, g rispettivamente, con che si ritrova il doppio circuito equivalente di fig. 132.

5. - Relazioni energetiche. — La scissione del circuito effettivo in due parti, ottenuta come sopra, è senza dubbio atta a render conto dei fenomeni elettrici che avvengono nel circuito effettivo, purchè, come è stato avvertito, si intendano istante per istante sommate la V_0 con v, e la I_0 con i.

Si può ben dire che il primo, (V_0, G_0), simboleggia il punto P della caratteristica dell'apparecchio, ed il secondo, (v, g), è dedotto da una caratteristica fittizia ottenuta riferendo la caratteristica effettiva ad un sistema d'assi i, v paralleli ai primitivi e passanti per P, come indicato in fig. 129. Compendiosamente possiamo dire che la considerazione del circuito differenziale corrisponde all'avere eseguito una traslazione degli assi coordinati nel diagramma caratteristico dell'apparecchio, portando l'origine nel punto P.

Per quanto però concerne le manifestazioni energetiche, non è lecito sommare quelle dei due circuiti, perchè il prodotto $(V_0 + v)(I_0 + i)$ non è uguale alla somma delle potenze V_0I_0 e vi rispettivamente interessate nel circuito di riposo e nel circuito differenziale.

Tuttavia tale considerazione additiva è lecita anche per le potenze nella maggior parte dei casi che interessano le pratiche applicazioni di queste nozioni, e precisamente quando, *le variazioni di v ed i avendo carattere alternativo, i calcoli energetici non vengano fatti istante per istante, ma con riferimento alla media computata per un numero intero di periodi delle alternanze di v ed i.*

Invero, detta T la durata del periodo, per la supposta alternatività di v e di i si ha:

$$\int_0^T v\,dt = \int_0^T i\,dt = 0 ,$$

e quindi:

$$\frac{1}{T}\int_0^T (V_0 + v)(I_0 + i)dt = \frac{1}{T}\int_0^T V_0I_0dt + \frac{1}{T}\int_0^T V_0 i dt + \frac{1}{T}\int_0^T vI_0dt +$$

$$+ \frac{1}{T}\int_0^T vidt = \frac{V_0I_0}{T}\int_0^T dt + \frac{1}{T}\int_0^T vidt = V_0I_0 + \frac{1}{T}\int_0^T vidt .$$

Siccome l'integrale che compare all'ultimo membro non è che il valore medio in un periodo della potenza corrispondente alla tensione v e alla corrente i, si ha appunto che la potenza complessiva corrisponde alla somma di quelle in giuoco nei due circuiti, di riposo e differenziale, come si era asserito.

Salvo avviso contrario, ci riferiremo sempre a casi di tale tipo.

Occorre ora osservare che la conduttanza differenziale g può in certi casi essere positiva, in certi altri negativa. Nel primo caso, dal circuito differenziale vi è *uscita* di energia (verso l'esterno), come avviene anche nel circuito di riposo se, come vogliamo supporre, anche la G_0 è positiva; e così dal sistema effettivo uscirà energia in misura corrispondente alla potenza $W_0 + w$ essendo:

$$W_0 = V_0 I_0 = G_0 V_0^2, \quad w = \frac{1}{T}\int_0^T vi dt = \frac{g}{T}\int_0^T v^2 dt .$$

Se invece, sempre essendo $G_0 > 0$, è $g < 0$, la stessa potenza uscente ci appare come differenza fra la potenza W_0, *uscente* dal circuito di riposo, e la $-w$ (che ha in questo caso valore positivo), *entrante* nel circuito differenziale. Le cose dunque vanno *come se* il circuito differenziale, separatamente considerato, funzionasse da generatore, assorbendo dall'esterno una potenza uguale al valore assoluto di w.

In questi casi si suole talvolta dire che il circuito differenziale ha carattere generatorico, ma con questa locuzione si deve intendere soltanto ciò, che il sistema effettivo dà luogo ad una uscita di potenza minore di quella, W_0, pertinente allo stato di riposo; e la diminuzione di uscita rispetto a W_0 uguaglia proprio la entrata nel circuito differenziale. Si tratta in definitiva di entrata apparente, nel senso che la potenza « generata » nel circuito differenziale corrisponde soltanto a minore dissipazione — cioè a *minore uscita* — del sistema complessivo rispetto a quella che si avrebbe se questo funzionasse costantemente nelle condizioni di riposo.

6. - Particolari funzionamenti di circuiti differenziali a conduttanza differenziale negativa. — Nel campo delle correnti alternate, tali concetti di compensazione di potenza ci sono familiari, ma limitatamente al caso delle potenze reattive.

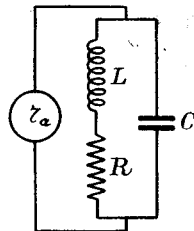
Noi sogliamo concepire che un circuito può, senza attingere dall'esterno, provvedere con opportuni condensatori ad « alimentare » delle induttanze. Ed in tal caso, quando sia raggiunta la completa compensazione, il circuito effettivamente nulla richiede all'esterno se non sono in esso presenti degli elementi a carattere « dissipativo », tale parola dovendosi intendere, secondo quanto spiegato al n. 2, come indice di uscite energetiche verso l'esterno. Tali elementi, secondo i concetti generali esposti, equivalgono a resistenze positive, e per mantenere l'equilibrio elettrico del sistema occorre che questo comprenda anche resistenze negative, di uguale valore assoluto, allo stesso modo come per realizzare l'equilibrio reattivo, cioè *per far sì che la corrente sia in fase con la tensione*, occorre

che, insieme a reattanze positive, ve ne siano delle negative di uguale valore assoluto.

È da notarsi che, mentre le reattanze di opposti segni possono mutuamente compensarsi, ed altrettanto (n. 2) può verificarsi per le resistenze di segni opposti, non può invece *mai* realizzarsi compensazione fra una resistenza (positiva o negativa) e una reattanza (positiva o negativa).

Da ciò discende la seguente fondamentale conseguenza: che, quando un generatore di corrente alternata è adibito alla alimentazione di un circuito che presenta una certa resistenza (positiva) ed una certa reattanza (positiva o negativa), esso deve necessariamente racchiudere in sè i caratteri di una resistenza negativa e di una reattanza (rispettivamente negativa o positiva). Si rifletta a tal proposito al caso di un alternatore che alimenta un circuito induttivo; per il funzionamento a regime del sistema occorre che ad esso venga somministrata della potenza reale (sotto forma meccanica) il che equivale alla inserzione di una resistenza negativa nel circuito, nonchè della potenza reattiva magnetica, al che si provvede mediante una conveniente eccitazione del sistema induttore.

Fig. 134

Ma, se si volesse realizzare uno stato di equilibrio, cioè un regime permanente di corrente alternata, usando invece un sistema contenente *soltanto resistenza negativa*, e *non reattanza*, occorrerà necessariamente operare con una frequenza per la quale il sistema nulla richieda, dal lato reattivo, dall'esterno. Se, per fissare le idee, il sistema di carico fosse quello costituito da una resistenza R, in serie con una induttanza L ed una capacità C, la pulsazione cercata non potrà essere che quella per la quale risulta $L\omega = \frac{1}{C\omega}$, cioè $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Invero, quando in un tal circuito venga inserito un organo avente sola resistenza negativa, cioè un generatore capace di *sole erogazioni di corrente in fase, non vincolate però ad alcun particolare valore della frequenza*, è possibile, con una conveniente scelta del valore della sua resistenza negativa, realizzare una corrente alternata permanente, la cui pulsazione sarà *necessariamente* la ω suddetta. Così pure, se il sistema di cui si tratta fosse costituito come alla fig. 134 e si disponesse, per completarlo, di una pura resistenza negativa r_a inseribile in parallelo coi due rami disegnati, la pulsazione ω di funzionamento non potrà essere che quella per la quale il sistema dato si riduce ad equivalere ad una resistenza, cioè la $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}$. In tal caso, come ci è noto (III, 12), questa resistenza vale $\frac{L}{RC}$, e pertanto

la resistenza negativa occorrente per la realizzazione del regime permanente dovrà essere esattamente uguale a $-\frac{L}{RC}$.

7. - Sistema non lineare in serie con un carico. — Riprendiamo le considerazioni dei nn. 3 e segg. per esaminare quel che accade quando in un circuito come quello ivi studiato, oltre l'apparecchio definito dalle conduttanze G_0 e g, vi sia anche un sistema di carico, equivalente ad una resistenza (o più generalmente, ad una impedenza).

Questo caso può agevolmente ridursi a quello allora trattato, giacchè la inserzione di una resistenza R può intendersi equivalere ad una alterazione delle f. e. m. V_0 e v, che si riducono rispettivamente a $V_0 - RI_0$, $v - Ri$. E ciò in definitiva conduce a supporre che nei due circuiti, che abbiamo chiamati di riposo e differenziale, sia disposta in serie una resistenza R secondo lo schema indicato in fig. 135 *a*).

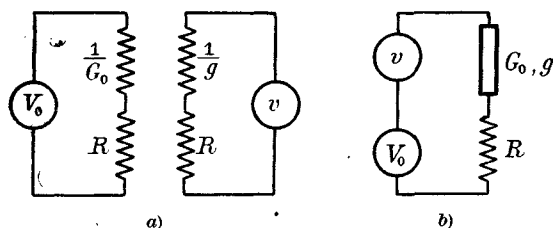



Fig. 135

Secondo le nostre deduzioni generali, si conclude che la corrente effettiva risulterà la somma di quelle, $\frac{V_0}{\frac{1}{G_0} + R}$, $\frac{v}{\frac{1}{g} + R}$, che in tali condizioni circoleranno nei due circuiti il cui insieme equivale al circuito effettivo, alimentato da $V_0 + v$ e contenente l'apparecchio (G_0, g) in serie con la resistenza R (fig. 135 *b*)).

Nel caso in cui, essendo v alternativa, l'organo aggiunto sia una impendenza **Z**, nel circuito di riposo comparirà la sola resistenza di questa, cioè la *resistenza* a cui **Z** si riduce *per frequenza nulla*, mentre nel circuito differenziale comparirà integralmente la **Z**. Evidentemente, qualora **Z** contenesse in serie un condensatore, il circuito di riposo risulterebbe interrotto, cioè si avrebbe $I_0 = 0$.

Ed anche dal punto di vista energetico, nulla v'è da mutare nelle deduzioni del n. 4, e ancora si avrà la possibilità di effettuare la valutazione della potenza totale mediante somma di quelle in giuoco nei due circuiti, quando si tratti di v alternative e le potenze si intendano riferite ai loro valori medi in un periodo.

In particolare, se si ha riguardo ai soli elementi che interessano il circuito differenziale, si potrà confrontare la potenza totale w_t in esso

interessata con quella w_R estrinsecata nella resistenza R, e si avrà, nel rapporto:

$$\frac{w_R}{w_t} = \frac{R}{\frac{1}{g} + R},$$

l'espressione di un certo *rendimento*, qualora si consideri l'apparecchio (G_0, g) come facente parte del sistema generatore complessivo, ed R come apparecchio di utilizzazione. La potenza, ad es., varierà con R, raggiungendo un massimo per $R = \frac{1}{g}$, ed il rendimento in tal caso risulterà $= \frac{1}{2}$, ecc.

8. - Sulla sostituzione di f. e. m. variabili a resistenze variabili. — Non di rado accade che, mediante una tensione continua V_0, si vada ad alimentare un apparecchio, lineare o non, la cui resistenza sia fatta variare nel tempo nell'intorno di un certo valore R_0, per modo che il suo valore sia rappresentabile con $R_0 + r$, essendo r una certa funzione del tempo. Per fissare le idee, si può ad es. pensare ad un microfono, o ad un reostato munito di un corsoio cui sia conferito un certo movimento, periodico o non, ecc.

Le variazioni di corrente conseguenti alla presenza del termine r variabile nel tempo si possono sempre ritenere equivalenti a quelle che nello stesso circuito si avrebbero qualora, insieme alla R_0 fissa, fosse inserita nel circuito una f. e. m. variabile nel tempo con legge opportuna. Infatti, se per maggiore generalità supponiamo che il circuito comprenda, oltre l'apparecchio in oggetto, anche un'altra resistenza (d'utilizzazione) R, la corrente in esso circolante sarà data da:

$$I = \frac{V_0}{R + R_0 + r},$$

dove r, come si è detto, è intesa funzione del tempo. Basterà dunque scrivere

$$I = \frac{V_0 + v}{R + R_0},$$

e risolvere rispetto a v l'equazione che si ottiene uguagliando i due valori di I, per ottenere la espressione esplicita (in funzione di r e quindi del tempo) della v cui occorre pensare per realizzare lo stesso effetto di corrente.

Inversamente, procedendo alla risoluzione rispetto ad r, si potrebbe trovare la r variabile capace di produrre gli stessi effetti *di corrente* di una v (funzione del tempo) inserita nel circuito insieme alla V_0 fondamentale.

Senonchè la equivalenza dei due schemi corrispondenti che, per il

modo come abbiamo operato, è senza dubbio perfetta dal lato elettrico (corrente), non lo è più dal lato energetico.

Prescindendo dagli elementi fissi, cioè V_0 ed $I_0 = \frac{V_0}{R + R_0}$, limitiamo le nostre considerazioni a quello che, per analogia coi casi precedentemente trattati, si potrà ancora chiamare circuito differenziale, nel quale la corrente avrà il valore $i = I - I_0$. A seconda che si esaminano le cose sotto l'uno o sotto l'altro punto di vista, il circuito differenziale si presenta come in fig. 136 *a*) o *b*), nel primo dei quali la R si trova disposta in serie con la sola R_0 e con una sede di f. e. m. v, nel secondo invece al posto della v compare la resistenza variabile r.

Se andiamo a fare il computo della energia in giuoco nel circuito *a*), troviamo per essa la espressione $\int vidt$ che si può anche scrivere $(R_0 + R) \int i^2dt$, giacchè in tale caso si ha $v = (R_0 + R)i$; ed è da osservare che tale energia sarà effettivamente immessa nel circuito se, per fissare le idee, la corrente i risulta cospirante con la v. Siccome nel circuito *b*) non esiste f. e. m. applicata, deve necessariamente la r essere negativa, e pertanto la sua presenza corrisponde ad una diminuzione di dissipazione rispetto a quella che si avrebbe se la resistenza dell'apparecchio rimanesse fissa col valore R_0; d'altra parte, la corrente essendo nei due circuiti la stessa, si conclude che la energia erogata dal generatore fittizio di f. e. m. v uguaglia la diminuzione predetta. In definitiva dunque, la sostituzione del sistema (R_0, v) al sistema (R_0, r) è energeticamente lecita soltanto a patto che alla potenza erogata dalla f. e. m. fittizia v non si attribuisca il significato di potenza immessa nel circuito differenziale, ma quello di minor dissipazione nella R_0, che insieme alla v sostituisce il sistema effettivo (R_0, r).

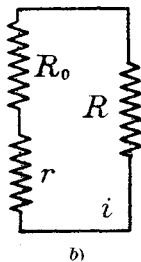
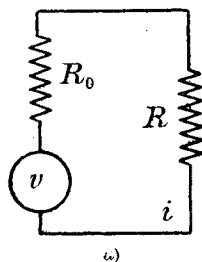



Fig. 136

Può forse a prima vista stupire il fatto che la diminuzione di dissipazione dovuta ad r possa risultare superiore alla stessa energia dissipata in R_0, e che quindi il circuito differenziale reale *b*) possa avere carattere generatorico. Ma la cosa si spiega pensando che, appunto perchè qui si tratta di solo circuito differenziale, la considerazione di questo non deve disgiungersi da quella del circuito di riposo, ad esso necessariamente coesistente.

Per essere poi i circuiti *a*) e *b*) differenziali, neppure è da escludersi il caso che la i sia contraria alla v (giacchè in ogni caso si deve pensare al circuito effettivo *totale*, comprendente cioè anche il circuito di riposo), ed allora, con ragionamento analogo al precedente, si proverebbe che l'uscita energetica corrispondente a v è da interpretarsi come *maggior*

dissipazione nel sistema (R_0, r) rispetto a quella che si avrebbe, a pari corrente, nella sola R_0.

Si osservi infine che un sistema come quello esaminato è sostanzialmente un apparecchio, che, alimentato con tensione *costante* (la V_0), può erogare (nel circuito differenziale) correnti aventi forma qualunque, in particolare, per es., alternate. Esso cioè può in definitiva considerarsi come un *convertitore* di *forma* dell'energia elettrica, perchè l'energia di corrente alternata ottenuta è in effetto prelevata dal generatore di f. e. m. V_0.

Nel prossimo Capitolo vedremo la grande importanza delle nozioni ora stabilite.

9. - Induttanze e capacità non lineari. - Relativi elementi differenziali. — Considerazioni del tutto analoghe a quelle fin qui svolte in ordine alle resistenze, possono farsi anche per gli altri elementi costitutivi dei circuiti, cioè per le induttanze e le capacità.

L'induttanza di un circuito non può ritenersi un parametro caratteristico di esso se non quando sussista relazione di proporzionalità fra il flusso Φ concatenato col circuito e l'intensità della corrente I che, circolando in esso, dà origine al flusso stesso. Se una tale legge di proporzionalità può ritenersi praticamente verificata nel caso di assenza di materiali ferromagnetici, essa non sussiste più quando il circuito elettrico sia quello di un'ordinaria bobina avvolta su nucleo di ferro. In tal caso, la relazione

$$\Phi = f(I)$$

che lega il flusso alla corrente è ben lungi dall'essere lineare.

Anche qui dunque, ove si operi in un intorno di un certo valore I_0 della corrente, cui corrisponde il valore Φ_0 del flusso, si avrà

$$\Phi = \Phi_0 + li + \ldots = L_0 I_0 + li + \ldots \tag{5}$$

dove i indica la *corrente differenziale* $I - I_0$, $L_0 = \frac{\Phi_0}{I_0}$ l'induttanza «di riposo» del circuito, ed l, valore per $I = I_0$ della derivata $\frac{d\Phi}{dI}$, potrà denominarsi l'*induttanza differenziale* del circuito. E nella precedente si potranno praticamente arrestare gli sviluppi ai termini lineari in i se le correnti con cui si opera compiono escursioni sufficientemente piccole attorno al valore di riposo I_0. È ovvio che, in tali condizioni, il circuito si comporta precisamente come se la sua induttanza fosse uguale alla induttanza differenziale, in quanto che, qualora la corrente vari nel tempo, la f. e. m. indotta, come si deduce derivando la (5), si commisura proprio a

$$-l\frac{di}{dt};$$

cioè tutto va *come se* la corrente fosse la sola i e l'induttanza fosse l.

È dunque l'induttanza differenziale (e non il rapporto fra flusso e corrente) l'elemento che entra in giuoco in tutti quei casi — come ad es. nelle bobine a nucleo di ferro che si usano nei filtri per rettificatori — in cui la corrente compie oscillazioni (di moderata entità) intorno ad un valore (sensibilmente) diverso da zero.

Il grafico (fig. 137) mette chiaramente in evidenza la differenza fra le due induttanze considerate: l'induttanza L_0 di riposo è misurata dalla tangente dell'angolo *POI*, se *P* è il punto rappresentativo dello stato

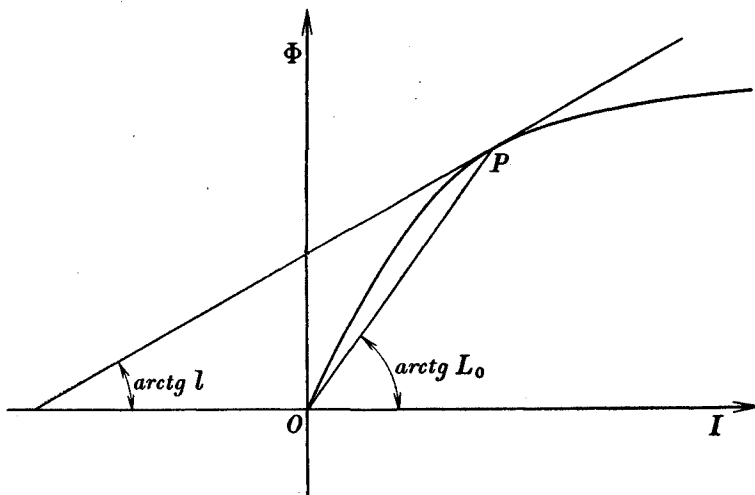



Fig. 137

di riposo I_0, Φ_0; mentre l'induttanza differenziale è misurata dal coefficiente angolare della tangente in *P* al diagramma della funzione $\Phi(I)$.

Anche qui si potrebbero svolgere considerazioni di carattere energetico riguardanti il comportamento dell'energia magnetica associata al circuito: si trova così che, ove le variazioni (convenientemente piccole) di i intorno al valore di riposo I_0 siano alternative sinusoidali di valore efficace i_m, l'energia magnetica media nel tempo vale

$$\frac{L_0 I_0^2}{2} + \frac{l i_m^2}{2};$$

cioè corrisponde semplicemente alla somma di quelle pertinenti al circuito di riposo ed a quello differenziale.

Nozioni perfettamente analoghe (duali) possono porsi relativamente alle capacità nel caso in cui la relazione fra la carica e la differenza di potenziale non sia di rigorosa proporzionalità, ma tali considerazioni non presentano interesse, perchè in pratica tale eventualità non si presenta in modo apprezzabile.

CAPITOLO OTTAVO

TUBI ELETTRONICI

A) Diodi.

1. - Effetto Edison. - Tubi a due elettrodi. — Come è noto dalla Fisica, circa cinquant'anni or sono Edison osservò che se nell'interno di una comune lampada ad incandescenza si dispone una piastra metallica in vicinanza del filamento reso incandescente dal passaggio di una corrente continua, e mediante un commutatore (fig. 138) si mette la piastra, all'esterno della lampada, in comunicazione con l'uno o con l'altro capo del filamento, una debole corrente passa attraverso il filo di connessione quando il commutatore è disposto in modo che la piastra o *placca P* sia in comunicazione col polo positivo, mentre nessun passaggio si ha nel caso opposto, il che può essere messo in evidenza dalle indicazioni del galvanometro *G*.

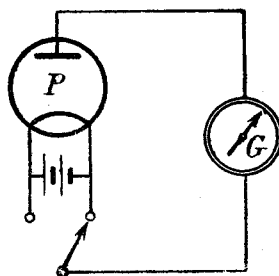



Fig. 138

Alcuni anni dopo, il Fleming approfittò di questo fatto per costruire un apparecchio del tipo che attualmente si denomina *tubo elettronico* a due elettrodi o *diodo*.

Il fenomeno Edison, del quale l'inventore non diede spiegazione, ha la sua essenza nel fatto che i conduttori, quando, con un mezzo qualunque, sono portati ad alta temperatura, sono in grado, come si dice, di *emettere elettroni*. E precisamente, gli elettroni che sempre si trovano vaganti nell'interno dei conduttori, ma che in generale non possono uscire dalla superficie perchè trattenuti da una specie di *affinità elettronica*, riescono a superare la barriera da questa rappresentata quando, con mezzi acconci, venga loro somministrata una certa energia cinetica. Ciò può ottenersi non soltanto con l'arroventamento, ma anche con la eccitazione *fotoelettrica* — quando cioè il conduttore sia colpito da radiazioni luminose — e con il *bombardamento* (elettronico), nel quale ultimo caso l'energia per superare la affinità elettronica è fornita dall'urto degli elettroni bombardanti.

Gli elettroni liberati, per es. in conseguenza dell'aumento di temperatura, non abbandonano in generale le immediate vicinanze del metallo stesso, salvo il caso in cui concorrano circostanze speciali. Nella lampada di Edison tali circostanze sono rappresentate: 1°) dal vuoto spinto esistente nel bulbo, in conseguenza del quale gli elettroni nel loro eventuale moto non incontrano ostacoli apprezzabili; 2°) dal fatto che la placca venga portata ad un potenziale più alto di quello di alcuni tratti del filamento emittente, nel qual caso nello spazio fra filamento e placca viene a formarsi un campo elettrico diretto in modo tale da sollecitare gli elettroni a raggiungere la placca, dopo di che essi, per la via conduttiva offerta dai conduttori di collegamento, ritornano al filamento. Naturalmente, se il campo elettrico ha senso opposto, gli elettroni vengono da esso ricacciati verso il filamento che li ha emessi.

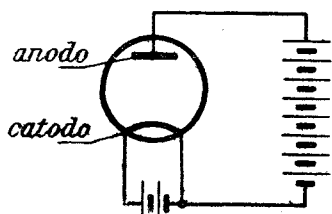



Fig. 139

Il diodo è un apparecchio sostanzialmente formato come la lampada della esperienza di Edison, cioè consta di un filamento metallico, per es. rettilineo, portato all'incandescenza da una corrente elettrica fornita da una conveniente sorgente, e di una placca, generalmente foggiata a cilindro avente per asse il filamento, che può essere fatta comunicare col filamento mediante un conduttore esterno, il tutto racchiuso in una ampolla in cui è stato praticato il vuoto ad un grado molto elevato.

Un tale apparato può costituire una *valvola*, nel senso che è in grado di lasciar fluire corrente elettrica nel conduttore esterno *solo in un senso*, e ciò in effetto avviene quando, mediante una sorgente elettrica, la placca (o *anodo*) sia portata a potenziale positivo rispetto al filamento (o *catodo*).

A scanso di equivoci, è bene tener presente che la sorgente utilizzata per riscaldare il filamento non ha nessuna relazione con quella di cui ci si serve per attribuire alla placca un potenziale positivo o negativo rispetto al filamento. Anzi, quella sorgente elettrica può sempre pensarsi sostituita con un altro mezzo qualunque atto a riscaldare convenientemente il catodo.

È per questo che il *tubo elettronico* così costituito, schematicamente rappresentanto in fig. 139, si chiama *a due* (e non a tre) elettrodi.

2. - Dipendenza della corrente elettronica dalla temperatura del catodo. — Occorre indagare da quali elementi dipende la corrente ottenibile nel circuito in cui il diodo è inserito.

Essa è influenzata, oltre che dagli elementi geometrici del filamento e della placca, e, ben inteso, dalla sostanza costituente il filamento stesso, anche dalla temperatura del filamento e dalla tensione applicata fra il filamento e la placca.

Che la emissione elettronica dipenda dalla temperatura, risulta chiaro quando si pensi al meccanismo stesso del fenomeno, il quale può sostanzialmente schematizzarsi come segue. Gli elettroni liberi esistenti nell'interno dei metalli sono in un continuo stato di agitazione. In un tale stato ogni elettrone, la cui massa indichiamo con m, è animato da una certa velocità v e possiede pertanto una certa forza viva $\frac{mv^2}{2}$. D'altra parte l'elettrone non può staccarsi dal corpo se non quando l'energia di cui è dotato supera un certo importo w, il quale costituisce appunto la misura della *affinità elettronica* di cui si è parlato nel n. prec. Generalmente tale affinità w viene misurata in « volt equivalenti » cioè mediante quella d. d. p. elettrica E il cui prodotto per la carica e dell'elettrone uguaglia w, talchè la condizione di emissione può scriversi sotto la forma:

$$\frac{mv^2}{2} \geqq eE \, .$$

Con ciò, per determinare la corrente ottenibile da un diodo — quando, ben inteso, siano soddisfatte le altre condizioni all'uopo necessarie, cioè opportuna rarefazione e opportuna intensità e senso di campo elettrico esterno — occorrerebbe valutare le velocità dei singoli elettroni. Ciò ovviamente non è possibile; si può però, con l'aiuto di opportune ipotesi, valutare le probabilità relative del verificarsi di ogni possibile velocità compresa fra 0 e ∞, cioè, sostanzialmente, la legge secondo cui sono distribuiti, fra gli innumerevoli elettroni, tutti i possibili valori delle velocità, e quindi il probabile numero di elettroni la cui velocità soddisfa la precedente relazione.

In ogni caso esiste una velocità v_m di massima probabilità, e se con x si indica il rapporto fra la velocità generica v e tale v_m, la probabilità che la velocità dell'elettrone generico abbia valori compresi fra $v_m x$ e $v_m(x + dx)$ è rappresentabile con $y dx$, essendo y una certa funzione d x, certamente soddisfacente alla condizione

$$\int_0^\infty y dx = 1$$

(esprimente la *certezza* che la velocità dell'elettrone considerato è compresa fra 0 e ∞) e la cui determinazione non può farsi se non in base a opportune ipotesi di carattere statistico. Ad es., adottando la statistica di Maxwell, dedotta dall'analogia con le leggi della teoria cinetica dei gas, si è condotti ad assegnare alla funzione y la forma

$$y = \frac{4}{\sqrt{\pi}} x^2 e^{-x^2} \, ,$$

laddove teorie più moderne, fondate sulle statistiche di Fermi e Dirac, conducono ad altra forma della funzione di probabilità.

In ogni caso la velocità più probabile v_m è funzione della temperatura, e precisamente può ritenersi proporzionale alla radice quadrata della temperatura assoluta. Partendo appunto da ciò, ed applicando i principi della teoria cinetica dei gas, Richardson ha assegnato, per la corrente i (mA) corrispondente alla massima emissione da una superficie S (cm^2) di un metallo portato alla temperatura di T °K [1], l'espressione

$$i = A_1 T^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{w}{kT}} S, \tag{1}$$

dove A_1 e w sono due costanti caratteristiche del metallo, di cui la seconda coincide con il lavoro di estrazione di un elettrone, e k è la così detta *costante di Boltzmann*, corrispondente ai 2/3 dell'energia cinetica media di un elettrone alla temperatura di 1 °K ($k = 1{,}37 \cdot 10^{-23}$ J/grado).

Per il tungsteno, il tantalio ed il molibdeno, che sono i metalli più adatti allo scopo perchè hanno un elevato punto di fusione, si hanno i seguenti valori:

	tungsteno	tantalio	molibdeno
$A_1 =$	$23{,}6 \cdot 10^9$	$11{,}2 \cdot 10^9$	$21 \cdot 10^9$
$\frac{w}{k} =$	52 500	50 000	50 000

Così ad es. la densità di corrente $\left(\frac{i}{S}\right)$ corrispondente alla massima emissione del tungsteno, a 2500 °K, risulta di 2430 mA/cm^2.

Però, siccome la teoria che conduce a tale formola non si accorda con taluni fatti sperimentali, il Richardson stesso ha successivamente modificato la (1) e precisamente, partendo da considerazioni termodinamiche e senza fare alcuna ipotesi sulla legge di distribuzione della velocità, è pervenuto ad una espressione la quale differisce dalla precedente in ciò, che nell'esponente dell'ultimo fattore di (1), scritto sotto la forma $\int \frac{w}{kT^2} dT$, la quantità w, anzichè una costante, è considerata funzione della temperatura, approssimativamente rappresentabile con

$$w = w_0 + \frac{3}{2} kT ,$$

essendo w_0 il valore di w a °K. Con ciò all'esponente predetto si sostituisce l'integrale

$$\int \frac{w_0 + \frac{3}{2} kT}{kT^2} dT .$$

[1] °K significa « gradi Kelvin », cioè gradi centigradi contati a partire da — 273 °C.

Eseguendo i calcoli, si vede che la (1) si trasforma in una espressione del tipo

$$i = AT^2 e^{-\frac{w_0}{kT}} S. \tag{2}$$

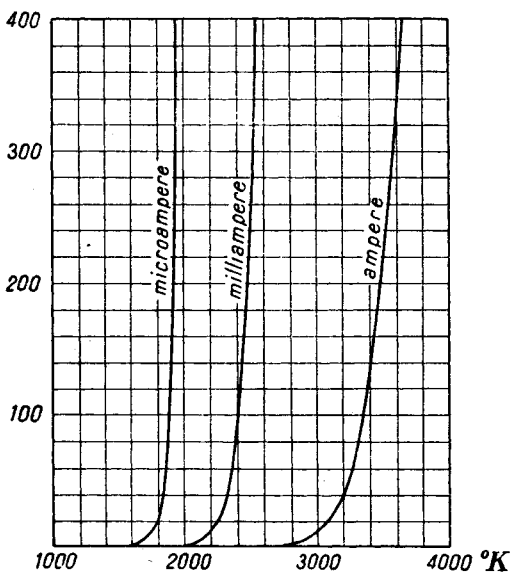
È questa la relazione che viene oggidì universalmente adottata, sia perchè ad essa si può pervenire anche per altra via, applicando cioè la teoria dei quanti e le statistiche di Fermi e Dirac, sia perchè la grandezza A che in essa compare ha il carattere di una costante universale. A tale costante la teoria assegna il valore $A = 60$ amp/cm² · grado² e l'esperienza conferma tale deduzione per i metalli puri. L'andamento di i in funzione di T secondo la (2), è rappresentato, pel tungsteno, dalla fig. 140. Come si vede, per valori relativamente bassi di T, la i è piccola, dipendentemente dall'elevato valore di $e^{\frac{w_0}{kT}}$, che può considerarsi fattore di riduzione delle ordinate rispetto a quelle della parabola $i = AT^2$; poi, col crescere di T, tale fattore di riduzione si avvicina all'unità e la curva si avvicina alla predetta parabola. In fig. 141 sono disegnati i diagrammi di $\frac{i}{T^2}$ in funzione di $\frac{1}{T}$ per vari metalli; siccome la scala delle ordinate è logaritmica, le equazioni di tali diagrammi sono

Fig. 140

$$y = \text{Log}\, A - 0{,}43\, \frac{w_0}{k}\, x \qquad \left(x = \frac{1}{T}, \quad y = \frac{i}{T^2}\right),$$

e pertanto i diagrammi stessi, necessariamente limitati alle temperature di fusione dei rispettivi metalli, sono rappresentati da segmenti rettilinei i cui prolungamenti concorrono in un punto dell'asse y (per i metalli puri, curve c).

Per la emissione termoionica non si utilizzano soltanto filamenti di metalli puri, ma anche altri catodi speciali e segnatamente:

a) catodi costituiti da filamenti di platino rivestito di sottili strati

di ossidi alcalino-terrosi (calcio, bario, stronzio), coi quali si ottengono notevoli emissioni a temperature relativamente basse (diagramma *a*));

b) filamenti di tungsteno rivestito di uno strato di torio (filamenti toriati), la cui emissione è notevolmente maggiore di quella del tungsteno puro (diagramma *b*));

c) catodi a riscaldamento indiretto, costituiti da un filamento riscaldatore circondato da un tubo di porcellana sul quale è fissata una lastra di nichel che porta, su di essa depositato, lo strato d'ossido emittente.

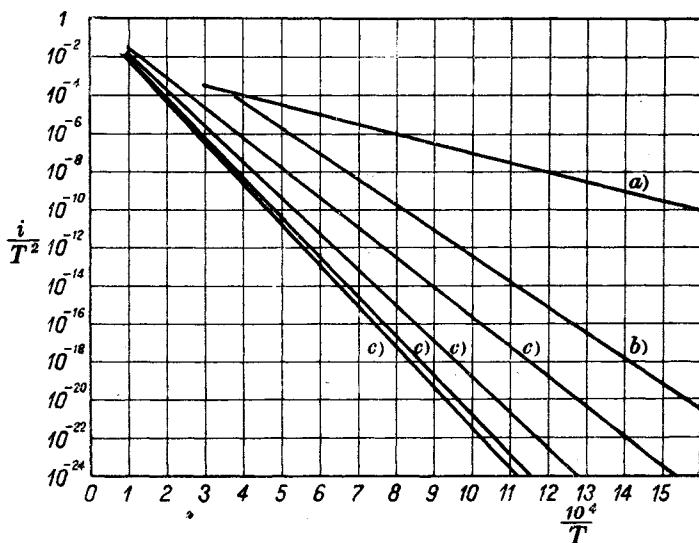



Fig. 141

Per le superfici emittenti di tali tipi si hanno minori valori di A come si rileva dai diagrammi *a*) *b*) di fig. 141.

In ogni caso il coefficiente $\frac{w_0}{k}$, che è la misura di una temperatura, è data dall'inclinazione dei rispettivi diagrammi; i corrispondenti valori sono di 52 000 °K per il tungsteno, 51 300 per il molibdeno, 47 200 per il tantalio, 38 900 per il torio, e si hanno valori sensibilmente inferiori per i tipi contemplati nei diagrammi *a*) e *b*).

Nella tecnica, per giudicare il potere d'emissione, anzichè ai mA/cm², ci si riferisce ai mA/W, cioè al rapporto fra la corrente corrispondente alla emissione e la *potenza elettrica* spesa per il riscaldamento del catodo.

Così il tungsteno ha una emissione di 25 mA/W a 2500 °K, e, mentre con un catodo ad ossido si raggiungono 2000 mA/W a soli 1000 °K, un filamento toriato ha una emissione di 50 mA/W a 1700 °K, e di 90 mA/W a 2000 °K, e così via.

3. - Dipendenza della corrente elettronica dalla tensione anodica. — In pratica, quando il filamento di un diodo sia portato ad una certa temperatura T, la corrente che si può riscontrare nel circuito ad esso collegato non ha il valore indicato dalle formole esposte nel n. prec., sia perchè il vuoto nell'ampolla non può essere perfetto, sia e soprattutto perchè, a parità di T, la effettiva corrente diodica dipende essenzialmente dall'altro dei due elementi accennati al principio del n. prec., e cioè dal campo elettrico dovuto alla tensione applicata all'anodo.

Fig. 142

Più precisamente, si osserva che se, scaldato il catodo ad una temperatura determinata T cui corrisponde una emissione (totale) i, si porta l'anodo a una certa tensione positiva v, che supponiamo di far gradatamente crescere da zero, la corrente anodica non raggiunge immediatamente il valore i, come a prima vista parrebbe pensando che, se — come avviene nei diodi ordinari — il vuoto è molto spinto, gli elettroni emessi dal catodo non debbano trovare nessun ostacolo per raggiungere la placca.

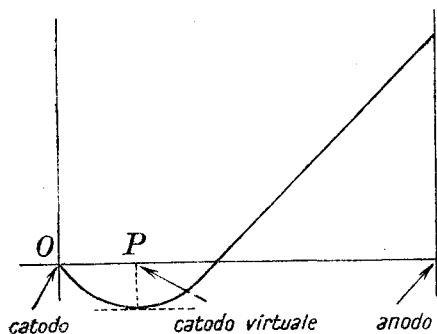
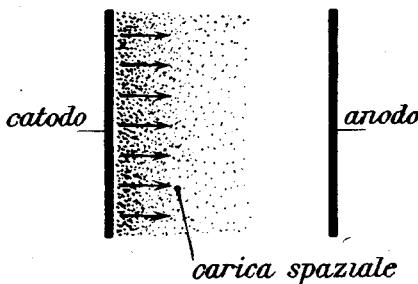



Fig. 143

Si osserva invece che la corrente anodica, per v piccolissimo, è piccolissima, e poi cresce col crescere di v secondo una certa legge, finchè raggiunge il valore i della formola di Richardson per un valore di v ben determinato, dopo di che, se si aumenta v, la corrente non cresce più.

Ciò dipende dal fatto che gli elettroni espulsi dal filamento si addensano attorno al medesimo formando una nube, detta *carica spaziale*, equivalente ad un corpo carico negativamente, talchè nelle vicinanze del filamento si viene ad avere un campo elettrico diretto verso l'anodo come indicato dalle frecce in fig. 142. L'applicazione della tensione v positiva fra anodo e catodo determina un campo diretto dall'anodo al catodo, il quale però non riesce, a causa della carica spaziale, a raggiungere il catodo, ma si limita a penetrare entro la carica spaziale stessa per una profondità minore o maggiore in relazione al valore della tensione v, per modo che la distribuzione dei valori della tensione nello spa-

zio fra catodo e anodo corrisponde a quella rappresentata nel diagramma di fig. 143 ([1]).

Qualitativamente, di tale fenomeno ci si può render conto pensando che, per piccoli valori di v, le linee di forza del campo anodico avranno termine sugli elettroni costituenti lo strato più esterno della carica spaziale, e pertanto solo questi possono venire accelerati dal campo e portati a raggiungere la placca. Mano mano che cresce v, aumenta la penetrazione delle linee del campo anodico entro la carica spaziale e quindi aumenta la corrente. Quando poi il campo anodico è tanto intenso da raggiungere con le sue linee il catodo soverchiando l'opposto campo della carica spaziale, tutti gli elettroni emessi sono in grado di raggiungere la placca. La corrispondente corrente anodica i_s dicesi di *saturazione*, e *tensione di saturazione* V_s è la tensione anodica necessaria per raggiungere tale stato di cose. Se la v supera tale V_s, la corrente anodica non può aumentare, perchè il potere d'emissione del catodo non è mutato; soltanto aumenterà la velocità con la quale gli elettroni colpiscono la placca.

Lo studio dell'andamento della corrente i al variare della tensione V_0 applicata fra anodo e catodo può farsi nel modo seguente:

Supponiamo che catodo e placca siano rappresentati da due generiche superfici, S_c ed S_a, fra cui sia mantenuta una certa d. d. p. che qui indicheremo con V_0. Gli elettroni, che emessi da S_c si dirigono verso S_a, determinano, nello spazio τ compreso fra S_c ed S_a, una distribuzione che si potrà ritenere praticamente continua, di cariche elettriche negative, cui si connette la considerazione di una certa densità cubica ϱ, variabile in generale da punto a punto, e legata alla densità elettronica (numero di elettroni per unità di volume) dalla relazione $\varrho = eN$, dove e rappresenta la carica di ciascun elettrone (Cfr. IX, 14).

Questi elettroni saranno in movimento secondo certe traiettorie congiungenti i punti di S_c con quelli di S_a, e precisamente tali traiettorie non saranno altro che le linee di forza del campo elettrico determinato in τ dalla tensione applicata V_0 e dalla presenza degli elettroni stessi; esse pertanto coincideranno con le traiettorie ortogonali delle superfici equipotenziali $V =$ cost. Lungo ognuna di esse, il potenziale avrà un andamento del tipo indicato in fig. 143, decrescente cioè fino ad un minimo e crescente poi, e l'insieme dei punti di tensione minima costituirà in generale la « superficie catodica virtuale » S_v, alla quale attribuiremo potenziale nullo, intendendo così che il potenziale V di un punto generico P non sia altro che la d. d. p. fra esso ed S_v.

([1]) Se l'anodo è un cilindro avente per asse il filamento catodico, l'ascissa OP del punto P in cui la tensione è minima (e quindi il campo è nullo) misura il raggio di un cilindro che costituisce il così detto *catodo virtuale*. Il raggio del catodo virtuale è peraltro, in generale, estremamente piccolo, talchè il catodo virtuale coincide praticamente con la superficie esterna del filamento emittente.

La corrente dovuta allo sciame elettronico sarà rappresentabile mediante una certa densità vettoriale $\vec{u}$, diretta dovunque come il campo elettrico, e a tale vettore $\vec{u}$ compete la proprietà fondamentale di essere solenoidale in τ, per modo che il « tubo » costituito dall'insieme delle linee di $\vec{u}$ partenti dai punti di un elemento superficiale dS_c di S_c sarà sede di una corrente che sboccherà sull'elemento corrispondente dS_a di S_a (fig. 144) e la cui intensità potrà esprimersi col prodotto del valore di u in un punto qualunque P fra S_c ed S_a per l'area dS della corrispondente sezione normale del tubo; in altri termini, lungo ognuno di tali tubi, il flusso udS sarà costante ed uguale alla intensità di corrente predetta.

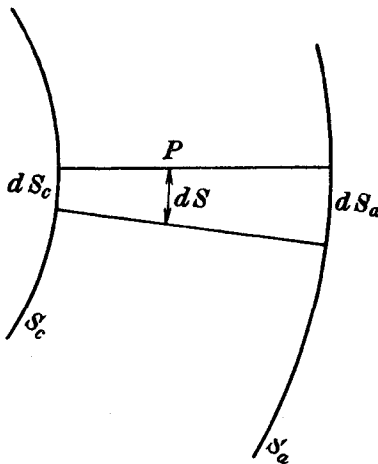



Fig. 144

Ciò premesso, possiamo trovare facilmente una relazione (differenziale) cui soddisfa la distribuzione V del potenziale nello spazio τ.

A tale scopo, osserviamo in primo luogo che la densità di carica ϱ e la densità di corrente $\vec{u}$ sono legate alla velocità elettronica $\vec{v}$ dalla ovvia relazione (Cfr. IX, 14):

$$\vec{u} = \varrho\vec{v},$$

da cui, essendo qui $\varrho < 0$, si ricava

$$u = -\varrho v; \tag{3}$$

ed in secondo luogo che fra la velocità v ed il potenziale V in P sussiste la relazione

$$\frac{mv^2}{2} = eV \tag{4}$$

esprimente che la forza viva acquistata dall'elettrone (di massa m) nel passaggio da S_v a P uguaglia il lavoro eV della forza elettrica. Dalle (3) e (4) si ricava l'uguaglianza

$$-\varrho = \frac{u}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m}{2e}} \tag{5}$$

che permette di esprimere ϱ in funzione di u e del potenziale V.

Sostituendo questo valore di ϱ nell'equazione fondamentale (App., C, 1)

$$\text{div grad } V = -\frac{\varrho}{\varepsilon}$$

cui soddisfa la funzione potenziale, si ottiene la relazione richiesta e precisamente:

$$\text{div grad } V = \frac{u}{\varepsilon\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m}{2e}}, \tag{6}$$

cui debbono aggiungersi le condizioni

$$V = 0, \quad \text{grad } V = 0 \tag{7}$$

alle quali la V soddisfa sulla superficie S_v.

Giova osservare che il primo membro della (6) contiene linearmente ed omogeneamente le derivate (prime e seconde) di V (1). Da ciò segue che se limitiamo la nostra ricerca alla distribuzione di V lungo un particolare tubo elementare di $\vec{u}$, tale V si ridurrà ad una funzione di una sola variabile, per es. l'« ascissa » (curvilinea) x misurata a partire dall'intersezione con la superficie S_v, e la (6) diviene una equazione differenziale ordinaria di second'ordine, lineare rispetto alle derivate $V' = \frac{dV}{dx}$ e $V'' = \frac{d^2V}{dx^2}$ di V, cioè del tipo

$$aV'' + bV' = \frac{u}{\varepsilon\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m}{2e}}.$$

Sostituendo ad u, generalmente variabile con x, il rapporto $\frac{\Delta i}{\Delta S}$ fra la corrente Δi, *indipendente da* x, convogliata dal tubo e l'area ΔS (funzione di x) della sezione generica, e ponendo $a\Delta S = A$, $b\Delta S = B$, la precedente si scrive

$$AV'' + BV' = CV^{-\frac{1}{2}}, \tag{8}$$

avendo indicato con C la *costante*

$$C = \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\frac{m}{2e}}\,\Delta i\,;$$

ed alle (7) fanno riscontro le

$$(V)_{x=0} = 0, \qquad (V')_{x=0} = 0. \tag{9}$$

L'Analisi insegna che (2) le (8), (9) determinano univocamente la V in funzione di x.

Ma per il nostro scopo, più che l'andamento di V in funzione di x, ci interessa la relazione fra Δi ed il valore V_0 (tensione applicata) che

(1) Infatti, mutando V in kV (k costante), div grad V si muta in div grad kV.

(2) Sotto certe condizioni qualitative, assai poco restrittive, che per brevità qui riteniamo siano senz'altro soddisfatte.

la V assume per $x = x_a$, essendo x_a l'ascissa corrispondente alla superficie anodica.

A tale relazione possiamo pervenire immediatamente osservando che, se si pone $kV_1 = V$, essendo k una costante qualunque, le (8), (9) si mutano in

$$AV_1'' + BV_1' = k^{-\frac{3}{2}}\, CV_1^{-\frac{1}{2}}, \qquad (V_1)_{x=0} = 0\,, \quad (V_1')_{x=0} = 0\,.$$

Pertanto, se scegliamo per k il valore $C^{\frac{2}{3}}$, si avrà

$$V = V_1 \left(\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\frac{m}{2e}}\,\Delta i\right)^{\frac{2}{3}}, \tag{10}$$

essendo V_1 quella (ben determinata) funzione di x che soddisfa alla (8) scritta per $C = 1$ ed alle (9). Ed allora, dalla (10), specificando per $x = x_a$, si ottiene:

$$\Delta i = \frac{\varepsilon}{[V_1(x_a)]^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\frac{2e}{m}}\, V_0^{\frac{3}{2}}\,. \tag{11}$$

Si conclude dunque che la corrente elementare Δi è proporzionale alla potenza 3/2 della tensione V_0. Questa deduzione si estende subito alla totale corrente i; basta osservare che il coefficiente di $V_0^{\frac{3}{2}}$ nella (11) è una ben determinata funzione del punto generico di S_a, quindi moltiplicando per dS_a e integrando a tutta la superficie anodica si ottiene

$$i = K\varepsilon\sqrt{\frac{2e}{m}}\, V_0^{\frac{2}{3}}\, S_a\,,$$

essendo S_a l'area dell'elettrodo e K il valore medio su S_a di $[V_1(x_a)]^{-\frac{3}{2}}$.

Per le applicazioni, hanno speciale interesse i due casi particolari seguenti:

a) se S_v ed S_a sono due piani paralleli (indefinitamente estesi, ma di cui si considera una porzione di area S) posti alla distanza d, la precedente diviene:

$$i = \frac{4\varepsilon}{9}\sqrt{\frac{2e}{m}}\,\frac{V_0^{\frac{3}{2}}}{d^2}\, S \;(^1)\,,$$

---

(1) In questo caso, assunto l'asse x normale a tali piani, si ha $\operatorname{div}\operatorname{grad} V = \frac{d^2V}{dx^2}$, talchè la (8), scritta per $C = 1$, e le (9) si riducono a

$$V_1'' = V_1^{-\frac{1}{2}}\,, \qquad (V_1)_{x=o} = (V_1')_{x=o} = 0\,. \tag{α}$$

A queste condizioni si soddisfa con una espressione della forma $V_1 = hx^n$; invero, sostituendo tale valore nella prima delle (α) si trova $h^3n^2(n-1)^2 = x^{4-3n}$ da cui, in primo luogo, segue $4 - 3n = 0$ cioè $n = \frac{4}{3}$, poi $h = \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$, quindi $V_1^{\frac{3}{2}} = \frac{9}{4}x^2$.

e ponendo per e, m, ε i valori $e = 1{,}59 \cdot 10^{-19}$ coul., $m = 0{,}9 \cdot 10^{-30}$ kg, $\varepsilon = \varepsilon_0 = 8{,}86 \cdot 10^{-12}$ F/m:

$$i = 2{,}336 \cdot 10^{-6} \frac{V_0^{\frac{3}{2}}}{d^2} S \text{ amp.}, \tag{12}$$

essendo S e d espressi in unità corrispondenti.

b) Se S_v ed S_a sono due superfici cilindriche di raggi r ed a e di lunghezza assiale l, si ha

$$i = \frac{8\pi\varepsilon}{9} \sqrt{\frac{2e}{m}} \frac{lV_0^{\frac{3}{2}}}{r\beta^2},$$

cioè

$$i = 14{,}68 \cdot 10^{-6} \frac{lV_0^{\frac{3}{2}}}{r\beta^2} \text{ amp.}, \tag{13}$$

dove il numero β è definito da

$$\beta = \log\frac{r}{a} - \frac{2}{5}\left(\log\frac{r}{a}\right)^2 + \frac{11}{120}\left(\log\frac{r}{a}\right)^3 - \frac{47}{3300}\left(\log\frac{r}{a}\right)^4 + \ldots \text{ [1]}.$$

Per gli usi pratici, è utile notare che, non appena a supera $10r$, il valore di β differisce dall'unità di pochi percento.

---

[1] Indicando con x la distanza del punto generico dall'asse del cilindro, V è funzione della sola x, quindi le superfici equipotenziali sono cilindri coassiali col catodo e con l'anodo. Il vettore grad V è dunque diretto normalmente a questi e vale $\frac{dV}{dx}$. Per calcolare div grad V basta valutare il flusso di grad V uscente dallo spazio $d\tau$ racchiuso fra i cilindri di raggi x e $x + dx$ e dividere per $d\tau = 2\pi x l dx$. Ora, tale flusso equivale alla somma di quelli,

$$-2\pi x l \frac{dV}{dx} \quad \text{e} \quad 2\pi(x + dx)l\left(\frac{dV}{dx} + \frac{d^2V}{dx^2}dx\right) \cong 2\pi x l \frac{dV}{dx} + 2\pi l\left(\frac{dV}{dx} + x\frac{d^2V}{dx^2}\right)dx,$$

uscenti dalle due predette superfici cilindriche, onde si ha

$$\text{div grad } V = V'' + \frac{V'}{x}.$$

La (6) si scrive dunque

$$V'' + \frac{V'}{x} = \frac{C_1 V^{-\frac{1}{2}}}{x}, \qquad \text{cioè} \qquad xV'' + V' = C_1 V^{-\frac{1}{2}},$$

con

$$C_1 = \frac{i}{2\pi l\varepsilon}\sqrt{\frac{m}{2e}}$$

e pertanto V_1 è la (unica) funzione soddisfacente a

$$xV_1'' + V_1' = V_1^{-\frac{1}{2}}, \qquad (V_1)_{x=a} = (V_1')_{x=a} = 0. \tag{β}$$

Per maggiore chiarezza, allo scopo di mettere in evidenza che V_1 dipende anche da a, scriveremo $V_1(x, a)$ in luogo di V_1. Ora si osserva che, qualunque sia la costante m,

La legge generale secondo cui la corrente i è proporzionale alla potenza 3/2 della tensione, porta i nomi di Child e Langmuir, che per primi l'hanno formulata rispettivamente nei casi a) e b).

Per la corretta applicazione di essa occorre non dimenticare che V_0 rappresenta la tensione dell'anodo rispetto al catodo virtuale e così d, r le distanze anodo-catodo virtuale, in generale poco diverse dalla distanza anodo-catodo (cfr. nota a pag. 316).

L'applicazione al caso di un diodo la cui tensione anodica V_0 venga fatta gradualmente crescere a partire da zero è immediata: la corrente, al crescere di V_0, aumenterà secondo la legge dianzi studiata, ma tale aumento non potrà verificarsi indefinitamente, in quanto che, nello stabilirla, si è implicitamente supposto che per costituire la corrente anodica fossero disponibili quanti si vogliano elettroni/sec, mentre, per una data temperatura del catodo, l'emissione catodica ha invece un valore ben determinato, precisamente quello che ad esso assegna la legge di Richardson.

Si può dunque asserire che la curva caratteristica del diodo, cioè la

---

la funzione $m^{-\frac{2}{3}} V_1(mx, ma)$ soddisfa alle stesse condizioni (β), dunque coincide con $V_1(x, a)$. Si conclude così che per questa sussiste l'identità funzionale

$$V_1(mx, ma) = m^{\frac{2}{3}} V_1(x, a) ,$$

e quindi per la funzione $\varphi = V_1^{\frac{3}{2}}$ che compare al denominatore della (11) si avrà

$$(\gamma) \qquad \varphi(mx, ma) = m\varphi(x, a) \qquad \text{cioè} \qquad \frac{\varphi(mx, ma)}{mx} = \frac{\varphi(x, a)}{x} ,$$

unitamente alle condizioni

$$(\delta) \qquad [\varphi(x, a)]_{x=a} = [\varphi'(x, a)]_{x=a} = 0 .$$

Dalla (γ) si deduce che $\frac{\varphi(x, a)}{x}$ dipende solo dal rapporto $\frac{x}{a}$; infatti, assumendo per variabili x ed $\frac{x}{a} = y$ e ponendo $\frac{\varphi(x, a)}{x} = \psi(x, y)$, si ha:

$$\psi(x, y) = \frac{\varphi(x, a)}{x} = \frac{\varphi(mx, ma)}{mx} = \psi(mx, y) ,$$

la quale mostra che $\psi(x, y)$ non dipende da x. Potremo dunque, ponendo $\frac{x}{a} = e^{\alpha}$, cioè $\alpha = \log \frac{x}{a}$, scrivere

$$\varphi(x, a) = xf(\alpha) .$$

Siccome tale $f(\alpha)$, a causa delle (δ), soddisfa a $f(0) = f'(0) = 0$, essa potrà considerarsi il quadrato di una funzione $g(\alpha)$ nulla per $\alpha = 0$. Lo sviluppo in serie di potenze di α di tale $g(\alpha)$ sarà dunque del tipo

$$g(\alpha) = a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

e, ponendo $(xg^2)^{\frac{2}{3}}$ al posto di V_1 nell'equazione differenziale (β), si potranno calcolare i coefficienti successivi. Si trova così:

$$g(\alpha) = \frac{3}{2}\left(\alpha - \frac{2}{5}\alpha^2 + \frac{11}{120}\alpha^3 - \frac{47}{3300}\alpha^4 + \dots\right).$$

curva (i, V_0), è data dal grafico della funzione $kV_0^{\frac{3}{2}}$ raccordato con la orizzontale corrispondente all'ordinata fornita dalla formola di Richardson, in relazione alla data temperatura del catodo. In fig. 145 sono così tracciate le caratteristiche corrispondenti a tre temperature T', T'', T''', $(T' < T'' < T''')$, essendosi indicato con $f(T)$ il secondo membro della (1).

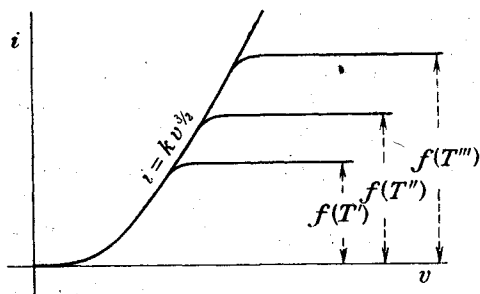



Fig. 145

L'aspetto generale di tali curve è del tipo disegnato in figura; ad un primo tratto in cui l'aumento è lento segue un *ginocchio*, dopo di che si entra in una regione pressochè rettilinea, dalla quale poi, in prossimità della tensione di saturazione, la curva stessa si stacca con un secondo gomito per assumere un andamento orizzontale. L'ordinata del tratto orizzontale dipende essenzialmente dalla temperatura, ed è misurata dal secondo membro della formola di Richardson ([1]).

Siamo ora in grado di comprendere come può sperimentalmente procedersi alla determinazione delle emissioni elettroniche alle varie temperature, e quindi alla verifica della formola di Richardson.

Invero, per stabilire il numero di elettroni emessi dal catodo portato alla *data* temperatura T, basterà portare l'anodo ad una tensione $\geqq V_s$, e misurare la corrente anodica, che certamente corrisponde a tutti gli elettroni emessi (saturazione). Tale tensione V_s crescerà col crescere della temperatura, per modo che la legge della *effettiva* emissione al variare della temperatura sarà rappresentata dalla curva di Richardson *raccordata* con la orizzontale corrispondente alla corrente di saturazione relativa alla determinata tensione applicata (fig. 146). Per es. se, tenendo fisso a 100 volt il valore di v, si fa crescere gradatamente la temperatura, si avranno correnti che seguono la legge di Richardson finchè la data tensione di 100 V *supera la saturazione*, per modo che tutti gli elettroni emessi possano essere raccolti dalla placca; mentre, quando la temperatura ha raggiunto limite tale pel quale la data tensione è quella di saturazione, un ulteriore aumento della temperatura determina bensì un aumento di emissione di

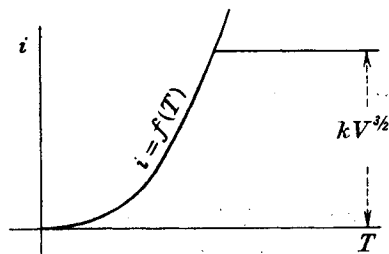



Fig. 146

([1]) La completa curva $i = kV_0^{\frac{3}{2}}$ può intendersi corrispondere a $T \to \infty$.

elettroni, ma il campo anodico non può attrarne di più ed allora la corrente i si serba costante.

Le curve rilevabili in pratica differiscono alquanto da quelle così descritte in base a considerazioni teoriche; in particolare i raccordi sono dolci, e ciò dipendentemente da molte circostanze.

Innanzi tutto, non tutti i punti del catodo possono essere alla stessa temperatura, a causa delle inevitabili dispersioni di calore agli estremi (supporti); pertanto, piuttosto che con un catodo a temperatura uniforme, si ha a che fare con infiniti elementi catodici a varia temperatura ed il diagramma della corrente anodica corrisponde alla somma dei diagrammi pertinenti a ciascun elemento, il che porta ad un raddolcimento del ginocchio superiore.

Poi, quando il catodo è riscaldato elettricamente, non tutti gli elementi di esso si trovano alla stessa tensione rispetto all'anodo, ma si ha, lungo il catodo stesso, una variazione lineare di tale tensione. Più precisamente, se V_f è la caduta di tensione dovuta al passaggio lungo il catodo — che supporremo filiforme — della corrente riscaldatrice, la tensione del punto generico P del filamento rispetto all'estremo negativo N vale xV_f, essendo x il rapporto fra PN e la lunghezza del catodo, talchè la tensione di P rispetto all'anodo vale $V_a - xV_f$. Pertanto il contributo che l'elemento catodico dx posto in P dà alla corrente anodica vale $k(V_a - V_f)^{\frac{3}{2}}$, essendo k il coefficiente di $lV^{\frac{3}{2}}$ nella formola (13) di Langmuir, e quindi la totale corrente anodica dovrà calcolarsi sommando (integrazione) i contributi stessi fra $x = 0$ ed $x = 1$ se è $V_a > V_f$, oppure fra $x = 0$ e $x = \frac{V_a}{V_f}$ per $V_a < V_f$, perchè in questo caso la sola frazione $\frac{V_a}{V_f}$ del catodo ha i suoi punti a potenziale minore dell'anodo e quindi è in grado di partecipare all'emissione. Si trova così, nel primo caso:

$$i = \frac{2}{5} k \frac{V_a^{\frac{5}{2}}}{V_f},$$

e nel secondo:

$$i = \frac{2}{5} k \frac{V_a^{\frac{5}{2}} - (V_a - V_f)^{\frac{5}{2}}}{V_f}$$

Naturalmente, la deviazione dalla legge $kV_a^{\frac{3}{2}}$ è tanto meno sensibile quanto minore è V_f in confronto a V_a (1).

Un altro contributo alla disuniformità termica del catodo, nel caso di riscaldamento elettrico di questo, è dovuto alla parziale sovrapposi-

(1) Invero, per $\frac{V_f}{V_a} \to 0$, la seconda delle indicate espressioni tende a $kV_a^{\frac{3}{2}}$, come si riconosce applicando la regola di L'Hôpital.

zione, sul catodo stesso, della corrente anodica e della corrente riscaldante. Ce ne possiamo facilmente render conto esaminando la fig. 147: in essa di rappresenta l'elemento di corrente elettronica i cui è interessato l'elemento dx di catodo posto alla distanza x dall'estremo positivo. Tale di, raggiunto dx, si biforca in guisa da rinforzare la corrente d'accensione I_f nel tratto verso l'estremo negativo, indebolendola invece verso l'estremo positivo. Ne consegue una tendenza a maggiore riscaldamento di quello rispetto a questo. Se, come generalmente accade, il circuito di filamento è provvisto di reostato di regolazione, si può limitare la accennata disuniformità disponendolo dal lato dell'estremo negativo. Invero, un semplice calcolo dimostra che se agli estremi positivo e negativo del filamento di resistenza $2R$, si inseriscono due resistenze R_p, R_n, i valori I_{fp}. I_{fn} della corrente di filamento agli estremi stessi sono misurate da:

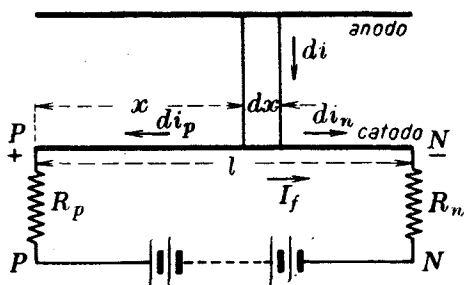



Fig. 147

$$I_{fp} = I_f - i\,\frac{R + R_n}{R_t}, \qquad I_{fn} = I_f + i\,\frac{R + R_p}{R_t}\ (^1),$$

essendo $R_t = 2R + R_n + R_p$ la resistenza totale del circuito di filamento ed $I_f = \frac{V_f}{R_t} = \frac{V_f}{2R + R_n + R_r}$ la relativa corrente in assenza dell'effetto che stiamo esaminando.

Un'ultima ragione per la quale le curve rilevate in pratica differi-

---

(1) Ammettendo che la corrente anodica sia uniformemente ripartita rispetto alla lunghezza del catodo, sarà evidentemente $di = \frac{i}{l}dx$, dove l rappresenta la lunghezza del catodo, e le due parti di_p, di_n in cui l'elemento di corrente di si divide valgono rispettivamente

$$di_p = \frac{2R - \frac{x}{l}2R + R_n}{R_t} \cdot \frac{i}{l}\,dx, \qquad di_n = \frac{\frac{x}{l}2R + R_p}{R_t} \cdot \frac{i}{l}\,dx.$$

Aggiungendo ad I_f l'integrale $\int_0^x di_n$ e sottraendo $\int_x^l di_p$, si ottiene il valore della corrente che, nel punto x, percorre il filamento, e precisamente:

$$I_f + i\left(\frac{x}{l} - \frac{R + R_n}{R_t}\right).$$

Facendo in queste $x = 0$, $x = l$, si ottengono le formole del testo.

scono da quelle teoricamente prevedibili è dovuta a fatti secondari imputabili alla imperfezione del vuoto.

4. - Caratteristica del diodo. — Per le applicazioni, ci basterà ritenere che il diodo, per una data temperatura attribuita al catodo emittente, si comporta come se lo spazio catodo-anodo fosse un conduttore. Ma si tratta di un conduttore *sui generis*, in quanto che, mentre per i conduttori ordinari si verifica la legge di Ohm, secondo la quale la tensione ai capi è proporzionale — secondo un coefficiente fisso, che è la resistenza — alla corrente che lo attraversa, la legge di dipendenza fra v ed i nel caso del diodo è quella definita dalla così detta *curva caratteristica* (VII, 3) il cui andamento completo è quello indicato in fig. 148, cioè si deve intendere prolungata in modo che per i valori negativi di v essa coincida con l'asse v (corrente nulla) ([1]), mentre la caratteristica di un conduttore ohmico è una retta che passa per l'origine e attraversa il primo e terzo quadrante.

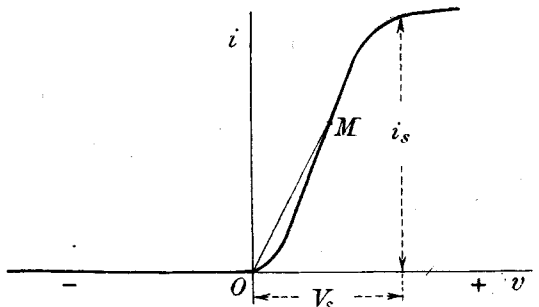



Fig. 148

La resistenza equivalente al diodo (rapporto della tensione ai capi alla corrente anodica) viene talvolta chiamata «resistenza in corrente continua»; essa è essenzialmente variabile al variare della tensione e (quindi) della corrente, cioè varia con lo stato di funzionamento. Per es., per valori di questa corrispondenti al punto di funzionamento M, tale resistenza è misurata dalla tg MOi (in una scala tale che ogni unità di tangente corrisponde a $\frac{v_1}{i_1}$ ohm, essendo 1 cm $= v_1$ volt, 1 cm $= i_1$ amp. le scale delle ascisse e delle ordinate). In particolare, per valori di $v < 0$, la resistenza equivalente è infinita in accordo col fatto che, per $v < 0$, nessuna corrente può aversi nel circuito anodico.

Per un diodo, come per ogni conduttore non lineare, si fa luogo a considerare, in ogni punto della sua caratteristica, un valore della resistenza differenziale r_a, e della inversa, la conduttanza differenziale g, definite da:

$$r_a = \frac{dv}{di} = \frac{1}{f'(v)}, \qquad g = \frac{di}{dv} = f'(v),$$

([1]) Prescindiamo dall'effetto dovuto alla velocità con la quale gli elettroni vengono emessi dal filamento, in conseguenza della quale le corrente non s'annulla esattamente con l'annullarsi della tensione anodica.

essendo $i = f(v)$ la equazione della curva caratteristica, e tali valori sono misurati dal coefficiente angolare rispetto all'asse i, oppure v, della tangente alla curva nel punto considerato.

Per valori di v negativi (più esattamente: per tensioni inferiori al così detto « potenziale di interdizione » che è un po' < 0), avendosi costantemente $i = 0$, si ha $g = 0$; ed altrettanto avviene per $v > V_s$. Per i valori di v compresi fra 0 e V_s, la g, partendo da valori piccolissimi, raggiunge un massimo in corrispondenza del punto centrale (punto di flesso) del tratto pressochè rettilineo, per poi ridiscendere a zero. Anzi, se il tratto centrale si assimila ad una retta, si può dire che per tutto il tratto stesso la g è costantemente uguale al predetto massimo. Per tale ragione, i costruttori, insieme alla corrente di saturazione i_s e alla tensione di saturazione V_s, indicano la g_{max}, o, ciò che è lo stesso, la $r_{a\,min}$. A causa dei due ginocchi, il rapporto $\frac{V_s}{i_s}$ risulta maggiore di $r_{a\,min}$. In pratica, nella maggior parte dei casi, si riscontra che è $\frac{V_s}{i_s} = \frac{3}{2} r_{a\,min}$ (1).

Se assimiliamo un diodo ad un apparecchio equivalente ad un *conduttore* pel quale la legge di dipendenza fra la tensione ai capi e la corrente è quella rappresentata dalla sua caratteristica, sorge naturale la seguente domanda: se il diodo è usato in corrispondenza di una certa coppia di valori (i, v) per modo che, *in quello stato di funzionamento*, esso equivale ad una resistenza $\frac{v}{i} = R$, come si manifesta il corrispettivo energetico di quella parte della potenza erogata dal generatore (precisamente $= vi = Ri^2$) che viene spesa in relazione al passaggio della corrente i attraverso al diodo? La risposta è semplice e ricorda l'analoga risposta che si avrebbe per il caso ohmico. In questo invero il corrispettivo richiesto è il calore Joule: invece nel caso del diodo si ha ancora una manifestazione calorifica, ma localizzata sulla placca, giacchè su questa, per effetto dell'urto degli elettroni che la colpiscono, l'energia cinetica degli elettroni si trasforma in calore. Tale energia cresce col quadrato della velocità

---

(1) Ammessa verificata esattamente la legge di Child-Langmuir, si ha che in generale la resistenza equivalente del tubo, cioè il valore del rapporto $\frac{v}{i}$, in un punto qualunque della caratteristica, uguaglia i $\frac{3}{2}$ della resistenza differenziale $\frac{dv}{di}$ nel punto stesso. Infatti da $i = kv^{\frac{3}{2}}$, prendendo i logaritmi dei due membri e differenziando, si deduce $\frac{3}{2}\frac{dv}{di} = \frac{v}{i}$. Siccome poi il punto centrale M del tratto all'incirca rettilineo della caratteristica (fig. 148) coincide sensibilmente col punto medio della congiungente l'origine col punto corrispondente alla saturazione, ne segue che la resistenza equivalente del tubo in M coincide col rapporto $\frac{V_s}{i_s}$, e quindi si ha $\frac{V_s}{i_s} = \frac{3}{2} r_{a\,min}$.

elettronica, o, il che equivale in virtù della (4), con la tensione V [1], e così si spiega che per tensioni $v > V_s$, pur avendosi costantemente $i = i_s$, il maggiore riscaldamento della placca trova il suo corrispettivo nella maggior potenza elettrica che viene spesa, per fatto dell'aumento di v, quantunque i non vari.

Si comprende di qui come in generale non convenga far funzionare il diodo in condizioni tali che v superi V_s. Se ne avrebbe come conseguenza un maggior riscaldamento dell'anodo e una maggiore potenza spesa in *pura perdita*. A tale proposito è bene sapere che, indipendentemente dalla costituzione di ogni diodo, v'è un limite superiore, generalmente indicato dal costruttore, per la *potenza dissipabile sull'anodo*, in relazione alla possibilità di smaltire il corrispondente calore, senza che la temperatura dell'anodo salga a limiti tali da compromettere l'apparecchio.

5. - **Raddrizzatori a diodi.** — Il diodo, considerato come conduttore nei campi di funzionamento in cui la resistenza ad esso equivalente non è infinita, è tuttavia un conduttore ad elevata resistenza, giacchè, sia per la limitata emissione del catodo, sia per il fenomeno della carica spa-

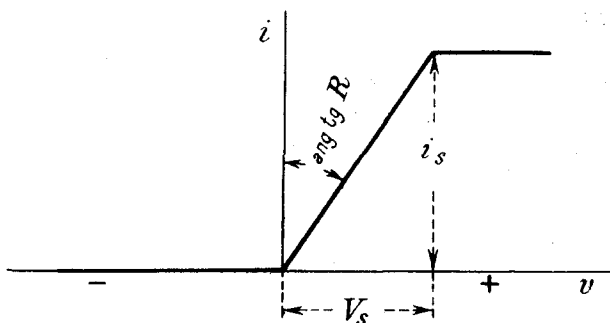



Fig. 149

ziale, risulta piuttosto elevato il rapporto $\frac{v}{i}$, quindi esso non può essere utilmente ed economicamente introdotto in un circuito se non in serie con una resistenza (di carico) notevolmente più elevata della sua, e quindi con una tensione applicata (all'intero circuito) di valore notevolmente maggiore della V_s.

In generale i diodi vengono usati per *raddrizzare* le correnti, cioè per ottenere correnti aventi media non nulla usando tensioni a media nulla, per lo più alternative.

---

[1] La velocità con la quale gli elettroni urtano l'anodo si calcola ponendo per e ed m i loro valori nella relazione $\frac{mv^2}{2} = eV$. Si trova così $v \cong 600 \sqrt{V}$ km/sec.

Se, per semplicità, supponiamo che la caratteristica sia costituita, come in fig. 149, da tre tratti rettilinei, il diodo potrà considerarsi come un conduttore ohmico per v compreso fra 0 e V_s, e come una interruzione per $v \leqq 0$. Se ai suoi capi è applicata una tensione alternativa $v = V_m \operatorname{sen} \omega t$ di ampiezza $V_m < V_s$, ed R è la resistenza equivalente al diodo nel tratto $0 < v < V_s$, la corrente nel circuito sarà *zero* durante il semiperiodo in cui la tensione è negativa, ed uguale a $\frac{v}{R}$ durante l'altro semiperiodo, quindi il suo diagramma sarà del tipo indicato in fig. 150, dove le anse hanno esattamente la forma sinusoidale.

Fig. 150

Naturalmente, all'atto pratico, non essendo rettilinea la caratteristica, le curve di corrente differiranno alquanto dalla semisinusoide. E se inoltre il circuito, oltre ad un generatore di f. e. m. $e = E_m \operatorname{sen} \omega t$, comprende una resistenza di utilizzazione R', il ragionamento precedente potrà ripetersi, purchè, istante per istante, si metta in conto la tensione v ai capi del diodo, la quale sarà sempre misurata da $e - R'i$. Ma la corrente i è legata a questa tensione, che indicheremo ancora con v, dalla legge rappresentata dalla caratteristica del diodo, cioè $i = f(v)$, quindi in definitiva, conformemente a quanto indicato in VII, 3, si potrà operare così (fig. 151): per ogni valore Oe, Oe', Oe'' di e si conducano delle rette eM, $e'M'$, $e''M''$ la cui inclinazione sull'asse i sia $\varphi = \operatorname{arctg} R'$; se P, P', P'' sono i relativi punti d'incontro con la caratteristica del diodo, le ordinate di tali punti misureranno le correnti corrispondenti a quei valori di e.

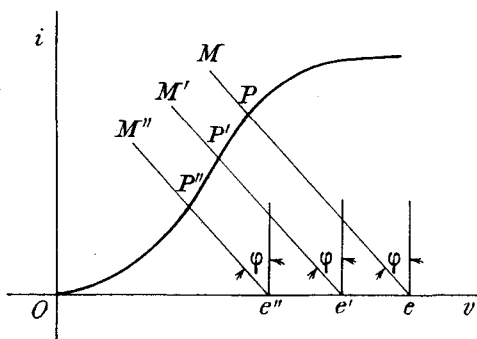



Fig. 151

Per le ragioni che sappiamo, converrà che le cose siano disposte in guisa che la tensione ai capi del diodo non superi la V_s; e ciò permette di determinare, per una data tensione E_m da raddrizzare, il limite inferiore dei valori da assegnarsi alla R' di utilizzazione affinchè ciò si verifichi. Questo difatti dovrà essere tale che $E_m - R'I_s$ risulti uguale a V_s, donde:

$$R' = \frac{E_m - V_s}{i_s}.$$

Il calcolo della potenza dissipata non è agevole, a causa della forma della curva caratteristica del diodo, la quale costringe a calcolare, per così dire, uno per uno i valori della corrente. Tuttavia, senza errore sensibile, si potrà approssimativamente ritenere che nell'alternanza positiva il diodo presenti resistenza costante ed uguale ad R, *pei valori di corrente inferiori ad* i_s (ed effettivamente, se R' è scelta come sopra, la corrente sarà realmente sempre $< i_s$), per modo che la corrente avrà il valore $\frac{e}{R + R'}$ e quindi la potenza media erogata nel semiperiodo vale $\frac{E_m^2}{2(R + R')}$, mentre quella dissipata corrisponderà al prodotto di questa pel rapporto $\frac{R}{R + R'}$. Infatti, il quadrato della corrente istantanea vale $\frac{e^2}{(R + R')^2}$ e quindi la potenza media dissipata in R nel semiperiodo è data da $\frac{RE_m^2}{2(R + R')^2}$. Siccome poi nell'alternanza seguente la corrente è nulla, le potenze medie, riferite ad un intero periodo della e, saranno la metà delle precedenti espressioni.

È importante rilevare che, se a (fig. 152) è la sinusoide della tensione impressa $e = E_m$ sen ωt, la curva della tensione ai capi di R' sarà del tipo b, composta cioè di una mezza sinusoide seguita da un tratto dell'asse dei tempi. E pertanto la tensione ai capi del diodo, risultando dalla differenza dei diagrammi a e b, avrà un diagramma c composto di una mezza sinusoide d'ampiezza uguale alla differenza delle ampiezze di a e di b, e di una mezza coincidente con a. L'ampiezza del primo ramo, date le ipotesi in cui ci siamo posti, corrisponde alla tensione di saturazione del diodo, ma quella del secondo ramo coincide con la tensione applicata E_m che, per le ragioni dette, sarà in generale notevolmente superiore alla V_s. Si comprende quindi che, in tale stato di cose, i due elettrodi del diodo vengono in taluni istanti a trovarsi sottoposti ad un campo elettrostatico assai maggiore di quello che non sia nel tempo in cui circola la corrente. Ciò determina anche una sollecitazione meccanica [1], della quale occorre tener conto per evitare deformazioni.

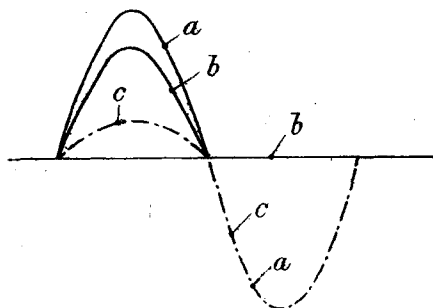



Fig. 152

[1] Ricordiamo (El., III, 12) che le armature di un condensatore caricato si attraggono.

Se la resistenza di utilizzazione, anzichè uguale alla R' dianzi determinata, è ad essa superiore, la corrente di saturazione non viene raggiunta; tuttavia i ragionamenti precedenti sono ancora validi; se invece è inferiore, il diodo, nell'alternanza positiva, si troverebbe sottoposto ad una tensione superiore a quella di saturazione, ed allora il diagramma della corrente assumerebbe l'aspetto di una semisinusoide cui si sia asportata la parte superante la ordinata i_s (fig. 153). Aumenterebbe allora la potenza dissipata sull'anodo, che potrebbe facilmente essere valutata con l'integrazione effettiva. Nel primo caso invece (resistenza di utilizzazione $> R'$) il diodo non sarebbe sfruttato al massimo.

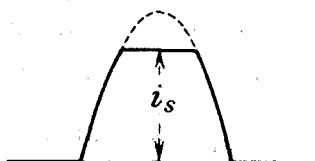



Fig. 153

Caso per caso converrà calcolare le potenze spese e quelle dissipate, sia per trarne la nozione del *rendimento* ottenuto, sia per verificare se le seconde sono contenute nei limiti imposti dal costruttore. Se, per es., si avesse un tubo corrispondente alle seguenti caratteristiche: corrente erogabile 350 mA, tensione massima 10 kV, dissipazione anodica 200 W, resistenza differenziale minima 1500 Ω, lo studio della sua utilizzazione potrebbe condursi in prima approssimazione nel modo seguente: assumendo $\frac{V_s}{i_s} = \frac{3}{2} r_{a\,min}$, si trova subito, che, essendo $i_s = 350$ mA, la tensione di saturazione risulta di $\frac{3}{2} \cdot 1500 \cdot 350 \cdot 10^{-3} = 787,5$ volt.

Spingendo a 10 000 volt la tensione massima fra gli elettrodi, potremo usare il diodo in un circuito in cui la d. d. p. alternata impressa è di $\frac{10\,000}{\sqrt{2}} \cong 7\,070$ volt efficaci. La resistenza di carico, affinchè non venga superato V_s, dovrà essere di almeno

$$R' = \frac{10\,000 - 787,5}{0,350} \cong 26\,320\ \Omega\ ;$$

e la dissipazione anodica media effettiva risulterà di

$$\frac{787,5 + 0,35}{4} \cong 74 \text{ watt.}$$

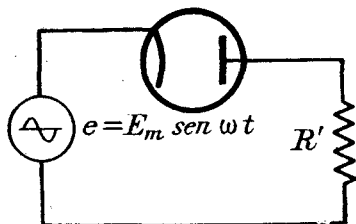



Fig. 154

Lo schema corrispondente alla inserzione studiata è quello rappresentato nella fig. 154.

Ma si può facilmente realizzare un dispositivo atto a consentire l'utilizzazione di entrambe le alternanze. Basta disporre (fig. 155) in serie due generatori di f. e. m. $\frac{e}{2} = E_m$ sen ωt fra loro in fase (quali ad es. possono generarsi nelle due porzioni in cui l'avvolgimento secondario di un

trasformatore è diviso dal suo punto medio), ciascuno con un capo connesso al catodo di un diodo, e disporre la resistenza di carico R' in parallelo fra i due sistemi costituiti dall'altro capo di ciascun generatore e dal relativo diodo. Si vede subito che i due generatori erogano alternativamente per mezzo periodo, per modo che in R' la corrente fluisce in entrambi i semiperiodi sempre nello stesso senso. In questo caso però la tensione ai capi dei diodi raggiungerà alternativamente nei due semiperiodi i valori $E_m - R'I_m$, $E_m + R'I_m$, essendo I_m il valore massimo della corrente.

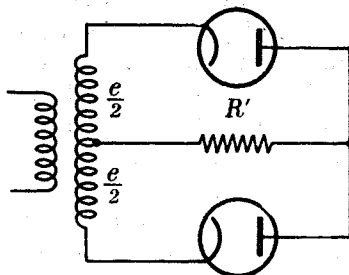



Fig. 155

Con altri schemi si possono raddrizzare sistemi polifasi di tensioni alternative, ma di ciò si parlerà in sede opportuna.

6. - Diodi a vuoto non spinto. — Il comportamento di un diodo dipende molto dalla perfezione del vuoto nell'ampolla. Se questo non è molto spinto, le molecole esistenti nello spazio anodo-filamento, quando sono urtate dagli elettroni che si dirigono con elevata velocità alla placca, si ionizzano, liberando non soltanto ioni negativi che vanno a rinforzare la corrente elettronica, ma anche ioni positivi i quali, essendo in generale assai pesanti e venendo attratti dal catodo in guisa da cadervi con elevata velocità, in breve lo disgregherebbero. Per contro però la loro presenza, è, entro certi limiti, vantaggiosa, perchè essi servono anche a neutralizzare la carica spaziale e quindi ad aumentare il flusso elettronico, a parità di tensione anodica applicata.

Non conviene poi mai spingere la tensione ai capi del diodo a valori eccessivi, poichè ciò produce aumento di velocità degli elettroni, cui si accompagna un urto più energico contro l'anodo, e tale urto, col riscaldamento che ne consegue, provoca la liberazione dei gas occlusi nell'elettrodo, diminuendosi così il grado di vuoto, mentre i fenomeni di ionizzazione di cui sopra vengono resi ancor più importanti per fatto della maggiore velocità degli elettroni.

Tali considerazioni lasciano anche comprendere che si otterrebbe un più favorevole valore del rapporto $\frac{v}{i}$, cioè una minore resistenza equivalente, se si favorisse la ionizzazione. E con ciò si raggiungerebbe anche la possibilità di utilizzare il diodo anche per raddrizzare economicamente tensioni basse.

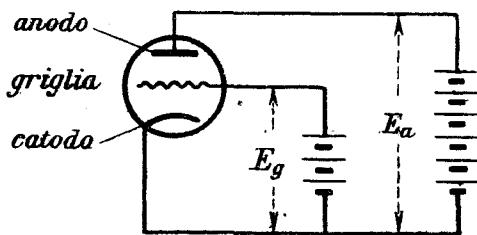
In effetto, a tale scopo si costruiscono tubi nei quali, a differenza dei diodi a vuoto spinto, detti anche *kenotron*, il vuoto è parzialmente colmato da gas a bassa pressione. Sono essi i così detti *tungar* (tungsteno-

argon) in cui è contenuto gas argon alla pressione di circa 50 mm di Hg in presenza di un catodo di tungsteno. In tali tubi la ionizzazione delle molecole di argon, dovuta all'urto degli elettroni emessi dal catodo, produce ioni positivi che neutralizzano la carica spaziale, e vanno poi a cadere sul catodo, ma con velocità sufficientemente limitata affinchè non ne risulti compromessa la vita del catodo stesso. La « caduta di tensione » in questi apparecchi riesce dell'ordine di 10 volt, quindi essi servono bene per raddrizzare economicamente basse tensioni, con correnti di alquanti ampere. Il tungar non può però usarsi per raddrizzare tensioni elevate, perchè, anche a poche centinaia di volt, la ionizzazione del gas si compie per puro effetto elettrico *anche senza la presenza degli elettroni urtanti*, e pertanto l'apparecchio perde la caratteristica fondamentale di conduttore a *conduttività unilaterale*. Invece dell'argon si possono introdurre dei vapori di mercurio e si ottengono così dei diodi assai efficienti detti « a vapori di mercurio *a catodo caldo* » (1) di bassissima caduta interna e utilizzabili per tensioni notevolmente elevate, con le modalità che verranno studiate a tempo opportuno.

B) Triodi.

7\. - **Tubi a tre elettrodi.** — Se si pensa che in un diodo la corrente anodica, per un dato riscaldamento del catodo, dipende dalla distribuzione del campo elettrico nello spazio anodo-catodo, si comprende che si può realizzare una stessa corrente anodica anche quando la medesima distribuzione di campo sia ottenuta con mezzi eventualmente diversi da quello — unico possibile nel diodo — di applicare una certa tensione fra il catodo e l'anodo.

Fig. 156

A tal fine, supponendo che l'anodo sia foggiato come un cilindro coassiale al catodo, disponiamo, ad una distanza da questo minore di quella della placca, un terzo elettrodo cui attribuiremo analoga disposizione, a struttura discontinua, costituendolo ad es. a spirale od a rete con maglie più o meno fini; e poi, dopo aver riscaldato il catodo e portato l'anodo ad una certa tensione *fissa* E_a, attribuiamo a tale terzo elettrodo, che per la sua forma si chiama *griglia*, una certa tensione E_g rispetto al catodo (2) (fig. 156). Si può constatare che, con E_g fortemente negativa,

(1) Per distinguerli dai raddrizzatori a macchia catodica (El., XVI, 1).
(2) Tali E_a ed E_g verranno intese positive quando, come a fig. 156, sono tali da rendere l'anodo (risp. griglia) positivo relativamente al catodo.

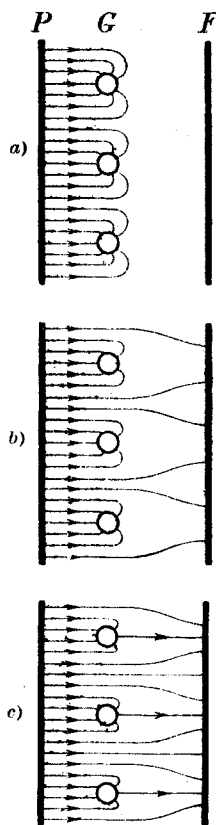
la corrente anodica è nulla e tale si conserva anche diminuendo $|E_g|$ fino ad un certo limite E_i che si chiama *tensione di interdizione* (relativa, ben inteso, alla data tensione E_a). Se, a partire da questa E_i, continuiamo a diminuire il valore assoluto di E_g negativa, la corrente anodica si manifesta e cresce con legge simile a quella che si constata in un diodo, cioè con un diagramma del tipo noto, che dapprima sale lentamente, poi piega bruscamente verso un lungo tratto rettilineo. Ciò, che con sufficiente precisione si verifica finchè è $E_g \leqq 0$, sta ad indicare che il campo elettrico prodotto da E_g si compone con quello prodotto da E_a, modificando questo fino ad annullarlo quando $|E_g|$ è fatta uguale alla tensione di interdizione, mentre col diminuire il valore assoluto di E_g, sempre però rimanendo questa negativa, la compensazione è parziale e tutto avviene *come se* all'anodo fosse applicata una tensione minore di quella che realmente vi è impressa.

La cosa è fisicamente comprensibile se si pensa che la griglia, a causa della sua maggior vicinanza al catodo, è in grado di compensare il campo anodico, anche con modesti valori negativi della tensione E_g.

D'altra parte, la struttura discontinua della griglia consente che, quando il campo risultante è tale che le linee di forza partenti dalla placca riescano a raggiungere la carica spaziale, gli elettroni possono risalire le linee stesse e raggiungere la placca, il che invece non sarebbe possibile se la griglia fosse, come l'anodo, a struttura continua, perchè allora costituirebbe un vero e proprio schermo atto a sottrarre la carica spaziale dall'influenza del campo anodico.

Continuando a far crescere E_g oltre il valore nullo, i valori della corrente anodica non sono più rigorosamente corrispondenti al diagramma diodico: ma frattanto, per essere la griglia positiva, essa pure funziona come secondo anodo ed è quindi in grado di assorbire elettroni, incanalandoli, attraverso il suo circuito, al filamento. Si forma cioè una *corrente di griglia* nel circuito che, esternamente al tubo, si chiude attraverso i conduttori che fanno capo alla griglia e all'anodo, e costituiscono il *circuito di griglia*, mentre *circuito anodico* o *di placca* si chiama quello che fa capo al filamento e all'anodo. Orbene, si può constatare che se si somma la corrente di griglia con la corrente anodica si ottiene un risultato, detto *corrente totale*, il cui diagramma corrisponde al diagramma diodico.

Fig. 157

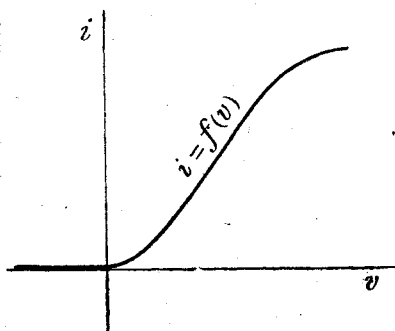
La fig. 157 (in cui con P, G, F sono indicate la placca, la griglia ed

il catodo) mostra l'andamento delle linee del campo elettrico nei vari casi esaminati: in *a*) la tensione E_g è negativa ed il suo valore assoluto supera quello della tensione d'interdizione E_i, in *b*) è ancora negativa ma è $|E_g| < |E_i|$, in *c*) è $E_g > 0$ e quindi si ha anche corrente di griglia.

Il congegno descritto, detto tubo elettronico a tre elettrodi o *triodo* (De Forest, 1907), è dunque un apparecchio che permette di ottenere variazioni della corrente anodica senza variare la tensione anodica, e ciò mediante il *controllo* del flusso elettronico effettuato a mezzo di un elettrodo facente parte di un circuito *diverso* da quello della placca.

Quanto maggiore è la vicinanza della griglia al catodo e quanto più fini sono le maglie che la costituiscono, tanto più tale controllo è efficiente, nel senso che, per realizzare una data variazione di corrente anodica, possono bastare minori variazioni nella tensione di griglia rispetto a quelle che occorrerebbe attribuire, per ottenere lo stesso effetto, alla tensione di placca.

8. - Dipendenza della corrente dalle tensioni dell'anodo e della griglia. — Più precisamente, si rileva sperimentalmente che, se si prende a considerare quella che abbiamo chiamato la corrente totale, essa dipende, secondo una legge simile a quella che governa la corrente in un diodo sottoposto a diverse tensioni anodiche, dalla così detta *tensione globale*, cioè dalla somma della tensione E_a di placca e del prodotto della tensione E_g di griglia per un fattore μ, che alla sua volta dipende dalla struttura del triodo, e segnatamente dalle distanze relative della griglia e della placca dal catodo, nonchè dalla struttura della griglia.

Fig. 158

Ciò deve intendersi nel senso che, se la corrente viene rappresentata, nel corrispondente diodo, da una relazione $i = f(v)$ dove v è la tensione anodica del diodo, ed $f(v)$ la funzione rappresentata dalla nota curva (fig. 158), per il triodo, la dipendenza fra la corrente *totale* i_t e la tensione globale $E_a + \mu E_g$ è dello stesso tipo, cioè si ha:

$$i_t = f(E_a + \mu E_g) \quad (14)$$ [1].

Ne segue che se tracciamo i vari diagrammi (i_t, E_g) per differenti

(1) Ciò val quanto dire che è costante il rapporto fra le derivate $\frac{\partial i_t}{\partial E_a}$ e $\frac{\partial i_t}{\partial E_g}$, cioè il coefficiente differenziale $\frac{\partial E_a}{\partial E_g}$ calcolato per $i_t = \text{cost.}$

— ma ogni volta ben determinati — valori di E_a, due qualunque di questi riescono fra loro uguali e spostati l'uno rispetto all'altro, parallelamente all'asse E_g, di un segmento $= \frac{E'_a - E''_a}{\mu}$, essendo E'_a, E''_a i valori delle tensioni anodiche ad essi corrispondenti. Così in fig. 159 sono disegnati quattro di tali diagrammi corrispondenti a quattro valori equidifferenti E'_a, E''_a, E'''_a, E^{IV}_a della tensione anodica, decrescenti da E'_a a E^{IV}_a.

Il diagramma della corrente anodica coincide con quello della corrente totale finchè è $E_g < 0$, poi si inclina un po' verso l'asse E_g, perchè, come

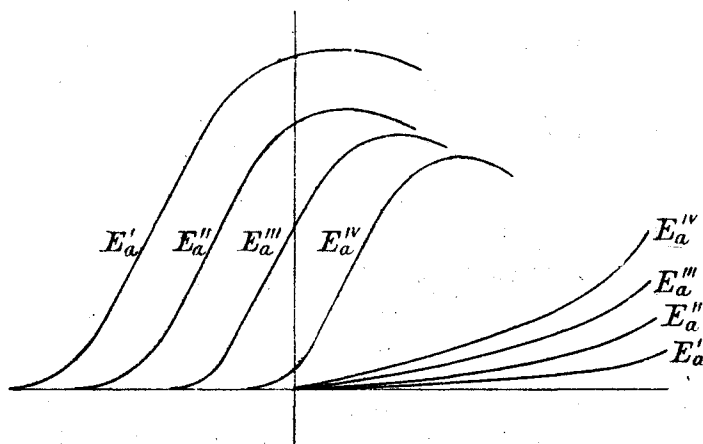



Fig. 159

si è detto, per $E_g > 0$ si manifesta corrente di griglia, a scapito di quella di placca. Tali correnti sono in generale molto deboli relativamente alle anodiche, finchè E_g è molto minore di E_a, ma per valori di E_g positivi e paragonabili ad E_a, esse assumono valori apprezzabili e perciò i diagrammi della corrente anodica I_a per tali valori di E_g piegano sensibilmente in basso, come si vede nella fig. 159, dove sono indicati anche i diagrammi della corrente di griglia I_g, che ovviamente si svolgono tanto più vicino all'asse E_g quanto maggiore è la tensione E_a.

L'andamento della corrente di griglia al crescere della tensione (positiva) di griglia presenta inizialmente caratteri analoghi a quelli dell'ordinaria curva diodica, come è fisicamente intuitivo; invece, per tensioni di griglia molto elevate, si ha un notevole aumento di I_g ed una corrispondente notevole diminuzione di I_a (fig. 160).

Avvertiamo una volta per tutte che, salvo avviso contrario, assumeremo sempre come potenziale di riferimento quello dell'estremo negativo del catodo [1]. Così, quando diciamo ad es., che la griglia è a potenziale

[1] In relazione a ciò, spesso, negli schemi, questo punto viene contrassegnato col simbolo di « terra ».

zero, ciò significa che la griglia è connessa all'estremo negativo del catodo, di guisa che nessun suo punto trovasi a potenziale superiore a quello del catodo stesso. La corrente di griglia ha però origine un po' prima di $E_g = 0$, per la ragione, già detta a proposito dei diodi, che la velocità iniziale degli elettroni uscenti dal catodo non è nulla.

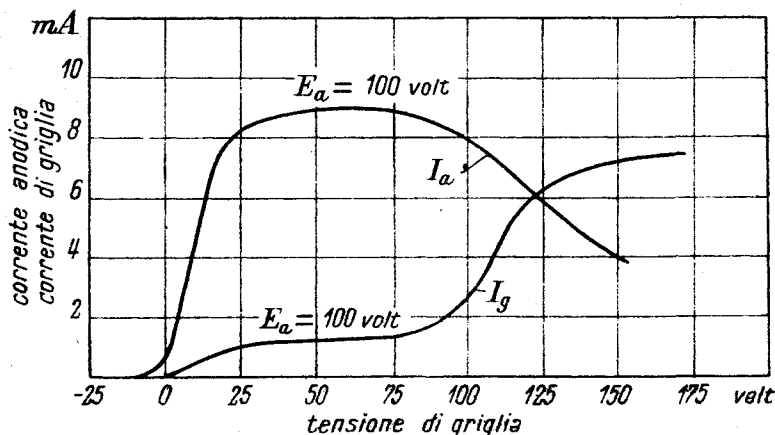



Fig. 160

9. - **Caratteristiche.** — Se ci limitiamo a considerare stati di funzionamento per i quali I_g è nulla o piccolissima, avremo che le così dette *caratteristiche statiche* (¹), cioè le curve (I_a, E_g) (²) per ogni valore costante di E_a, partono da punti dell'asse E_g situati tanto più a sinistra quanto maggiore è E_a (se si potesse ritenere nullo il potenziale di interdizione del corrispondente diodo, il valore di E_g da cui parte ogni caratteristica sarebbe $-\frac{E_a}{\mu}$), e, dopo un tratto a debole pendenza, presenta un lungo tratto praticamente rettilineo la cui inclinazione sull'asse E_g corrisponde evidentemente al prodotto di μ per la g_{max} del diodo di confronto, perchè le ascisse sono i valori di E_g e non quelli di E_a. In altre parole, nella regione di tali tratti rettilinei, le *variazioni* della corrente anodica I_a sono *proporzionali* alle variazioni della tensione globale $E_a + \mu E_g$, per cui, indicando con i_a, e_a, e_g le differenze fra i valori di tali grandezze e quelli corrispondenti ad una terna I_{a0}, E_{a0}, E_{g0} scelta opportunamente (entro

(¹) L'appellativo « statiche », per quanto assai diffuso, non può ritenersi appropriato. Sarebbe senza dubbio preferibile parlare di caratteristiche « intrinseche » o « proprie », oppure, considerando il circuito anodico del triodo come elemento integratore del generatore anodico, esse potrebbero chiamarsi « caratteristiche di corto circuito » (del sistema generatore-triodo).

(²) Indichiamo in generale con (y, x) una curva che, avendo x per ascisse, ha y per ordinate corrispondenti.

la regione predetta), il corrispondente circuito differenziale è governato da una relazione lineare, cioè del tipo:

$$r_a i_a = e_a + \mu e_g \,. \tag{15}$$

È questa la così detta *equazione di Vallauri*.

Il significato della costante μ ci è noto, e del resto scaturisce subito dalla precedente. Invero, se andiamo a calcolare le variazioni e'_a ed e' che contemporaneamente occorre attribuire alle tensioni di griglia e di placca affinchè la corrente anodica non vari ($i_a = 0$), si trova:

$$\mu = -\frac{e'_a}{e'_g} \,,$$

cioè μ misura il rapporto, col segno cambiato, di quelle due tensioni e'_a ed e'_g. Oppure: se ci proponiamo di realizzare una medesima variazione i'_a, una volta operando sulla tensione di placca, una volta su quella di griglia, lasciando ogni volta inalterata l'altra, dobbiamo attribuire, nel primo caso ($e_g = 0$), alla placca una variazione di tensione e'_a tale che sia:

$$r_a i'_a = e'_a \,,$$

nel secondo ($e_a = 0$), alla griglia una variazione di tensione e'_g tale che sia:

$$r_a i'_a = \mu e'_g \,,$$

donde, dividendo membro a membro:

$$\frac{e'_a}{e'_g} = \mu \,;$$

cioè μ misura il rapporto fra tali due variazioni.

Per tale ragione, μ si chiama *fattore* — o coefficiente — di *amplificazione* del triodo. Evidentemente esso è un numero puro.

Quanto alla costante r_a, che manifestamente misura una resistenza, essa si chiama appunto la *resistenza interna* o *resistenza anodica* del triodo (si dovrebbe più esattamente dire « resistenza interna minima »), come la sua inversa $\frac{1}{r_a}$, che si suole indicare con g_a, chiamasi *conduttanza anodica* (conduttanza anodica massima) [1]. Il suo significato si legge nella (15), giacchè, facendo in essa $e_g = 0$, risulta $r_a = \frac{e_a}{i_a}$; dunque r_a è il rapporto fra la variazione di tensione anodica e la corrispondente variazione di corrente anodica, quando si lasci inalterata la tensione di griglia.

---

[1] Tali denominazioni sono però improprie, giacchè si dovrebbe dire « resistenza differenziale » rispettivamente « conduttanza differenziale ».

Nei riguardi delle variazioni di corrente anodica (rispetto ad una certa corrente I_{a0} di riferimento o di riposo, dovuta ad una certa coppia di tensioni E_{a0} ed E_{g0} di placca e di griglia), cioè nello studio differenziale (VII, 4) relativo al triodo, si può dire che il corrispondente circuito differenziale consta di un conduttore di resistenza fissa r_a, posto in serie con una sede di f. e. m. $e_a + \mu e_g$ uguale alla *variazione della tensione globale.*

Scriviamo la (15) sotto la forma:

$$i_a = \frac{\mu}{r_a}\left(e_g + \frac{e_a}{\mu}\right),$$

e poniamo $\frac{\mu}{r_a} = g_m$. Questa grandezza misura la così detta *conduttanza mutua* (sottinteso « differenziale ») di cui si può dare una definizione analoga alle precedenti. Invero, osservando che per $e_a = 0$, è $i_a = g_m e_g$, si deduce che essa corrisponde al rapporto fra la variazione di corrente anodica e la variazione di tensione di griglia che l'ha prodotta, mentre si è mantenuta costante la tensione anodica. Come rapporto di una corrente ad una tensione, essa misura una *conduttanza*; pel fatto che la variazione di corrente è ottenuta con tensione applicata in *altro* circuito, la si chiama *mutua* (1).

La precedente, che, introducendo

$$g_m = \frac{\mu}{r_a} = \mu g_a,$$

si scrive

$$i_a = g_m\left(e_g + \frac{e_a}{\mu}\right), \tag{16}$$

conduce a considerare la espressione $e_g + \frac{e_a}{\mu}$, alla quale si dà il nome di *tensione risultante di griglia*, perchè, quando si applicano le variazioni e_a ed e_g alle due tensioni, anodica e di griglia, il risultato (variazione di corrente anodica) è lo stesso come se si applicasse *alla sola griglia* la variazione di tensione $e_g + \frac{e_a}{\mu}$.

Insomma, secondo la (15), gli effetti di e_g appaiono equivalenti ad una tensione μe_g applicata al circuito anodico; secondo la (16), gli effetti di e_a appaiono invece equivalere ad una tensione $\frac{e_a}{\mu}$ applicata al circuito di griglia.

---

(1) Occorre però osservare che l'appellativo « mutua » non è proprio, in quanto che le funzioni dei due circuiti non sono simmetriche.

10. - Conduttanza anodica e mutua in un punto qualunque della caratteristica. — Per quanto riguarda la validità delle formole indicate nei nn. prece., è da osservare che, se la condizione iniziale corrisponde ad un punto appartenente alla zona in cui le caratteristiche hanno andamento rettilineo, le relazioni differenziali scritte saranno valide per escursioni abbastanza ampie degli elementi elettrici e_g, e_a, i_a in esse interessati. Tale zona, che brevemente chiameremo *di linearità*, è quella caratterizzata dal fatto che le varie caratteristiche sono rappresentate da tratti di rette parallele aventi fra loro distanze proporzionali alle differenze fra i corrispondenti valori delle tensioni anodiche.

Nel caso più generale, in cui si operi attorno ad un punto qualunque, la relazione che fornisce i valori delle variazioni i_a in funzione delle variazioni e_a ed e_g, sarà del tipo (cfr. VII, 3):

$$i_a = g_a(e_a + \mu e_g) + h(e_a + \mu e_g)^2 + \ldots \tag{17}$$

dove g_a, h ... sono i valori delle derivate f', $\frac{f''}{2}$,... della funzione, di tipo diodico, $i_a = f(e_t)$, che lega i valori di i_a a quelli della variazione e_t della tensione globale $E_t = E_a + \mu E_g$, essendo le derivate stesse calcolate nel punto iniziale considerato.

La costante g_a che compare in questa formola è la conduttanza differenziale anodica *relativa a quel punto*, e così il prodotto μg_a è la corrispondente conduttanza mutua g_m, talchè si ha sempre:

$$g_m = \mu g_a .$$

In sostanza, se si opera a partire da una condizione iniziale generica, si hanno ancora relazioni come quelle indicate nei nn. prece., purchè le escursioni di E_a ed E_g siano intese sufficientemente ridotte, e, per valori di g_a e di g_m, si assumano quelli relativi al punto iniziale considerato. Qualora invece le escursioni di E_a ed E_g non siano abbastanza piccole, occorrerà non trascurare i termini che nello sviluppo (17) seguono il primo.

È interessante notare che, quantunque le grandezze g_a e g_m non possano, a rigore, considerarsi delle vere costanti neppure nella zona che abbiamo chiamato di linearità, il loro rapporto ha invece variazioni spesso trascurabili per tutta una vasta zona di funzionamento, il che sta ad indicare che il coefficiente d'amplificazione può invece ritenersi sensibilmente costante [1].

---

[1] Conformemente a quanto accennato a pag. 334 nota, quello che può considerarsi praticamente costante non è il rapporto $\frac{g_m}{g_a}$, cioè il coefficiente differenziale $-\frac{\partial E_a}{\partial E_g}$ calcolato mantenendo costante la corrente *anodica* I_a, ma l'analogo coefficiente calcolato per valore costante della corrente *totale* $I_a + I_g$.

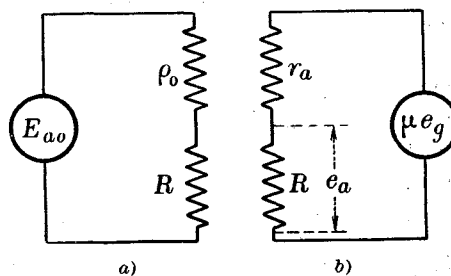
11. - Osservazioni sul circuito differenziale equivalente. — Sulla equivalenza del circuito differenziale anodico con un circuito di resistenza fissa r_a cui siano applicate in serie due d. d. p. (differenziali) e_a e μe_g, deve farsi una importante osservazione, e precisamente occorre rilevare che, mentre nel circuito anodico la e_a in effetto esiste, non può dirsi altrettanto della μe_g, e pertanto quest'ultima f. e. m. deve considerarsi l'equivalente di una variazione della conduttanza differenziale g_a, nel senso spiegato in VII, 8.

In particolare, l'applicazione delle nozioni generali allora stabilite, ci consente di asserire quanto segue. Quando, intorno alla condizione iniziale definita dai valori E_{a0}, E_{g0}, I_{a0} si fanno avvenire variazioni e_a, e_g cui corrisponde una variazione i_a della corrente anodica ([1]), questa può, è vero, intendersi determinata dall'applicazione delle tensioni e_a e μe_g in serie in un circuito fittizio di resistenza fissa r_a, ma, nei riguardi energetici, la potenza elettrica generata o assorbita dalla μe_g non è potenza entrante nel circuito, rispettivamente uscente da esso, bensì essa corrisponde a minore, rispettivamente maggiore, dissipazione in r_a.

In ogni caso poi, se le e_a ed e_g sono variabili nel tempo con legge alternativa, la potenza (media in un periodo) in giuoco nel circuito differenziale è tale che, sommata con quella del circuito sede degli elementi iniziali, dà la potenza complessiva in giuoco nell'intero sistema. Per lo più, nelle applicazioni, la tensione iniziale E_{a0} è costante, e la tensione differenziale e_a è la controtensione dovuta ad una impedenza (effettiva o equivalente) di utilizzazione, e quindi la potenza ad essa corrispondente, ben inteso per la parte pertinente alla corrente differenziale i_a, è negativa, cioè rappresenta potenza uscente dal circuito. L'entrata energetica deve dunque necessariamente localizzarsi nella μe_g fittizia, e pertanto la potenza generata da questa deve intendersi sottratta alla potenza dissipata in r_a, cosicchè il sistema (r_a, μe_g) equivale in effetto ad una resistenza negativa.

Fig. 161

Ma, e ciò è concettualmente assai importante, tale fatto non potrà certo esprimersi dicendo che quella potenza è *generata* dal triodo, o *ceduta* dal triodo al circuito di utilizzazione, o con altre frasi analoghe.

Nella fig. 161, che rappresenta il circuito di riposo *a*) e quello differenziale *b*), nell'ipotesi di un unico carico ohmico R, la ρ_0 sta ad indicare la resistenza equivalente allo spazio anodo-catodo nella condizione di

([1]) Di ampiezza sufficientemente piccola affinchè le relazioni fra i_a, e_a, e_g possano ritenersi lineari.

riposo (cioè il rapporto fra la tensione $E_{a0} - RI_{a0}$ e la corrente I_{a0}) mentre r_a rappresenta la resistenza differenziale anodica.

12. - Capacità interelettrodiche. — Dei tre conduttori fondamentali di un triodo, catodo (f), anodo (a), griglia (g), occorre considerare le tre capacità mutue $C_{af} = C_{fa}$, $C_{gf} = C_{fg}$, $C_{ag} = C_{ga}$, o, se si vuole, le tre capacità proprie C_a, C_g, C_f definibili e determinabili come indicato in I, 5, 6.

Avendo presenti le formole (14) allora stabilite, si ha subito che, quando la griglia e la placca siano portate ai potenziali E_g ed E_a rispetto al catodo, la carica elettrica Q su questo sarà data da:

$$-Q = C_{fg}E_g + C_{fa}E_a , \tag{18}$$

dove il segno premesso a Q è giustificato dalle convenzioni fondamentali fatte sui segni delle E_g ed E_a.

Da tale relazione si può dedurre una importante formola che lega le capacità mutue C_{fg} e C_{fa} al coefficiente d'amplificazione μ.

All'uopo osserviamo che la intensità F del campo elettrico nelle immediate vicinanze del filamento è vincolata da una legge di proporzionalità [1] alla carica su di esso esistente, per cui, detto k un conveniente fattore, si avrà:

$$kF = C_{fg}E_g + C_{fa}E_a ,$$

quando la griglia e la placca siano portate ai potenziali E_g ed E_a.

Se ora supponiamo che il catodo sia portato ad una temperatura tale che con le date E_g ed E_a si sia sufficientemente lontani dalla saturazione, si avrà una certa corrente I, la cui intensità, come sappiamo, dipende anch'essa unicamente dalla intensità del campo F. Ne segue che, se variamo E_a ed E_g in guisa che I non vari, non potrà variare neppure F. Ora, perchè si verifichi il primo fatto, occorre che le variazioni e_a ed e_g soddisfino alla condizione:

$$\mu e_g + e_a = 0 , \quad \text{cioè} \quad e_a = -\mu e_g ;$$

dunque possiamo asserire che, applicando tali variazioni, non si avrà modificazione del valore di F. Siccome poi la variazione di F è proporzionale a

$$C_{fg}e_g + C_{fa}e_a ,$$

ne segue che questa espressione deve essere nulla ogni qualvolta sia $e_a = -\mu e_g$. Da ciò si conclude che è:

$$\mu = \frac{C_{fg}}{C_{fa}} . \tag{19}$$

---

[1] Cfr. El., III, 5.

È questa la relazione cui alludevamo, secondo la quale il coefficiente di amplificazione si può definire come rapporto fra le capacità mutue catodo-griglia e catodo-placca.

Inversamente, la relazione fondamentale (14) che lega la corrente elettronica i alle tensioni E_a, E_g anodica e di griglia può essere direttamente stabilita nel modo seguente che, oltre a condurre alla nozione di coefficiente d'amplificazione, consente di darne la effettiva espressione (19) in funzione degli elementi (geometrici) C_{fa}, C_{fg}, e di precisare inoltre la legge di dipendenza di i dalle tensioni E_a, E_g.

Avendo presente la definizione di capacità mutua, la relazione (18) dimostra come il campo elettrico prodotto sul catodo delle tensioni E_a ed E_g non differisca da quello che si otterrebbe mantenendo l'anodo al potenziale del catodo ed applicando alla sola griglia la tensione $E_g + \tau E_a$, essendo

$$\tau = \frac{C_{fa}}{C_{fg}}.$$

Tale rapporto corrisponde al cosiddetto « coefficiente di trasparenza » della griglia, ed il suo significato risulta da ciò, che una tensione E_a applicata all'anodo quando la griglia sia allo stesso potenziale dell'anodo produce al catodo lo stesso campo di una tensione τE_a applicata alla griglia, quando l'anodo sia mantenuto al potenziale del catodo.

Se ora supponiamo di riscaldare il catodo, la emissione elettronica di questo, come sappiamo, si commisura all'intensità del campo elettrostatico sul catodo stesso (più esattamente, sul catodo virtuale) secondo la legge

$$i = kV_0^{\frac{3}{2}},$$

dove k indica il fattore che compare nelle formole stabilite al n. 3, cioè in particolare

$$k = 2{,}336 \cdot 10^{-6} \frac{S}{d^2} \qquad \text{oppure} \qquad = 14{,}68 \cdot 10^{-6} \frac{l}{r\beta^2}$$

nei casi a), b) ivi contemplati.

Però, se per V_0 si assume la tensione $E_g + \tau E_a$, al coefficiente k dovrà assegnarsi un valore minore di quello spettante ad un diodo avente un anodo continuo al posto della griglia del triodo, perchè, quando questa è portata alla tensione $(1 + \tau)E_g$ mentre l'anodo è al potenziale del catodo, le linee di forza da essa uscenti in parte raggiungeranno il catodo, in parte l'anodo. Per tener conto di ciò, potremo ritenere che d ed r si riferiscano alla griglia del triodo ed applicare un coefficiente di correzione $h < 1$; ma, più comodamente, ponendo $m = h^{\frac{2}{3}}$, scriveremo:

$$i = k[m(E_g + \tau E_a)]^{\frac{3}{2}}, \tag{20}$$

la quale formola, in sostanza, conduce ad assimilare il triodo ad un diodo fittizio avente, al posto della griglia, un anodo a struttura continua, cui sia applicata la tensione ridotta $m(E_g + \tau E_a)$.

Per determinare il coefficiente m, si osservi che una disposizione elettrostaticamente equivalente a tale diodo fittizio si ottiene pensando la griglia e l'anodo del triodo portati allo stesso potenziale E, in quanto che allora tutto lo spazio griglia-anodo del triodo si comporta come un'unica massa metallica, a sua volta elettrostaticamente equivalente all'anodo del diodo fittizio. Ora, la corrente elettronica di un tale diodo è data da $kE^{\frac{3}{2}}$, d'altra parte la stessa corrente può calcolarsi con la (20) ponendo in essa $E_a = E_g = E$; dunque si conclude $m(1 + \tau) = 1$, dopo di che la (20) stessa si scrive:

$$i = k\left(\frac{E_g + \tau E_a}{1 + \tau}\right)^{\frac{3}{2}} = k\left(\frac{\tau}{1 + \tau}\right)^{\frac{3}{2}}\left(E_a + \frac{E_g}{\tau}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Ritroviamo così, convenientemente precisata, la stessa relazione (14), ed inoltre resta dimostrato che il coefficiente d'amplificazione μ vale $\frac{1}{\tau}$, conformemente alle (19).

13. - Dipendenza delle costanti fondamentali dalla geometria del tubo. — Da queste considerazioni, come anche del resto dalla definizione fondamentale, risulta intuitivo che il coefficiente d'amplificazione di un triodo riesce tanto maggiore quanto maggiore è il rapporto fra i raggi dei cilindri anodico e di griglia, e quanto più fini sono le maglie della griglia, in quanto che in tali condizioni C_{fg} aumenta in rapporto a C_{fa}.

Quanto alla resistenza anodica, essa ovviamente cresce coll'allontanare la placca dal catodo e diminuisce col crescere della lunghezza del filamento catodico.

Infine, per quanto riflette la conduttanza mutua, gli elementi geometrici influenti sul suo valore si deducono da quanto precede, pensando che essa vale $\frac{\mu}{r_a}$ e quindi cresce di conserva con μ e decresce col crescere di r_a.

14. - Capacità griglia-anodo. — La capacità C_{ga} è in generale indesiderabile e in molti casi dannosa al funzionamento dei circuiti cui il triodo è connesso, in quanto che quando, come ordinariamente avviene, si opera con variazioni di tensione a carattere alternativo, essa costituisce una connessione accoppiante i circuiti di griglia e di placca a mezzo della sua reattanza che, se la frequenza è elevata, può ridursi relativamente piccola.

Nello studio delle applicazioni dei triodi, avremo occasione di vedere che le variazioni di tensione (alternativa di una certa pulsazione ω) cui si trovano sottoposte la placca e la griglia (rispetto al catodo) risultano in generale pressochè opposte di fase, ed il rapporto k delle loro ampiezze può avvicinarsi a μ. Ne segue che la tensione ai capi della capacità C_{ga} equivale a $k+1$ volte la tensione alternata applicata alla griglia; pertanto la connessione capacitiva griglia-anodo, considerata alimentata a questa tensione, presenta una suscettanza di valore $(k+1)C_{ga}\omega$. Ciò corrisponde a ritenere che nel circuito di griglia, il quale già contiene la capacità C_{fg}, sia disposta, in parallelo con questa, una capacità di valore $(k+1)C_{ga}$.

In generale la C_{ga} ha valori assai modesti (dell'ordine di pochissime diecine di $\mu\mu$F), ma μ è invece elevato, e pertanto tale capacità fittizia assume valori tutt'altro che disprezzabili, talchè la così detta reattanza d'*entrata* del triodo (reattanza del circuito di griglia), specialmente con frequenze elevate, risulta sensibilmente ridotta, il che, come vedremo, può recare danno al funzionamento del sistema. In ogni caso poi, il fatto che gli effetti della tensione anodica si fanno sentire nel circuito di griglia, può essere fonte di gravi disturbi in tutti quei casi in cui si ha assoluto bisogno che una tale influenza sia rigorosamente esclusa.

Riservandoci di studiare in dettaglio, a suo tempo, tale importante questione, vedremo nel corso di questo Capitolo come con l'aggiunta di un opportuno quarto elettrodo, si possa provvedere alla riduzione degli effetti di accòppiamento dovuti alla C_{ag}.

15. - Caratteristiche anodiche proprie e mutue. — Per lo studio delle applicazioni di un *dato* triodo, è indispensabile conoscere l'intera famiglia delle curve caratteristiche che, come si è fatto al n. 8, potrà essere quella delle curve (I_a, E_g) per ogni valore costante di E_a, completate, se occorre, con le corrispondenti curve $(I_g, E_g)_{E_a=\text{cost.}}$, dalle quali si deducono i valori delle correnti di griglia.

Finchè si può ritenere che la corrente I_a, funzione delle due variabili E_a, E_g, dipenda dalla sola combinazione $E_a+\mu E_g$, una semplicissima considerazione permette di asserire che le due famiglie sono facilmente deducibili l'una dall'altra e la loro completa conoscenza può fondarsi su quella di una *unica* curva, la

$$I = f(E_t),$$

dove al solito E_t indica la tensione globale:

$$E_t = E_a + \mu E_g .$$

Nel caso nostro, tracciata tale curva, si avranno le due famiglie $(I_a, E_g)_{E_a=\text{cost.}}$ ed $(I_a, E_a)_{E_g=\text{cost.}}$, applicando all'unica curva predetta

delle convenienti traslazioni parallelamente all'asse delle ascisse, e *graduando* le varie curve ottenute con valori (di E_a, rispettivamente E_g) le cui differenze siano proporzionali alle traslazioni.

Anzi, le due famiglie senz'altro si identificano se per le ascisse della seconda si usa una scala in rapporto $1 : \mu$ con quella usata per la prima (fig. 162).

È utile notare che, come la pendenza (tangente della inclinazione sull'asse delle ascisse) delle curve $(I_a,\ E_g)_{E_a=\text{cost.}}$ misura la conduttanza mutua, così la pendenza delle $(I_a,\ E_a)_{E_g=\text{cost.}}$ misura invece la condut-

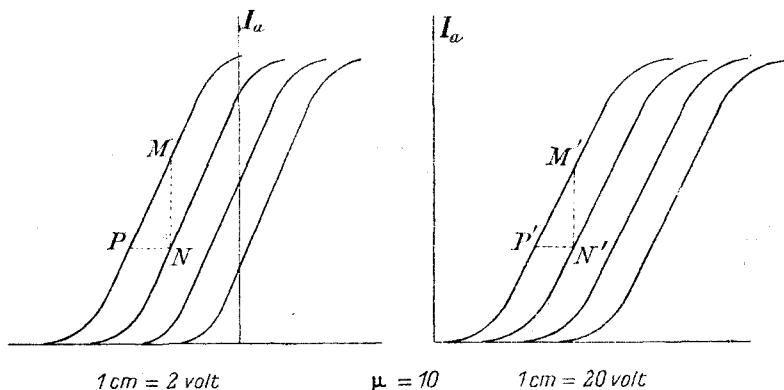



Fig. 162

tanza di placca. Per avere quest'ultima dalle prime curve, occorrerebbe invece valutare il rapporto fra la distanza *verticale* MN (cioè parallela all'asse I_a) di due curve $E_a =$ cost. e la differenza di *quota* di esse, come per avere la conduttanza mutua dalle $(I_a,\ E_a)_{E_g=\text{cost.}}$ occorrerebbe valutare l'analogo rapporto fra la distanza verticale $M'N'$ di due tali curve e la differenza delle loro quote. Il coefficiente d'amplificazione poi si ottiene dalle prime curve valutando il rapporto fra la differenza delle quote di due di esse e la loro distanza orizzontale PN (parallela all'asse E_g), dalle seconde invece come rapporto fra la distanza orizzontale $P'N'$ e la differenza delle quote. Quanto alle scale, valgono le osservazioni generali fatte al n. 4.

In generale però la dipendenza della corrente I_a dalle due variabili E_a ed E_g non è così semplice, e perciò, per la conoscenza completa del funzionamento del triodo, occorre avere l'intera famiglia delle $(I_a,\ E_g)_{E_a=\text{cost.}}$, oppure l'altra $(I_a,\ E_a)_{E_g=\text{cost.}}$.

È però da osservare che una delle due famiglie è sufficiente allo scopo, potendosi sempre l'altra dedurre dalla prima. Infatti, per avere la curva $(I_a,\ E_a)$ relativa al particolare valore E'_g di E_g, basterà tracciare la pa-

rallela all'asse I_a di ascissa E'_g e determinarne le intersezioni con le varie curve della prima famiglia; facendo corrispondere ad ogni ordinata la

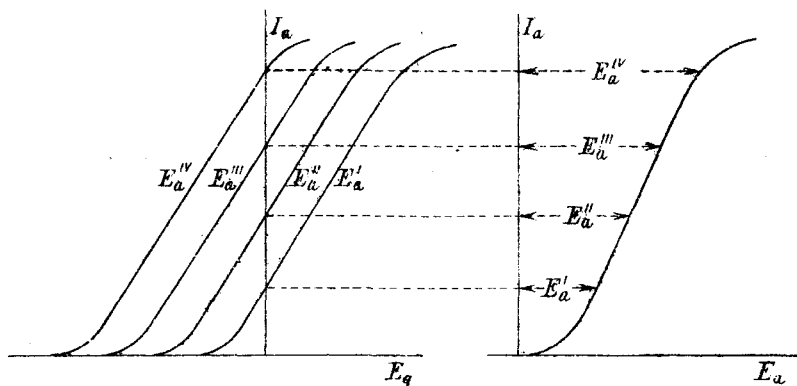



Fig. 163

rispettiva quota della curva intersecata si hanno gli elementi per tracciare la $(I_a,\ E_a)_{E_g=E'_g}$, come indicato in fig. 163.

C) Tetrodi e pentodi.

16. - Tubi a quattro elettrodi. — Se fra il catodo e l'anodo si dispongono non una, ma due griglie, G e G', situate a diversa distanza dal catodo (fig. 164), si costituisce quello che si chiama un tubo a quattro elettrodi o *tetrodo*.

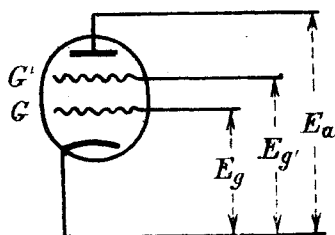



Fig. 164

La corrente elettronica (totale) di un tale apparecchio, analogamente a quel che accade nel triodo, dipende al modo solito da una tensione globale, cioè da una espressione del tipo:

$$E_a + \mu E_g + \mu' E_{g'}\ ,$$

dove μ e μ' sono due costanti determinate, ed E_g, $E_{g'}$ le tensioni applicate fra le griglie G e G' ed il catodo. Al solito, quando una di tali griglie od entrambe siano portate a potenziali positivi, si avranno nei loro circuiti delle correnti I_g, $I_{g'}$; e la corrente totale di cui si è parlato corrisponde in ogni caso alla somma di esse con la corrente anodica I_a, almeno finchè non si verifichino taluni fenomeni secondari di cui si dirà in appresso.

Le costanti μ e μ' corrispondono a due *coefficienti di amplificazione* pertinenti alle singole griglie.

Tre sono i principali modi di utilizzazione di un tale tipo di tubo, a

seconda che le funzioni di controllo vengano disimpegnate dalla griglia G o dalla G' (essendo l'altra mantenuta a potenziale fisso) oppure da entrambe.

17. - Tetrodo a griglia di campo. — Quando si mantiene a tensione positiva fissa la griglia più prossima al catodo, che chiameremo la prima griglia, essa fa sentire il suo effetto modificando il campo dovuto alla carica spaziale in misura tanto più energica, a parità di tensione E_{g0} ad essa attribuita, quanto maggiore è il corrispondente μ.

Più precisamente, la corrente elettronica così ottenuta equivale a quella che si avrebbe aumentando di μE_{g0} la tensione applicata all'anodo.

Quantunque tale fatto si accompagni con assorbimento di elettroni da parte della prima griglia, è chiaro che in definitiva, a parità di tensione anodica, si realizzano correnti anodiche più intense che non col triodo comune.

Lo stesso concetto può esprimersi anche dicendo che siccome, per effetto del potenziale positivo della prima griglia riesce aumentata la velocità degli elettroni, è minore il fabbisogno di ulteriore accelerazione (campo anodico) per raggiungere un dato apporto di elettroni/sec.

In tali condizioni di funzionamento il tubo prende il nome di tetrodo *a griglia di campo* (oppure *anticarica spaziale*), e la sua caratteristica più saliente è quella di richiedere una tensione anodica relativamente ridotta senza che per questo risultino sensibilmente alterate nè la conduttanza di placca nè la conduttanza mutua, rispetto al triodo che si otterrebbe sopprimendo la prima griglia. Ciò si comprende agevolmente se si pensa che, in sostanza, questa griglia non fa che determinare una modificazione *fissa* al campo elettrico prodotto dall'anodo e dalla griglia di controllo, per cui le conduttanze predette, in quanto sono legate al comportamento delle *variazioni* della corrente anodica in relazione alle *variazioni* delle tensioni E_a o $E_{g'}$, non risentono dell'esistenza di un fatto che produce soltanto una modificazione, *in misura costante*, delle condizioni del campo elettrico in vicinanza del catodo.

18. - Tetrodo a griglia schermante. — Ben più importante per le applicazioni è il caso in cui la griglia a potenziale positivo fisso è quella più esterna, mentre la più interna funziona da griglia di controllo. La prima allora, per ragioni che vedremo in seguito, prende il nome di griglia-schermo, ed il tubo usato in tali condizioni si chiama tetrodo *a griglia schermante*.

Generalmente la griglia-schermo viene portata ad un potenziale positivo fisso uguale a circa $\frac{1}{2} \div \frac{2}{3}$ del potenziale dell'anodo, ed essendo

essa relativamente vicina a questo, avviene che gli elettroni espulsi dal catodo per effetto del campo complessivo determinato dalle due griglie e dall'anodo, vengono in buona parte raccolti dalla griglia-schermo stessa e non riescono quindi a raggiungere l'anodo, per modo che la corrente anodica finisce col dipendere quasi esclusivamente dalle tensioni delle due griglie e poco dalla tensione anodica. Quindi la conduttanza di placca riesce in tali tubi assai piccola.

Tuttavia la conduttanza mutua non è sensibilmente diversa da quella che si avrebbe in assenza della griglia-schermo, perchè le variazioni di tensione della griglia di controllo determinano una variazione della velocità con la quale gli elettroni primari (così si chiamano quelli provenienti dal catodo) raggiungono la griglia-schermo. Ora, a tale velocità si commisura una nuova emissione, detta *secondaria*, di quegli elettroni che vengono liberati dalla griglia-schermo per effetto del bombardamento su di essa esercitato dagli elettroni primari, e che possono effettivamente dirigersi verso la placca quando questa, come abbiamo supposto, si trova a potenziale positivo rispetto allo schermo che li emette. Tale supplemento di elettroni compensa, in certo modo, la deficienza causata dalla presenza dello schermo che assorbe buona parte degli elettroni primari, sì che la conduttanza mutua in definitiva non viene molto alterata.

Ne segue che all'aumento della resistenza di placca si accompagna un aumento del coefficiente di amplificazione, inteso al solito come rapporto fra le variazioni delle tensioni dell'anodo e della griglia (di controllo) occorrenti per realizzare una stessa variazione di corrente anodica.

È importante osservare come l'aumento della resistenza di placca, che nel triodo ordinario non potrebbe ottenersi se non allontanando la placca dalla griglia, può nel tetrodo ottenersi invece modificando l'efficacia dello schermo, per es., facendo questo a maglie più fini, senza che, per le ragioni sopra dette, ne consegua una sensibile variazione di g_m.

In generale, nei tetrodi ordinariamente usati negli apparati radioriceventi, la r_a è dell'ordine di alcune centinaia di migliaia di ohm, e le conduttanze mutue sono dell'ordine del mA/V, talchè i valori di μ riescono dell'ordine delle centinaia.

Per il fatto che la conduttanza di placca è molto piccola, le caratteristiche (I_a, E_g) per diversi valori di E_a riescono assai ravvicinate le une alle altre, anche per notevoli variazioni delle tensioni E_a, e ciò, come vedremo a suo tempo, è di grande vantaggio per certe utilizzazioni del tubo.

È assai importante però rilevare un fenomeno che può verificarsi quando la tensione della griglia-schermo sia superiore a quella dell'anodo.

In generale, l'anodo di qualunque tubo elettronico, pel fatto che è colpito dagli elettroni che lo raggiungono provenendo dal catodo, diviene centro di emissione secondaria. Senonchè, nel caso del comune triodo,

almeno finchè l'anodo è a potenziale superiore alla griglia, come sempre si procura che sia, la emissione secondaria non influisce sul funzionamento, giacchè gli elettroni liberati vengono dal campo anodico stesso sollecitati verso l'anodo che li ha emessi ([1]). Nel caso attuale invece, le cose vanno in modo nettamente diverso, perchè esiste un elettrodo — la griglia-schermo — che si trova in condizione di convogliare verso di sè gli elettroni di emissione secondaria, quando, ben inteso, la placca si trovi a potenziale positivo inferiore. Avviene allora che la corrente nel circuito

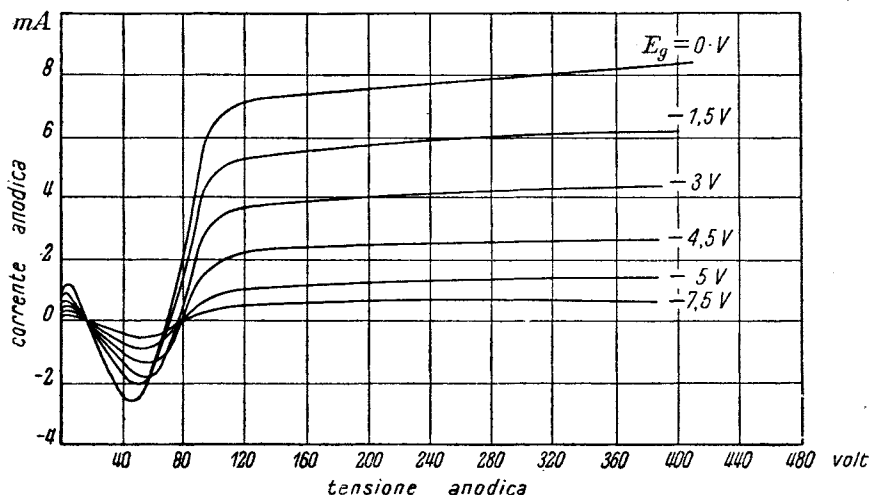



Fig. 165

della griglia-schermo, è, per così dire, fornita in parte dagli elettroni primari, in parte dai secondari. Si ha cioè una corrente anodica *inversa* sovrapposta all'ordinaria, per cui in tali condizioni la corrente anodica subisce una diminuzione, tanto più notevole quanto maggiore è il numero di elettroni/sec che l'anodo invia allo schermo, e può anche divenire negativa. Più precisamente, se si tracciano le caratteristiche (I_a, E_a) per *determinati* e fissi valori delle tensioni attribuite alle due griglie, queste si presentano come in fig. 165, dove sono rappresentate alcune delle predette caratteristiche per i valori di E_g su ciascuna indicati, essendo $E_{g'} = 90$ V. La corrente anodica è diversa da zero anche per $E_a = 0$ pel fatto che gli elettroni, accelerati dalla tensione positiva dello schermo, ne oltre-

([1]) Quando invece si portasse la griglia a potenziale superiore all'anodo, le cose andrebbero diversamente, sì da dare un andamento nettamente discendente alle caratteristiche (I_a, E_g). (Cfr. fig. 160).

Ciò fu utilizzato da alcuni sperimentatori per realizzare un particolare funzionamento del tubo, cui si dà il nome di *dinatron.*

passano le maglie con una certa velocità; quando poi, col crescere della tensione E_a, la velocità con cui essi raggiungono l'anodo è tale da provocare la emissione secondaria, la corrente anodica prende a decrescere, e tale diminuzione continua fino a che la E_a non si è avvicinata alla tensione attribuita allo schermo. Continuando poi ad aumentare la tensione anodica, si ha dapprima un rapido aumento di I_a in corrispondenza della rapida scomparsa della corrente inversa, dopo di che la corrente anodica varia molto lentamente al variare della tensione anodica, corrispondentemente all'elevato valore, già osservato, della resistenza interna.

Come si è detto, le caratteristiche $(I_a, E_g)_{E_a=\text{cost.}}$ risultano assai ravvicinate fra loro, ma l'estensione delle regioni a tratti pressochè rettilinei è limitata dalla condizione che E_a sia superiore alla tensione della griglia-schermo.

19. - Pentodi. — Tale limitazione dell'estensione dei tratti rettilinei può costituire un inconveniente, perchè, come vedremo nei prossimi capitoli, il tubo è chiamato in generale a funzionare in serie con altri tratti

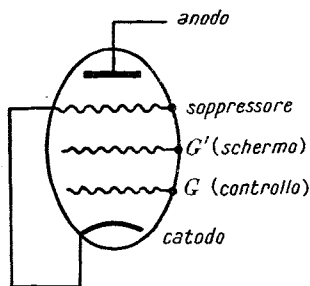
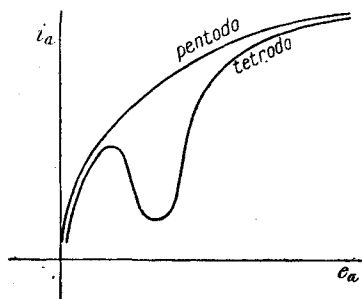



Fig. 166 Fig. 167

di circuito, nei quali si verificano, al passaggio delle correnti anodiche, delle cadute di tensione, talvolta anche considerevoli, per cui la tensione effettivamente applicata fra anodo e catodo può, in certi istanti, giungere a valori tanto bassi da essere superata dalla tensione dello schermo, e conseguentemente verificarsi il fenomeno della corrente inversa e della conseguente brusca diminuzione della corrente anodica.

Per evitare tale inconveniente ed allargare al tempo stesso l'intervallo di valori di E_a cui corrisponde un andamento pressochè rettilineo e a debole pendenza delle caratteristiche $(I_a, E_a)_{E_g=\text{cost.}}$, si provvede il tubo di una terza griglia, situata esternamente alla griglia-schermo, e quindi più prossima all'anodo. Se a tale griglia, detta *soppressore* (sottinteso: della corrente inversa), si attribuisce stabilmente un potenziale minore del minimo assumibile dall'anodo, essa assicura, nelle immediate vicinanze dell'anodo stesso, un campo elettrico atto ad impedire l'allonta-

namento degli elettroni secondari dall'anodo. Tale scopo può manifestamente raggiungersi connettendo la terza griglia direttamente col catodo (fig. 166).

In tali tubi, detti *pentodi*, le caratteristiche (I_a, E_a), per ogni valore costante delle tensioni della griglia di controllo e dello schermo, assumono l'aspetto indicato in fig. 167, dove è pure disegnata la caratteristica del corrispondente tetrodo.

20. - Riduzione della capacità griglia-anodo. - Bigriglie. — I tetrodi a griglia-schermo permettono anche di realizzare la eliminazione, o almeno una notevolissima riduzione della capacità griglia-anodo.

Se invero si pensa alla definizione di capacità mutua (I, 5), si comprende agevolmente che l'interposizione di un terzo conduttore fra due altri diminuisce sensibilmente la capacità mutua dei due primi e può anche giungere ad annullarla completamente se la sua configurazione è tale da intercettare tutte le linee di campo elettrico che, in sua assenza, congiungerebbero i primi due.

Nel caso della griglia esterna di un tetrodo, la riduzione della capacità mutua fra anodo e griglia di controllo non può essere completa perchè lo schermo è foggiato a conduttore discontinuo, ma tuttavia essa è praticamente tanto notevole da consentire, in molte applicazioni, la eliminazione dei disturbi provenienti dalla predetta capacità.

È appena necessario osservare che l'applicazione di una tensione positiva fissa alla griglia-schermo è senza influenza sull'azione schermante, in quanto tale azione (n. 14) interessa per le sole componenti variabili delle tensioni e delle correnti in giuoco nel funzionamento effettivo del tubo.

Infine accenniamo qui che ad un terzo modo di utilizzazione del tetrodo si perviene attribuendo le funzioni di controllo ad ambe le griglie G e G'. Il tubo in tale caso si denomina *bigriglia*. Naturalmente, gli effetti di controllo sono, per ciascuna griglia, commisurati al rispettivo coefficiente d'amplificazione, come chiaramente risulta da quanto esposto al n. 16.

D) Altri tubi elettronici.

21. - Tubi multipli. — Si comprende facilmente che, aumentando il numero delle griglie, si possono realizzare tubi atti ad assolvere compiti svariati in quanto che si può mettere la corrente anodica in condizione di risentire simultaneamente delle azioni derivanti dalle varie griglie.

In questo senso meritano di essere segnalati gli *exodi* o tubi a sei elettrodi.

L'exodo consta di un unico catodo separato dall'anodo da quattro griglie *1*, *2*, *3*, *4* (fig. 168). Di esse, le due più vicine al catodo funzionano, *1* come griglia di controllo rispetto a *2*, la quale funge da anodo rispetto ad *1*, ma, essendo a maglie larghe, lascia passare buona parte degli elettroni emessi dal catodo e controllati dalla prima griglia. In sostanza, fra *2* e *3* viene a formarsi un catodo virtuale (cfr. nota a pag. 316) la cui emissione è regolata come potrebbe esserlo la corrente anodica in un comune triodo. Le due ulteriori griglie *3*, *4* e l'anodo costituiscono

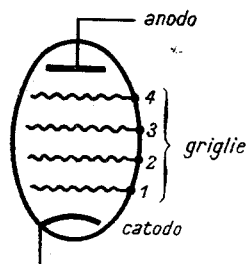
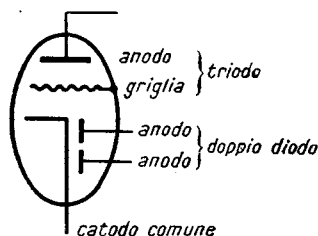



Fig. 168 Fig. 169

poi, unitamente a tale catodo virtuale, un ordinario tetrodo a griglia schermante.

Un tale apparecchio può in certo qual modo considerarsi corrispondere all'accoppiamento *in cascata* di due tubi. Allo stesso concetto sono inspirati gli *eptodi* e gli *ottodi*, aventi cinque, rispettivamente sei griglie fra il catodo e l'anodo.

La moderna Tecnica ha anche creato altri tipi di tubi multipli che, a differenza di quelli, possono considerarsi ottenuti mediante disposizione di tubi ordinari *in parallelo* rispetto al catodo; in essi cioè un unico catodo provvede alla emissione elettronica richiesta da due poliodi distinti, i cui elettrodi, naturalmente, sono racchiusi in unica ampolla. Fra questi segnaleremo qui i così detti *binodi*, i quali non sono che una combinazione di un diodo (o, talvolta, di un doppio diodo) e di un triodo (talvolta anche un tetrodo): il catodo è unico e di fronte ad esso stanno, per una parte della sua estensione, la placca di un diodo (o le placche di un doppio diodo), e per un'altra parte, gli elementi (griglia di controllo, anodo) di un triodo (fig. 169).

In questa stessa categoria di tubi multipli possono farsi rientrare anche altri tipi, ad es. i tubi *multi-μ* di cui parleremo successivamente (n. 24).

22. - Magnetron. — Il *magnetron* è, al pari del triodo, un diodo a flusso elettronico controllato; se non che il controllo, anzichè essere effettuato, come nei comuni triodi, a mezzo di un campo *elettrico*, è invece

affidato ad un campo *magnetico* ottenuto mediante un solenoide esterno al tubo, disposto coassialmente al catodo (fig. 170).

Finchè il solenoide non è percorso da corrente, gli elettroni emessi dal catodo possono raggiungere l'anodo secondo le leggi da noi studiate (nn. 1 a 3), seguendo traiettorie radiali; ma quando il campo magnetico sia eccitato mediante una corrente inviata nel solenoide, le traiettorie

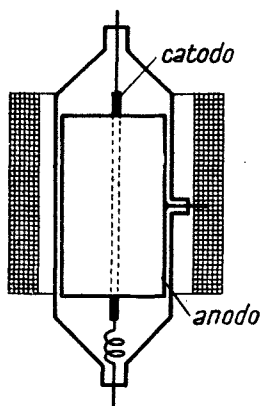
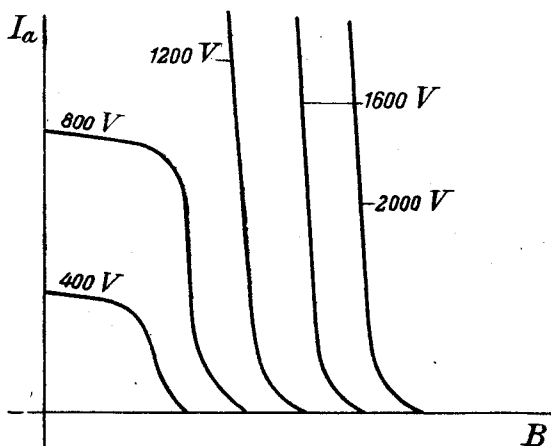



Fig. 170 Fig. 171

elettroniche tendono ad incurvarsi in misura tanto maggiore quanto maggiore è l'induzione magnetica B, talchè per valori di questa superiori a un certo limite (che si dimostra essere inversamente proporzionale al raggio del cilindro anodico e direttamente proporzionale alla radice quadrata della tensione anodica) le traiettorie stesse riconducono gli elettroni al catodo senza che essi abbiano raggiunto l'anodo, cosicchè la corrente anodica si annulla.

La fig. 171 rappresenta l'andamento delle caratteristiche (I_a, B) di un magnetron per alcuni valori costanti della tensione anodica.

Tali tubi elettronici non trovano applicazione che in casi specialissimi i quali, almeno per ora, riguardano piuttosto il campo sperimentale che quello tecnico.

E) Connessioni di piu triodi.

23. - Connessione in parallelo. — Come per i conduttori ordinari, anche per i triodi è importante studiare il comportamento dei sistemi formati da più elementi fra loro variamente connessi.

La connessione che più interessa nel caso dei triodi è quella *in parallelo*, che si realizza collegando metallicamente un capo dei vari catodi.

nonchè tutte le griglie fra loro, e, separatamente, gli anodi fra loro, secondo lo schema generale indicato in fig. 172.

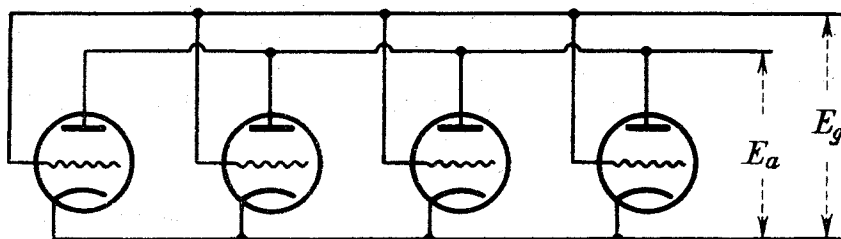



Fig. 172

Se, in tali condizioni, dopo avere riscaldati i catodi, si applicano alle griglie ed alle placche certe tensioni E_g ed E_a, si avranno, per calcolare le correnti anodiche di ciascuno, delle relazioni del tipo:

$$I_{a1} = f_1(E_a + \mu_1 E_g) \, ,$$
$$I_{a2} = f_2(E_a + \mu_2 E_g) \, ,$$
$$\dots\dots\dots\dots ,$$

e per la corrente anodica totale, che evidentemente equivale alla somma di quelle spettanti a ciascun triodo separatamente, si avrà:

$$I_a = f_1(E_a + \mu_1 E_g) + f_2(E_a + \mu_2 E_g) + \dots .$$

Riferendoci, al solito, alle variazioni rispetto ad uno stato iniziale, avremo, conformemente alla (17):

$$i_a = g_{a1}(e_a + \mu_1 e_g) + g_{a2}(e_a + \mu_2 e_g) + \dots +$$
$$+ h_1(e_a + \mu_1 e_g)^2 + h_2(e_a + \mu_2 e_g)^2 + \dots \, ,$$

essendo g_{a1}, g_{a2}, ... le conduttanze anodiche dei singoli triodi, μ_1, μ_2, ... i loro coefficienti di amplificazione, h_1, h_2, ... i valori dei coefficienti che denominammo h al n. 10.

Se il punto iniziale è tale che, coi dati valori di e_a ed e_g non si esca dalla regione di validità della (15) *per tutti i triodi*, la precedente si semplificherà in:

$$i_a = (g_{a1} + g_{a2} + \dots)e_a + (g_{a1}\mu_1 + g_{a2}\mu_2 + \dots)e_g \, ,$$

che si può scrivere anche:

$$i_a = (g_{a1} + g_{a2} + \dots)e_a + (g_{m1} + g_{m2} + \dots)e_g \, ,$$

essendo $g_{m1} = g_{a1}\mu_1$, $g_{m2} = g_{a2}\mu_2$, ... le conduttanze mutue dei singoli triodi. Confrontando con l'analoga relazione

$$i_a = g_a e_a + g_m e_g \qquad (g_m = \mu g_a)$$

relativa ad un triodo, si deduce che, con le restrizioni poste, il sistema dei dati triodi si comporta come un triodo unico avente la conduttanza anodica e la mutua date da:

$$g_a = g_{a1} + g_{a2} + \cdots, \qquad g_m = g_{m1} + g_{m2} + \cdots,$$

uguali cioè alla somma delle conduttanze anodiche e mutue dei singoli triodi.

In altri termini, nella connessione in parallelo, tali conduttanze (differenziali) si sommano, cioè si compongono come le conduttanze dei conduttori ordinari.

Quanto al coefficiente d'amplificazione μ del sistema, lo si otterrà dividendo g_m per g_a, cioè si avrà:

$$\mu = \frac{g_{m1} + g_{m2} + \cdots}{g_{a1} + g_{a2} + \cdots} = \frac{g_{a1}\mu_1 + g_{a2}\mu_2 + \cdots}{g_{a1} + g_{a2} + \cdots}.$$

Esso pertanto non è che la media ponderata dei singoli coefficienti d'amplificazione, cui si sia attribuito un peso uguale alla conduttanza anodica del corrispondente triodo.

Il ragionamento precedente, come facilmente si riconosce, è valido anche se il punto iniziale ed i punti di funzionamento che si vanno a considerare in relazione ai dati valori di e_a ed e_g non si trovano nella regione di validità della (15) per tutti i triodi. La conclusione cui si perviene deve allora enunciarsi così:

Le conduttanze anodica e mutua del sistema formato da più triodi in parallelo uguagliano le somme delle corrispondenti grandezze relative ai singoli triodi, computate in corrispondenza del punto di funzionamento esaminato.

Graficamente, la caratteristica (I_a, E_g) del sistema di più triodi in parallelo si otterrà, per ogni valore costante di E_a, costruendo per punti la curva le cui ordinate sono la somma delle ordinate delle caratteristiche dei singoli triodi, in relazione al dato valore di E_a, come indicato in fig. 173, che si riferisce al caso di due triodi.

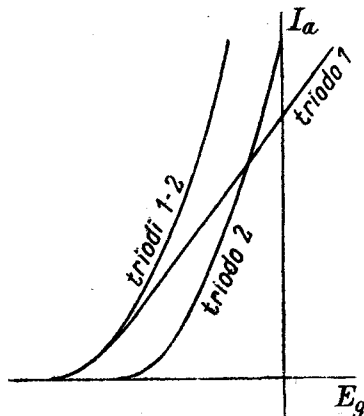



Fig. 173

In particolare, quando si ha a che fare con un sistema di n triodi uguali, le relazioni precedenti si semplificano; le conduttanze anodica e mutua del sistema uguagliano il multiplo secondo n delle corrispondenti relative ad un singolo tubo, ed il coefficiente d'amplificazione non varia.

24. - Tubi a coefficiente d'amplificazione variabile. — Merita particolare menzione il caso in cui i triodi connessi in parallelo abbiano tutti uguali g_a, ma diversi valori delle g_m [1], per es. $g_{m1} < g_{m2} < g_{m3} < \ldots$, nel qual caso sarà anche $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \ldots$.

Proponiamoci di costruire le caratteristiche $(I_a, E_g)_{E_a=\text{cost.}}$ di un tal sistema.

All'uopo, attribuita agli anodi una medesima tensione E_{a0}, supponiamo dapprima applicata alle griglie una tensione negativa di valore assoluto superiore alla tensione di interdizione del triodo *1*. Siccome, in tali condizioni, ognuno dei triodi si trova a funzionare in un punto in cui la rispettiva g_m è nulla, sarà nulla anche la g_m del sistema. E tale essa si manterrà finchè E_g non abbia raggiunto e superato la tensione di interdizione del triodo *1*. Continuando ad aumentare E_g e precisamente fino ad un valore corrispondente alla tensione d'interdizione del triodo *2*, la corrente anodica sarà uguale alla I_{a1} pertinente al primo triodo, quindi il sistema equivale ad un solo triodo di g_m e μ uguali a g_{m1} e μ_1; poi, per E_g variante fra quella tensione e quella d'interdizione del triodo successivo, la I_a sarà la somma di quelle pertinenti ai triodi *1* e *2*, ed il valore di g_m del sistema sarà la somma di quelli che spettano a *1* e *2* per ogni singolo valore della E_g; così continuando, si avranno successivamente a considerare dei valori di g_m uguali a $g_{m1} + g_{m2} + g_{m3}$, $g_{m1} + g_{m2} + g_{m3} + g_{m4}$, ... Quanto al coefficiente di amplificazione, nel primo tratto esso sarà $= \mu_1$, nel secondo $= \dfrac{g_a\mu_1 + g_a\mu_2}{g_a + g_a} = \dfrac{\mu_1 + \mu_2}{2}$, nel terzo $= \dfrac{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}{3}$, ecc.

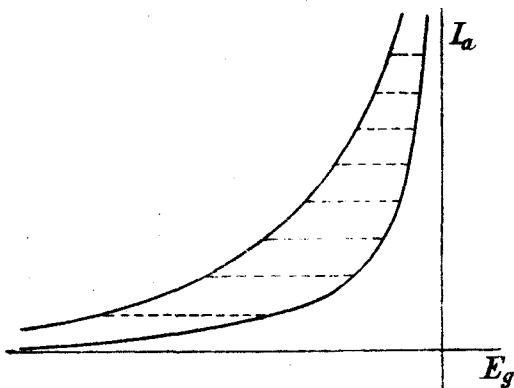



Fig. 174

Il sistema dunque si comporta come un unico triodo la cui g_m e la cui μ variano, anzi, più precisamente, vanno crescendo, col crescere della tensione di griglia.

Veramente, anche in un triodo ordinario la g_m è crescente con e_g, ma tale variazione è limitata al solo campo che precede l'inizio del tratto rettilineo delle caratteristiche. La differenza fra un triodo ordinario ed il sistema qui considerato risiede in ciò, che il campo di variazione della g_m investe una

[1] Si intende qui parlare dei valori di g_a, g_m corrispondenti ai tratti rettilinei delle caratteristiche.

zona assai più ampia della escursione di E_g, ed inoltre nel fatto che anche la μ va crescendo, il che non avviene nei triodi ordinari. In relazione a ciò, la caratteristica per $E_a = \text{cost.}$ del sistema considerato, non solo assume un aspetto simile a quello indicato in fig. 174, cioè a *pendenza* continuamente variabile, ma avviene anche che, se si traccia un'altra caratteristica in corrispondenza di un diverso valore di E_a, lo

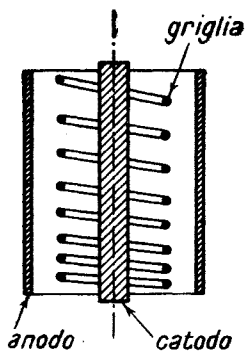



Fig. 175 *a*)

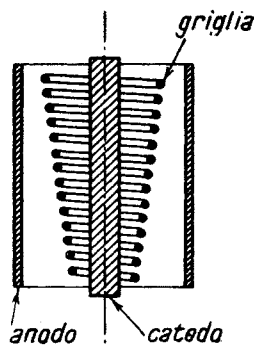



Fig. 175 *b*)

scostamento di questa dalla precedente, misurato parallelamente all'asse E_g, è pure continuamente variabile, e precisamente cresce col diminuire della tensione di griglia (cfr. n. 15).

Un sistema siffatto può facilmente realizzarsi anche con un unico tubo. All'uopo basta che la griglia sia costituita ad es. a forma di spirale di diametro costante ma con passo variabile lungo l'asse (fig. 175 *a*)), (oppure di passo costante ma di diametro variabile lungo l'asse (fig. 175 *b*)). Un tale tubo infatti equivale al sistema di parecchi — diciamo n — tubi in parallelo, ciascuno costituito da un piccolo tratto di catodo — di lunghezza costante — e dalle antistanti porzioni di griglia e di placca. È ovvio infatti che le g_a di tali tubi elementari sono tutte fra loro uguali ed uguali alla n^{ma} parte della g_a totale.

In ciò consistono i così detti tubi a *conduttanza mutua variabile* o *multi-μ*, mediante i quali, regolando la polarizzazione fissa E_{g0} della griglia, si realizzano funzionamenti che, per variazioni e_g convenientemente ristrette, corrispondono a diversi valori di g_m e μ.

25. - Connessione semisimmetrica di due triodi. — Una certa analogia con la connessione in parallelo presentano altri due tipi di connessioni, attuabili con una coppia di triodi uguali, e che prendono il nome di *semisimmetrica* l'una, e di *simmetrica*, o *in push-pull*, l'altra.

La prima si realizza connettendo in parallelo le placche dei due triodi ed in opposizione le due griglie, cioè attribuendo a queste, oltre ad una

tensione di riposo E_{g0} comune, due tensioni variabili di valori rispettivi e_g e $-e_g$.

In tali condizioni, la relazione fra la corrente variabile anodica i_a e la tensione variabile e_g attribuita ad una delle griglie, si ottiene sommando i valori di i_a pertinenti ai due triodi. Questi valori, per un *dato* valore della tensione anodica, saranno dati da una espressione del tipo:

$$g_m e_g + g'_m e_g^2 + g''_m e_g^3 + \dots$$

per l'una, e conseguentemente per l'altra da:

$$-g_m e_g + g'_m e_g^2 - g''_m e_g^3 + \dots$$

Per la corrente anodica i_a del sistema si ha dunque il valore:

$$i_a = 2g'_m e_g^2 + 2g'''_m e_g^4 + \dots$$

dipendente dalle sole potenze pari di e_g.

In particolare, se si opera nei tratti rettilinei, essendo ivi $g'_m = g'''_m = \dots = 0$, si ha:

$$i_a = 0 ;$$

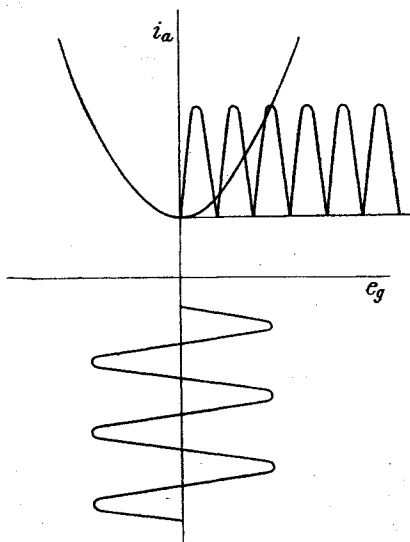



Fig. 176

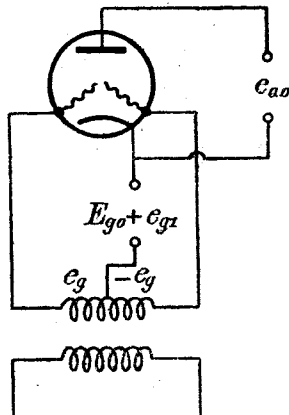
cioè si realizza la *soppressione* della corrente variabile anodica.

Fuori dei tratti rettilinei, la legge di variazione di i_a con e_g è tale che la corrispondente curva è simmetrica rispetto all'asse i_a (fig. 176); in particolare quindi, se e_g è alternativa, i_a non muta mai segno e la sua variazione non è più alternativa, bensì sempre periodica, ma con periodo doppio di e_g, come facilmente si riconosce esaminando la figura, dove per la e_g e per la corrispondente i_a sono assunti gli assi i_a, rispettivamente e_g come assi dei tempi.

Questi due tipi di funzionamento sono suscettibili di importanti applicazioni. E precisamente col primo, qualora la tensione applicata alla griglia, anzichè essere semplicemente alternativa, si compone — come avviene in alcuni processi di rivelazione — della somma di una parte alternativa e_g a variazione rapida, ma attribuita in opposti sensi alle due griglie, e di un'altra parte a variazione relativamente lenta, si ha che la corrente anodica non risente della prima e rispecchia soltanto le variazioni lente della seconda. Tale dispositivo può anche realizzarsi con un unico tubo provvisto di due griglie così ubicate da occupare posizioni « equivalenti » rispetto all'anodo e al catodo, come può ottenersi, ad es., con due spirali di stesso passo e di stesso diametro, l'una delle quali si

svolge negli spazi lasciati liberi dalle spire successive dell'altra. La disposizione schematica è indicata in fig. 177, dove la tensione applicata alle due griglie si compone di una parte comune $E_{g0} + e_{g1}$ (E_{g0} costante, e_{g1} a variazione lenta) e di una parte alternativa, e_g per l'una, $-e_g$ per l'altra, sì che ogni $E_{g0} + e_{g1} \pm e_g$ cada in corrispondenza dei tratti rettilinei delle caratteristiche (I_a, E_g).

Fig. 177

Col secondo dei descritti funzionamenti, quello cioè pel quale il punto iniziale di funzionamento deve essere scelto in una regione in cui la caratteristica presenta curvatura, si realizza invece una corrente anodica che corrisponde al raddrizzamento di una delle due semionde della e_g alternata, tal quale come si potrebbe ottenere con lo schema a due diodi considerato al n. 5. Esso trova applicazione nei così detti duplicatori di frequenza, come a suo tempo vedremo.

26. - Connessione simmetrica (push-pull) di due triodi. — Per realizzare la connessione in *push-pull*, occorre che, come nella precedente connessione, le tensioni variabili applicate alle due griglie siano costantemente in opposizione, ed inoltre che anche alle placche siano applicate due tensioni variabili pure in opposizione, il che può ottenersi con una disposizione del tipo indicato in fig. 178, dove al solito E_{a0}, E_{g0} rappresentano le tensioni di riposo.

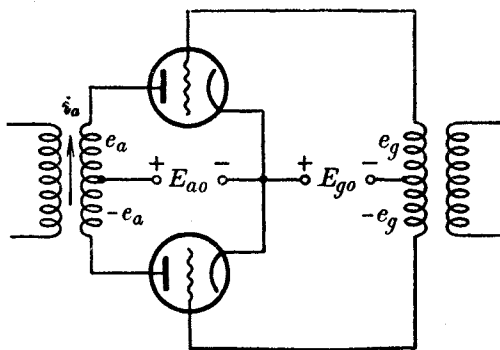



Fig. 178

In tali condizioni, la corrente variabile anodica i_a, circolante nel ramo che connette le due placche, corrisponde alla differenza fra le correnti anodiche variabili dei due triodi. Ora, se una di queste è rappresentata da una espressione del tipo:

$$g_a e_t + h e_t^2 + k e_t^3 + \dots,$$

essendo $e_t = e_a + \mu e_g$ la variazione di tensione globale, l'altra, nello stesso istante, vale:

$$-g_a e_t + h e_t^2 - k e_t^3 + \dots,$$

e pertanto per i_a si ha il valore:

$$i_a = 2 g_a e_t + 2 k e_t^3 + \dots .$$

Se il punto iniziale di funzionamento appartiene alla regione rettilinea delle caratteristiche, saranno nulli i coefficienti delle potenze di e_t superiori alla prima, e quindi il comportamento del sistema non differisce da quello di un triodo ordinario. Ma, se le caratteristiche presentano una certa curvatura, acquista importanza il fatto che nell'espressione di i_a manchino le potenze ad esponente pari di e_t, in quanto che, quando e_g ed e_a sono alternative di *uguale* frequenza, e quindi tale è anche la e_t, pur non potendosi avere nella i_a la riproduzione della *forma* delle e_a, e_g [1], resta tuttavia assicurato alla corrente i_a un andamento rigorosamente *alternativo*, cioè tale che la successione dei valori assunti in un semiperiodo delle e_a ed e_g è esattamente uguale e contrario a quella che si verifica nel semiperiodo successivo, il che è particolarmente vantaggioso in certe applicazioni.

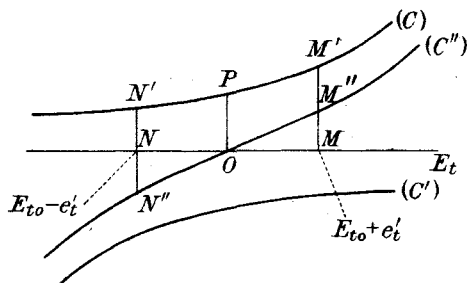



Fig. 179

Più precisamente, in tal caso, la caratteristica (i_a, e_t) viene a comporsi di due rami simmetrici rispetto al punto O corrispondente allo stato di riposo. Infatti (fig. 179), se (C) è la caratteristica globale comune dei due triodi (corrente anodica in funzione della tensione globale E_t) e P è il punto corrispondente allo stato di riposo, si rifletta che, quando e_t vale e_t' pel primo triodo, varrà invece $-e_t'$ pel secondo, e quindi il valore di i_a si ottiene sottraendo le ordinate MM' ed NN' della caratteristica corrispondenti ai valori $E_{t0} + e_t'$ ed $E_{t0} - e_t'$ della tensione globale. Se si ribalta la curva (C) rispetto all'asse E_t e della curva ottenuta si considera la simmetrica (C') rispetto all'ordinata di P, è evidente che la corrente i_a corrispondente ad ogni e_t' si ottiene facendo la somma (algebrica) delle ordinate in M delle due curve. Così facendo per ogni e_t', si ottiene la curva (C'') passante per la proiezione O di P e che presenta appunto i caratteri indicati. Invero, per i valori $E_{t0} + e_t'$ ed $E_{t0} - e_t'$ essa avrà le ordinate $MM' - NN' = MM''$, e $NN' - MM' = NN'' = -MM''$, il che appunto significa che i punti M'' ed N'' sono simmetrici rispetto al punto O corrispondente allo stato di riposo.

La curva (C'') presenta in O un punto di flesso, e pertanto il suo andamento, nell'intorno di tal punto, è molto prossimo al rettilineo.

[1] La riproduzione esatta della forma non può manifestamente aversi se non nel caso in cui la relazione fra i_a e e_t sia di rigorosa proporzionalità (caratteristiche rettilinee) oppure anche di tipo parabolico ($h \neq 0$, $k = \ldots = 0$).

F) Dati pratici e costruttivi.

27. - Tubi di piccola potenza. — La tecnica della costruzione dei tubi elettronici si è negli ultimi tempi assai raffinata e perfezionata, specie nel senso di creare tipi diversi, ciascuno dei quali sia particolarmente adatto per l'una o l'altra delle varie funzioni che i tubi stessi sono chiamati a compiere.

I tubi usati negli apparati di radioricezione, ed in generale in tutti quei casi in cui sono in giuoco potenze relativamente modeste, si costruiscono raramente con catodi di tungsteno puro; per lo più invece si usano

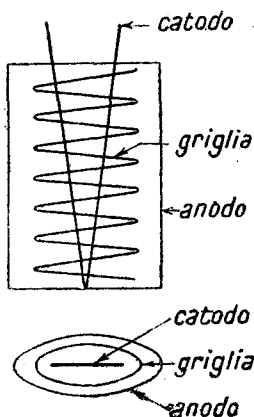
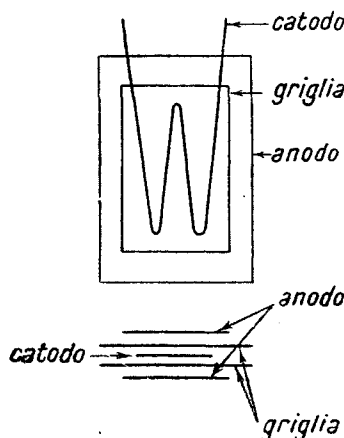



Fig. 180 *a*) Fig. 180 *b*)

filamenti toriati, e filamenti ad ossido, i quali, come ci è noto, consentono di raggiungere notevoli correnti di emissione con potenze di accensione relativamente modeste. Da essi sono poi derivati i catodi a riscaldamento indiretto, i quali presentano fra l'altro il pregio di consentire la utilizzazione delle ordinarie distribuzioni di corrente alternata per l'alimentazione del filo scaldatore.

Quanto alla forma degli elettrodi, non sempre essa è la cilindrica, anzi, specialmente nel caso di catodi a filamento, questo viene spesso foggiato a zig-zag in guisa da realizzarsi quasi un *piano* di emissione, come indicato schematicamente nelle figg. 180 *a*) e *b*); in tal caso gli altri elettrodi (griglia, anodo) hanno la forma di coppie di piani comprendenti una striscia di cui il piano catodico occupa la posizione mediana.

L'ampolla è generalmente di vetro, ed in essa viene praticato un vuoto assai spinto — dell'ordine di $10^{-5} \div 10^{-6}$ mm di mercurio — a mezzo di speciali pompe, ed un successivo perfezionamento del vuoto

viene affidato all'azione di assorbenti metallici (*getters*), fra cui il più usato è il magnesio.

Fig. 181

I progressi costruttivi hanno condotto ad elevare sensibilmente i valori delle conduttanze mutue e dei coefficienti di amplificazione, il che, per ragioni che apprenderemo in seguito, riduce il numero dei tubi occorrenti per realizzare certi determinati effetti.

Riportiamo qui i dati caratteristici di alcuni tubi elettronici usati in radioricezione.

Triodo 40 (R.C.A.). - Accensione diretta con 0,25 A a 5 V; $\mu = 30$; $r_a = 150\,000\ \Omega$; $g_m = 0{,}2$ mA/V; E_a normale $= 180$ V; E_g normale $= -3$ V; I_a normale $= 0{,}2$ mA.

Triodo RE 154 (Telefunken). - Accensione diretta con 0,17 A a 4 V; $\mu = 5$; $r_a = 8000\ \Omega$; $g_m = 0{,}62$ mA/V; E_a normale $= 120$ V; E_g normale $= -7{,}5 \div 9$ V; I_a normale $= 4$ mA. Alcune caratteristiche di tale tubo sono riportate in figura 181.

Tetrodo 24 A (R.C.A.). - Accensione indiretta con 1,75 A a 2,5 V; $\mu = 400$; $r_a = 400\,000\ \Omega$; $g_m = 1$ mA/V; E_a normale $= 180$ V; E_g normale $= -3$ V; tensione schermo $= 90$ V; $I_a = 4$ mA.

Tetrodo multi-μ 35 (F.I.V.R.E.). - Accensione diretta con 1,75 A a 2,5 V; capacità $C_{ga} = 0{,}07\ \mu\mu$F. In fig. 182 sono rappresentate alcune caratteristiche anodiche mutue, ed i diagrammi di fig. 183 mostrano le variazioni di μ, r_a, g_m al variare della tensione della griglia di controllo.

Fig. 182

Pentodo 41 (F.I.V.R.E.). - Accensione indiretta con 0,4 A a 6,3 V; $\mu = 150$; $r_a = 100\,000\ \Omega$; $g_m = 1{,}5$ mA/V; tensione anodica e di scher-

mo = 125 V; E_g = — 10 V; I_a = 11 mA; resistenza di carico normale 11 000 Ω. Lo stesso tubo, funzionando con tensione anodica e di schermo di 250 V e con E_g = — 18 V, può erogare 32 mA sull'anodo, presentando una r_a = 68 000 Ω ; g_m = 2,2 mA/V (resistenza di carico normale 7 600 Ω). In fig. 184 è disegnata la famiglia delle caratteristiche (I_a, E_a) per E_g = cost., essendo lo schermo mantenuto a 167,5 V, ed è indicata la retta luogo dei punti di funzionamento con carico di 9 500 Ω.

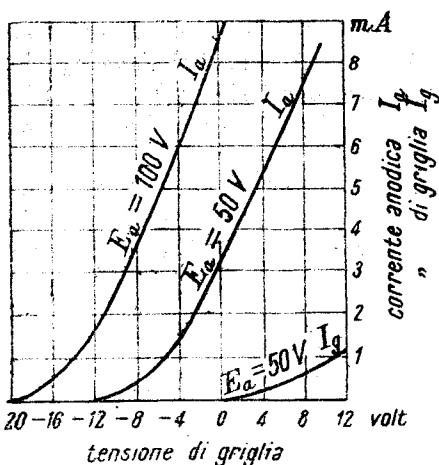
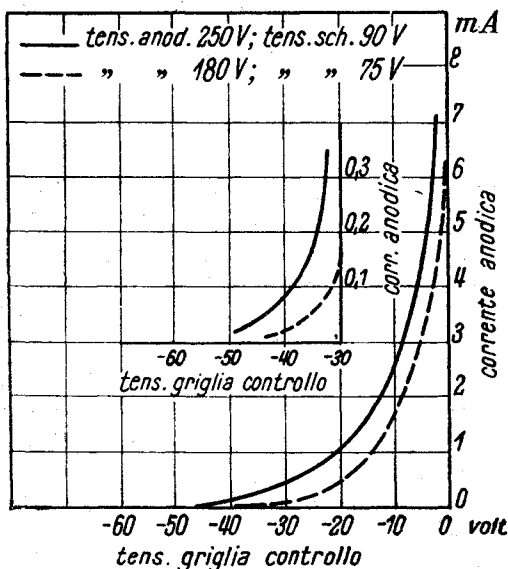
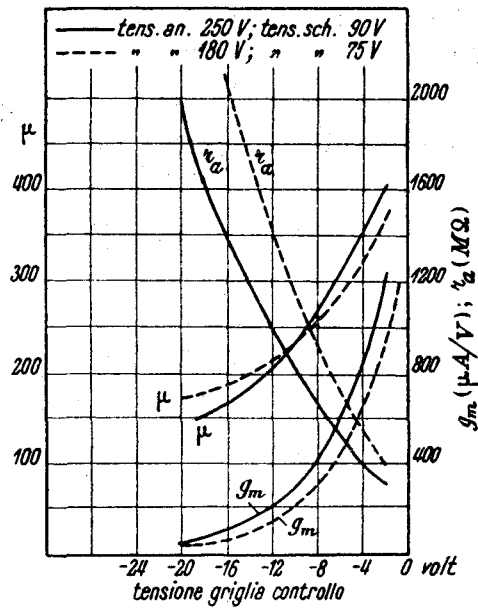



Fig. 183

28. - Tubi di grande potenza. — Nelle stazioni trasmittenti trovano invece applicazione tubi elettronici caratterizzati da elevati valori delle potenze in giuoco. Siccome a queste non si può pervenire se non elevando le tensioni anodiche e l'intensità delle correnti anodiche, ne seguono speciali

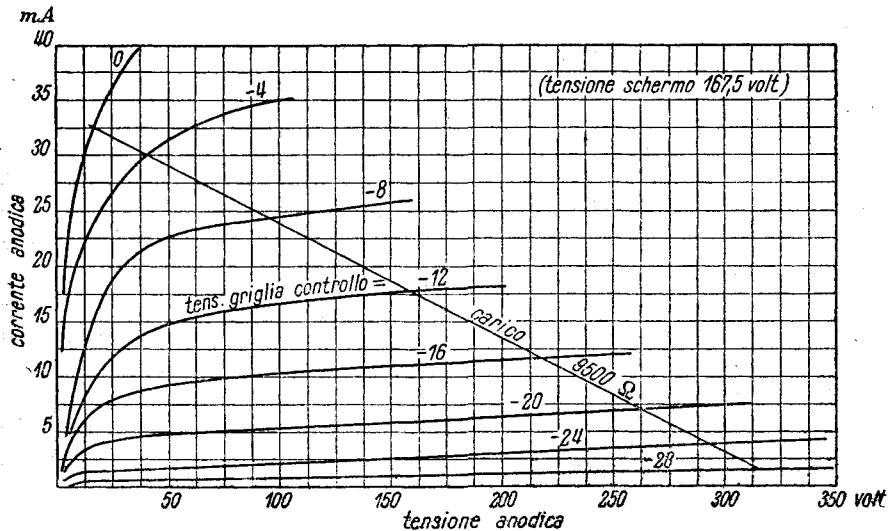



Fig. 184

criteri costruttivi sia per la realizzazione di tali possibilità, sia per provvedere allo smaltimento del calore corrispondente alla potenza dissipata sugli elettrodi.

Finchè questa non oltrepassa i 4 ÷ 5 kW, la superficie assegnabile agli elettrodi è tale da consentire un sufficiente smaltimento del calore senza ricorrere a speciali artifici. In particolare, con anodi di molibdeno,

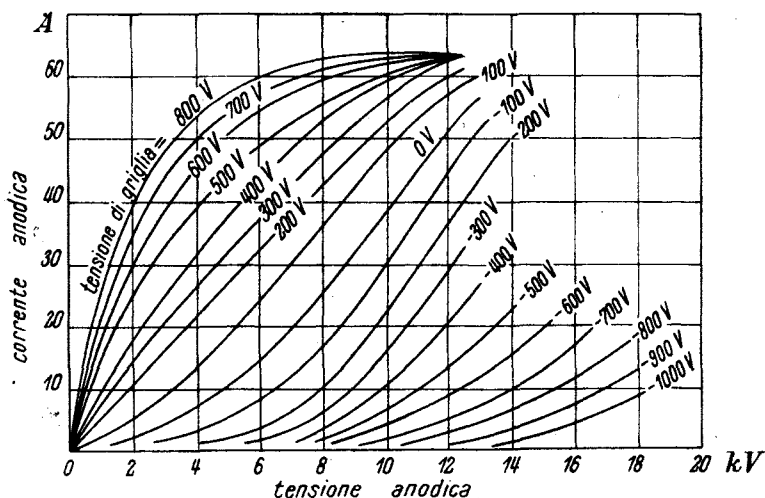



Fig. 185

si può far salire la potenza dissipata fino a 5 ÷ 6 W/cmq. Ma, per tubi di potenza superiore ai 5 kW [1], si ricorre quasi sempre alla disposizione con anodo esterno di rame, e alla refrigerazione mediante circolazione di acqua o di petrolio.

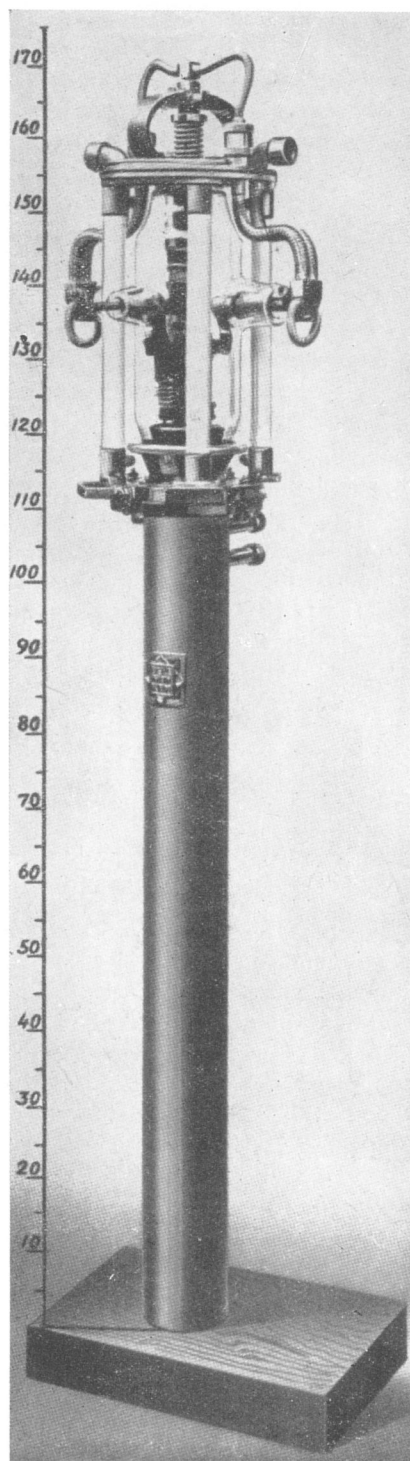
All'anodo viene sempre data la forma cilindrica, il che assicura una maggiore resistenza alle azioni elettrostatiche. In ogni caso poi queste impongono un limite inferiore alla distanza fra il catodo e gli altri elettrodi, distanza che è generalmente compresa fra 3 e 10 mm per tensioni fra 100 e 1000 volt, salendo a 35 mm per tensioni di 10 kV.

Nelle grandi installazioni per stazioni trasmittenti si impiegano generalmente triodi, ma ora cominciano ad usarsi anche tetrodi, e si sono oggidì già costruiti tubi a 4 elettrodi da 18 kW funzionanti con tensione anodica di 13 kV.

Nei tubi di grande potenza presenta particolare difficoltà il progetto e la realizzazione del catodo. Si pensi infatti che, dovendosi richiedere

[1] Per potenza di un tubo si intende quella che può essere dissipata sull'anodo in condizioni normali di servizio continuativo.

elevati valori della corrente di saturazione con basse tensioni di accensione, occorre far percorrere il catodo da correnti di notevoli intensità, ed il campo magnetico che ad esse si accompagna, fa deviare le traiettorie elettroniche (cfr. n. 22) diminuendo in definitiva la corrente anodica. Per i tubi di maggiori dimensioni si ricorre talvolta ad una specie di riscaldamento indiretto, costituendo il sistema catodico con una sbarra di tungsteno (che viene percorsa dalla corrente riscaldatrice) a diretto contatto con un cilindro, talora di niobio, che costituisce l'effettivo catodo emittente. La Telefunken ha potuto, ad es., realizzare così (e precisamente nel tubo tipo RS 300, rappresentato nella annessa tavola) un catodo capace di una corrente di saturazione di oltre 150 amp., mentre il filo scaldatore è attraversato da 1800 amp. con la tensione di sol' 17 volt ai capi.

In fig. 185 sono rappresentate le caratteristiche anodiche di un tubo AW 220 (Westinghouse) rispondente ai seguenti dati: accensione 320 amp. a 30 volt, tensione anodica 22 kV, potenza dissipabile a regime sull'anodo 150 kW, $\mu = 10,5$, $r_a = 350\ \Omega$, corrente di saturazione 65 amp.; il catodo è costituito da 8 filamenti di tungsteno in parallelo; l'intero tubo ha una lunghezza complessiva di m 1,65 e pesa 27 kg.

Tubo RS 300 (*Telefunken*)

PARTE SECONDA

CAPITOLO NONO

IRRADIAZIONE E PROPAGAZIONE DELLE ONDE ELETTROMAGNETICHE

1. - Campo elettromagnetico (¹). — Dagli Elementi di Elettrotecnica è noto che i legami fra i fatti elettrici ed i fatti magnetici sono governati da due leggi fondamentali, quella dell'elettromagnetismo e quella dell'induzione elettromagnetica.

La prima dice che ad ogni corrente elettrica si accompagna un campo magnetico; la seconda che ad ogni variazione di flusso di induzione magnetica si accompagna una f. e. m. indotta, cioè, in sostanza, un campo elettrico.

Per la esatta comprensione della portata di queste leggi, occorre ancora richiamare che la nozione di « corrente elettrica » deve intendersi estesa (El., V, 43) alle « correnti di spostamento », per modo che « corrente » viene in generale a significare una variazione dello spostamento elettrico, quale può aversi anche in seno ad un mezzo dielettrico per effetto di una variazione del campo cui lo spostamento è proporzionale. Così la prima delle enunciate leggi deve più generalmente intendersi nel senso che *ogni « tubo di spostamento elettrico », il cui flusso sia variabile col tempo, si circonda di linee magnetiche.*

Analogamente, la nozione di f. e. m. indotta, che negli Elementi è stata data con riferimento ad un circuito metallico, ed anche ad un semplice tratto di conduttore aperto AB, deve intendersi in senso più lato, in quanto il conduttore di cui allora ci siamo serviti è soltanto un *mezzo* per la constatazione, ma non già un elemento essenziale del fenomeno. La tensione indotta esiste cioè fra i due punti A e B, siano essi congiunti o no dal conduttore. E pertanto si può dire che esiste un *campo elettrico* ovunque v'è un campo magnetico variabile. Vi è però una differenza essenziale fra un tale campo e quello esistente fra le armature di un condensatore, ed essa consiste in ciò, che in questi ultimi le linee hanno principio e fine (e precisamente sulle cariche positive e negative

(¹) In questo num. e nel seguente è riassunto in forma elementare intuitiva quanto in forma più completa è esposto in App., *C*).

sopportate dalle armature), in quelli invece esse hanno andamento chiuso. In brevi ed espressive parole, ed in perfetta analogia coll'ultimo enunciato della prima legge, si può dire che *ogni tubo di induzione magnetica il cui flusso sia variabile nel tempo si circonda di linee di forza elettrica.*

Quando nello spazio, per una ragione qualunque, avvenga una perturbazione in seguito alla quale lo stato elettrico e magnetico cessi di essere stazionario per assumere carattere variabile nel tempo, in ogni punto si avrà un vettore $\vec{H}$ ed un vettore $\vec{F}$, entrambi variabili col tempo, rispettivamente corrispondenti al campo magnetico ed al campo elettrico, i quali coesistono e sono interdipendenti nel senso determinato dalle leggi fondamentali predette. Nel loro insieme essi costituiscono il così detto *campo elettromagnetico.*

Ciò non esclude che un tale stato di cose coesista e possa sovrapporsi ad un campo elettrico e ad un campo magnetico del tipo, diremo così, ordinario, riferibili cioè ad una particolare distribuzione di cariche, rispettivamente di correnti. Anzi, per concepire le perturbazioni di cui sopra, occorrerà pensare ad uno o più centri da cui esse emanano, e che potranno essere rappresentati da un sistema di cariche variabili o da una corrente variabile, avvertendo poi che l'una cosa non può disgiungersi dall'altra, giacchè non si può pensare ad una carica variabile senza che esista una corrente (di conduzione e di spostamento) che ad essa si accompagna, e viceversa.

A tale proposito è da farsi una fondamentale osservazione. Quando si ha a che fare con un sistema fisso di cariche, o con correnti costanti, i campi elettrici e magnetici che ad esse si associano hanno pure struttura fissa nel tempo, e corrispondono a quelli che furono studiati negli Elementi di Elettrotecnica. Orbene, l'osservazione cui alludevamo è questa: che se un tale stato di cose può corrispondere bene a quel che si verifica quando sia raggiunto uno stato di regime, non vale però per il periodo che precede il regime stesso. Nè è da credersi che, se pure in tale periodo lo stato del sistema di partenza è necessariamente variabile, le variazioni dei corrispondenti campi rispecchino esattamente in ogni istante le contemporanee variazioni delle cariche o delle correnti. Ciò esigerebbe che la formazione dei campi stessi avvenisse istantaneamente, *il che invece non è.*

Anzi, la formazione dei campi predetti avviene *come se* l'azione formatrice degli stessi viaggiasse (cfr. V, 5, 10) con una velocità ben determinata, generalmente dipendente dal mezzo, e che per il vuoto (praticamente anche per l'aria) si trova a coincidere con la velocità c di propagazione della luce, cioè circa $c = 3 \cdot 10^8$ m/sec, mentre per un mezzo le cui costanti dielettrica e di permeabilità hanno, rispetto al vuoto, i valori ε_r e μ_r, la velocità stessa vale $\dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}$.

2. - Campo di un dipolo. — Per i nostri scopi è particolarmente importante studiare il caso in cui il processo di formazione è riferibile ad una causa variabile col tempo con legge alternativa sinusoidale la cui pulsazione indichiamo con ω. In tale ipotesi tutti gli elementi variabili della questione hanno ovviamente variazione periodica con la stessa pulsazione, e lo studio del corrispondente campo elettromagnetico viene ad essere notevolmente semplificato e suscettibile di essere trattato col calcolo senza soverchie difficoltà.

Fig. 186

Precisando maggiormente, vogliamo indagare quel che avviene quando in un punto dello spazio vuoto, perfettamente isolante, sia posto quel che si chiama un *dipolo*, cioè un sistema di due cariche elettriche uguali ed opposte q e $-q$, assai vicine, variabili col tempo secondo la legge:

$$q = Q \operatorname{sen} \omega t \text{ (}^1\text{).} \tag{1}$$

Si può materializzare tale sistema pensando (fig. 186) ad un conduttore di lunghezza convenientemente piccola l, facente capo a due superfici di opportuna ampiezza, sulle quali siano disposte le cariche q e $-q$.

A partire dall'istante $t = 0$, durante il primo quarto di periodo, le cariche vanno gradualmente assumendo i valori Q e $-Q$ e di conserva

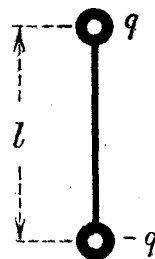
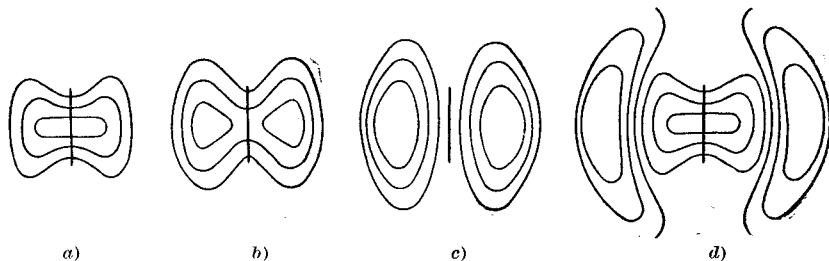



Fig. 187

con esse si va formando il campo, le cui linee, foggiate come alla fig. 187 *a*), *dovrebbero* estendersi in tutto lo spazio. Ma invece, come dianzi si è detto, tali linee andranno formandosi gradatamente, talchè, giunti alla fine del primo quarto di periodo, esse avranno progredito fino ad una certa distanza dal dipolo. Nel secondo quarto di periodo, le cariche vanno diminuendo sino al valore zero, e pertanto la produzione di linee, per così dire, si rallenta fino ad annullarsi alla fine del semiperiodo. Tuttavia, le primitive linee continueranno a progredire ed assumeranno l'aspetto di

---

(1) D'ora in poi, per una grandezza alternativa sinusoidale, i cui valori istantanei sono indicati con una certa lettera minuscola, useremo la stessa lettera maiuscola per indicare l'ampiezza o valore massimo, anzichè il valore efficace come d'uso in Elettrotecnica.

linee chiuse indicato nella fig. 187 *b*). Nel tempo che segue, le cariche si invertono, ed a tale inversione si accompagna una produzione di linee aventi disposizione esattamente opposta a quelle da cui siamo partiti. La coesistenza di queste con le precedenti dà origine ad un complesso come quello rappresentato in fig. 187 *c*), e così via. Si comprende che in generale si perviene così ad uno stato di cose del tipo rappresentato nella fig. 187 *d*), dove è da notare che la distanza fra due gruppi di linee chiuse e di andamento concorde, corrisponde a quella che, con la velocità u della propagazione, viene coperta durante un periodo della variazione di q, cioè alla *lunghezza d'onda* λ corrispondente alla pulsazione ω ed alla velocità u:

$$\lambda = \frac{2\pi u}{\omega} = \frac{2\pi c}{\omega\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} .$$

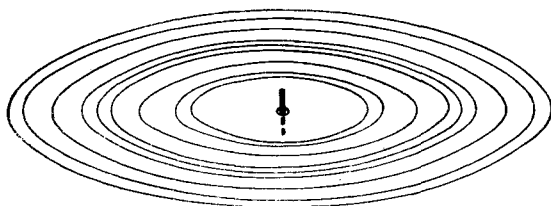
Nel caso ordinario (aria), si ha $\varepsilon_r = \mu_r = 1$, quindi, se la frequenza $\frac{\omega}{2\pi}$ è espressa in kHz, sarà da porre $c = 3 \cdot 10^5$ (km/sec) per avere λ in metri.

Insieme ai fatti sopra descritti, ne coesistono di analoghi relativamente al campo magnetico generato dalla corrente $i = \frac{dq}{dt}$ che necessariamente percorre il dipolo, ed il cui valore varia col tempo secondo la legge:

$$i = I \cos \omega t ,$$

essendo $I = \omega Q$.

Fig. 188

Le linee di tale campo magnetico sono però disposte normalmente alle precedenti, come indicato in fig. 188.

Si deve poi osservare che il campo elettrico non si commisurerà soltanto alle variazioni delle cariche del dipolo, ma altresì alle variazioni del campo magnetico, conformemente alla legge d'induzione elettromagnetica richiamata al n. 1, e così il campo magnetico sarà analogamente commisurato, oltre che alla corrente nel dipolo, anche alle correnti di spostamento che accompagnano le variazioni del campo elettrico, come prescrive la prima legge dell'elettromagnetismo, nella forma generale pure enunciata al n. 1.

Quello che vi è di essenziale nel processo descritto sta in ciò, che l'energia associata al campo elettromagnetico in gran parte si allontana definitivamente dal dipolo. A prima vista ciò non appare accordarsi con le nostre solite concezioni, secondo le quali l'energia elettrostatica e ma-

gnetica, in regime alternativo, vengono continuamente e periodicamente emesse dal generatore ed a questo restituite. E la ragione del divario risiede nel fatto che tale concezione è fondata essenzialmente sulla contemporaneità fra la causa determinante il campo e la formazione di esso, o, in altre parole, sull'ipotesi che sia infinitamente grande la velocità di propagazione.

Nel caso che stiamo considerando, si può avere uno stato di cose di tal genere nelle immediate vicinanze del dipolo, giacchè, a breve distanza, si può ritenere istantanea la creazione dei campi. E quindi si avrà che quivi l'energia viene alternativamente scambiata fra ciascun campo ed il generatore, o addirittura fra il campo elettrico ed il magnetico — come avviene in un ordinario circuito a costanti L, C concentrate ed in risonanza rispetto alla pulsazione impressa —, e pertanto assume carattere *mediamente stagnante* attorno al dipolo. Invece, a distanze maggiori, cessa lo scambio predetto, e si ha quindi a che fare con energia che si allontana, e pertanto è *definitivamente uscente* dal sistema.

Il primo viene denominato « campo di induzione », il secondo « campo di radiazione ».

3. - Calcolo dell'intensità del campo in un punto qualunque. — Veduto così come possa rappresentarsi il meccanismo della propagazione, procederemo a delle opportune valutazioni quantitative, onde trarne dei criteri per la effettiva costruzione di organi atti a far uscire (o, come si dice, ad *irradiare*) energia sotto la forma dianzi descritta, la quale, in quanto ricorda quella del moto ondoso in seno ad una massa liquida, prende appunto il nome di « ondulatoria » o « per onde ».

Tali valutazioni possono essere condotte abbastanza facilmente utilizzando le formole generali che forniscono l'espressione esplicita del campo elettrico e del campo magnetico « generati » da una distribuzione continua di dipoli, quali sono esposti in App., C, 8.

Occorre innanzi tutto scrivere l'espressione del vettore di Hertz. Nel caso che qui ci occupa, si tratta di un solo dipolo AB che riterremo disposto parallelamente all'asse z di un sistema cartesiano x, y, z avente l'origine nel centro C del dipolo stesso, il cui senso positivo (da B verso A) supporremo concorde col senso positivo dell'asse z (fig. 189).

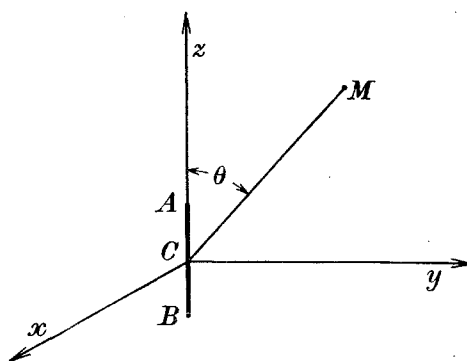



Fig. 189

L'integrale

$$\vec{P} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\vec{p}\,d\tau}{r}$$

che rappresenta, sotto forma di potenziale ritardato, il vettore di Hertz, si riduce nel caso attuale ad un solo elemento, cui, usando le notazioni complesse, possiamo dare la forma:

$$\vec{\mathbf{P}} = \mathbf{P}\vec{k} \qquad \text{con} \qquad \mathbf{P} = \frac{\mathbf{Q}l e^{-j\alpha r}}{4\pi r}, \tag{2}$$

essendo $\mathbf{Q}$ il complesso corrispondente alla carica variabile, l la lunghezza (piccolissima) del dipolo, r la distanza dell'origine C dal punto M in cui è calcolato $\vec{\mathbf{P}}$, e $\vec{k}$ vettore unitario parallelo all'asse z. Siccome la valutazione della carica deve farsi con un ritardo temporale di $\frac{r}{c}$, ciò equivale a ritardare la fase della grandezza alternativa $\mathbf{Q}$ nella misura angolarmente espressa da $\frac{\omega r}{c}$; così nella precedente compare il fattore di ritardo $e^{-j\alpha r}$, dove è:

$$\alpha = \frac{\omega}{c} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} = \frac{2\pi}{\lambda}. \tag{3}$$

Con ciò $\alpha r = 2\pi\frac{r}{\lambda}$ rappresenta la *misura angolare* (cfr. V, 13) della distanza r, riferita alla lunghezza d'onda λ corrispondente alla pulsazione ω.

Ove si voglia, come si suole, far comparire la corrente $\mathbf{I}$ in luogo della della carica $\mathbf{Q}$, basterà pensare che è $\mathbf{I} = j\omega\mathbf{Q}$ e pertanto si ha:

$$\vec{\mathbf{P}} = \frac{\mathbf{I}l e^{-j\alpha r}}{4\pi j\omega r}\vec{k} \tag{4}$$

I vettori $\vec{\mathbf{F}}$, $\vec{\mathbf{H}}$ del campo elettromagnetico del dipolo saranno da calcolarsi mediante le formole generali (31) di App., C), che per comodità del lettore qui riportiamo:

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{F}} = \dfrac{1}{\varepsilon}\left(\text{grad div}\,\vec{\mathbf{P}} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{\mathbf{P}}}{\partial t^2}\right), \\ \vec{\mathbf{H}} = \text{rot}\,\dfrac{\partial\vec{\mathbf{P}}}{\partial t}. \end{cases}$$

Le variazioni temporali essendo sinusoidali, le derivazioni rispetto al tempo saranno da sostituirsi con le moltiplicazioni per $j\omega$, mentre, per calcolare grad div $\vec{\mathbf{P}}$ e rot $\frac{\partial\vec{\mathbf{P}}}{\partial t}$ non avremo che da applicare note formole generali di calcolo vettoriale (App., B).

Si ha in primo luogo

$$\operatorname{div}\vec{P} = \frac{dP}{dr}\operatorname{grad} r \times \vec{k} = \frac{dP}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{dP}{dr}\cdot\frac{z}{r}\,(^1) = \frac{dP}{dr}\cos\theta = \frac{dP}{dz}\,,$$

dove θ rappresenta l'angolo che il vettore $\overrightarrow{CM}$ forma con l'asse z, cioè l'angolo fra i corrispondenti vettori unitari grad r e $\vec{k}$. Quindi le precedenti si scrivono:

$$\begin{cases} \vec{F} = \dfrac{1}{\varepsilon}\left(\operatorname{grad}\dfrac{\partial P}{\partial z} + \dfrac{\omega^2}{c^2}P\vec{k}\right) = \dfrac{1}{\varepsilon}\left(\operatorname{grad}\dfrac{\partial P}{\partial z} + \alpha^2 P\vec{k}\right), \\ \vec{H} = j\omega\operatorname{grad} P \wedge \vec{k}\,. \end{cases}$$

D'altra parte abbiamo

$$\operatorname{grad} P = \frac{dP}{dr}\operatorname{grad} r\,,$$

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}\frac{\partial P}{\partial z} &= \operatorname{grad}\frac{dP}{dr}\cdot\frac{z}{r} = z\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{dP}{dr}\right)\operatorname{grad} r + \frac{1}{r}\frac{dP}{dr}\vec{k} = \\ &= \left(\frac{d^2P}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{dP}{dr}\right)\cos\theta\operatorname{grad} r + \frac{1}{r}\frac{dP}{dr}\vec{k} = \\ &= \frac{d^2P}{dr^2}\cos\theta\operatorname{grad} r + \frac{1}{r}\frac{dP}{dr}(\vec{k} - \cos\theta\operatorname{grad} r)\,. \end{aligned}$$

Mediante la effettiva derivazione, dalla (4) si ottiene:

$$\frac{dP}{dr} = -\left(j\alpha + \frac{1}{r}\right)P\;;$$

e, con una successiva derivazione e utilizzando questa stessa relazione:

$$\frac{d^2P}{dr^2} = P\alpha^2\left(-1 + \frac{2j}{\alpha r} + \frac{1}{\alpha^2 r^2}\right).$$

Se, per semplicità di scrittura, indichiamo con $\vec{r}$ il vettore unitario grad r che caratterizza la direzione $\overrightarrow{CM}$, abbiamo in definitiva, per il campo elettrico:

$$\vec{F} = \frac{P\alpha^2}{\varepsilon}\left(1 - \frac{2j}{\alpha r} - \frac{1}{\alpha^2 r^2}\right)\left(\vec{k} - \cos\theta\cdot\vec{r}\right) + \frac{2P\alpha^2}{\varepsilon}\left(\frac{j}{\alpha r} + \frac{1}{\alpha^2 r^2}\right)\cos\theta\cdot\vec{r}\,,$$

e per il campo magnetico:

$$\vec{H} = j\omega\frac{dP}{dr}\operatorname{grad} r \wedge \vec{k} = P\alpha\omega\left(1 - \frac{j}{\alpha r}\right)(\vec{r}\wedge\vec{k})\,.$$

---

(1) Da $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, differenziando, si ha subito $\dfrac{\partial r}{\partial z} = \dfrac{z}{r}$.

A queste formole si può dare un aspetto più espressivo introducendo i due vettori unitari $\vec{s}$ e $\vec{t}$ definiti da ciò, che $\vec{s}$ si ottiene ruotando $\vec{r}$ di un angolo retto nel piano contenente il dipolo e il punto C (fig. 190) e $\vec{t}$, insieme ad $\vec{r}$, $\vec{s}$, completa la terna diretta $\vec{r}$, $\vec{s}$, $\vec{t}$ cioè è $\vec{t} = \vec{r} \wedge \vec{s}$. Siccome le componenti di $\vec{k}$ nelle direzioni $\vec{r}$ ed $\vec{s}$ valgono rispettivamente $\cos\theta$, $\operatorname{sen}\theta$, sarà

$$\vec{k} = \cos\theta \cdot \vec{r} + \operatorname{sen}\theta \cdot \vec{s},$$

e quindi

$$\vec{r} \wedge \vec{k} = \vec{r} \wedge \vec{s} \cdot \operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\theta \cdot \vec{t},$$

per cui alle espressioni di $\vec{\mathbf{F}}$ ed $\vec{\mathbf{H}}$ si può dare la forma:

$$(5)\quad \begin{cases} \vec{\mathbf{F}} = \dfrac{\mathbf{P}a^2}{\varepsilon}\left\{\left(1 - \dfrac{2j}{ar} - \dfrac{1}{a^2r^2}\right)\operatorname{sen}\theta \cdot \vec{s} + 2\left(\dfrac{j}{ar} + \dfrac{1}{a^2r^2}\right)\cos\theta \cdot \vec{r}\right\} \\ \vec{\mathbf{H}} = \mathbf{P}a\omega\left(1 - \dfrac{j}{ar}\right)\operatorname{sen}\theta \cdot \vec{t}, \end{cases}$$

atta a mettere in evidenza le componenti di tali vettori secondo $\vec{r}$, $\vec{s}$, $\vec{t}$. Le direzioni di questi, come si vede nella fig. 190, non sono altro che le direzioni fondamentali relative al sistema di coordinate polari definito dal polo C e dall'asse z, e precisamente $\vec{r}$ è normale alla superficie coordinata (sfera) sulla quale è costante il (raggio vettore) r, similmente $\vec{s}$ è normale alla superficie (cono) sulla quale è costante l'angolo (colatitudine) θ, e $\vec{t}$ a quella (piano meridiano) sulla quale è costante l'angolo (longitudine) φ contato a partire da un piano fisso passante per l'asse z.

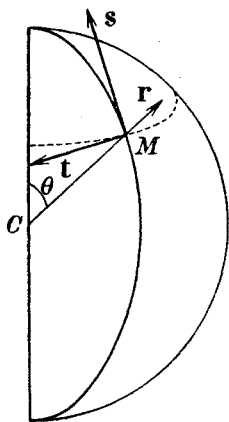



Fig. 190

Essendo nulla la componente di $\vec{\mathbf{F}}$ secondo $\vec{t}$, e quelle di $\vec{\mathbf{H}}$ secondo $\vec{r}$ ed $\vec{s}$, si ha che il vettore del campo elettrico è in ogni punto M parallelo al piano meridiano del punto M, e quello del campo magnetico è diretto tangenzialmente al cerchio parallelo passante per M, quindi i due vettori sono sempre e dovunque fra loro perpendicolari.

Ciascuna delle componenti di $\vec{\mathbf{F}}$ e di $\vec{\mathbf{H}}$ comprende una parte in fase, ed una in quadratura con $\mathbf{P}$, e quindi in quadratura fra loro. Così ad es. la componente di $\vec{\mathbf{F}}$ secondo $\vec{s}$ ha la parte $\dfrac{\mathbf{P}a^2}{\varepsilon}\left(1 - \dfrac{1}{a^2r^2}\right)\operatorname{sen}\theta$ in fase con $\mathbf{P}$, e la parte $-\dfrac{2\mathbf{P}a^2}{\varepsilon}\dfrac{j}{ar}\operatorname{sen}\theta$ in quadratura.

Supponendo infinita la velocità di propagazione, risulterebbe, in virtù della (3), $a = 0$, e le espressioni (5) si ridurrebbero a

$$\vec{\mathbf{F}} = -\frac{\mathbf{P}}{\varepsilon r^2}\,\text{sen}\,\theta\cdot\vec{s} + \frac{2\,\mathbf{P}}{\varepsilon r^2}\cos\theta\cdot\vec{r}\,, \qquad \vec{\mathbf{H}} = -\frac{j\omega\mathbf{P}}{r}\,\text{sen}\,\theta\cdot\vec{t}\,, \tag{6}$$

cioè i campi elettrico e magnetico sarebbero in ogni punto in quadratura. È quello che si verifica nei casi ordinari dell'Elettrotecnica, in cui, per la piccolezza delle frequenze in gioco, le distanze con cui si ha a che fare sono dell'ordine di una trascurabile frazione di lunghezza d'onda, cioè sono trascurabili i valori del prodotto $ar = 2\pi\,\frac{r}{\lambda}$ (il che equivale appunto a ritenere $a \cong 0$).

Ed anche in presenza di frequenze elevate, i campi $\vec{\mathbf{F}}$ ed $\vec{\mathbf{H}}$ si riducono sensibilmente ai termini (6) nelle immediate vicinanze del dipolo [1]. Tali termini sono precisamente quelli che costituiscono il campo di induzione. Mano a mano che ci si allontana dal dipolo prevalgono invece i primi termini delle espressioni (5), talchè a grande distanza dal dipolo stesso si può ritenere:

$$\vec{\mathbf{F}} \cong \frac{\mathbf{P}a^2}{\varepsilon}\,\text{sen}\,\theta\cdot\vec{s}\,, \qquad \vec{\mathbf{H}} \cong \mathbf{P}a\omega\,\text{sen}\,\theta\cdot\vec{t}\,.$$

Più precisamente, tale ammissione è tanto più attendibile quanto minore è il rapporto $\frac{1}{ar}$ fra i moduli dei due primi termini dell'espressione (5) di $\vec{\mathbf{H}}$ (che alla sua volta è uguale a quello fra i moduli dei primi termini dei coefficienti di $\vec{s}$ e $\vec{t}$ dell'espressione di $\vec{\mathbf{F}}$). E poichè a vale $\frac{2\pi}{\lambda}$, l'approssimazione stessa è da ritenersi accettabile per punti la cui distanza dal dipolo è molto grande *rispetto alla lunghezza d'onda.*

Ponendo

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{P}a\omega = \frac{\mathbf{I}l}{2jr\lambda}\,e^{-jar} \tag{7}$$

ed osservando che da $\varepsilon\mu\omega^2 = a^2$ si deduce $\frac{a^2}{\varepsilon} : a\omega = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$, le espressioni precedenti si scrivono

$$\vec{\mathbf{F}} \cong \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\mathbf{H}_1\,\text{sen}\,\theta\cdot\vec{s}\,, \quad \vec{\mathbf{H}} \cong \mathbf{H}_1\,\text{sen}\,\theta\,\cdot\vec{t}\,. \tag{8}$$

Queste formole mostrano che, per ogni direzione θ, i valori (ampiezze) del campo elettrico e del campo magnetico, fra loro nel rapporto costante

---

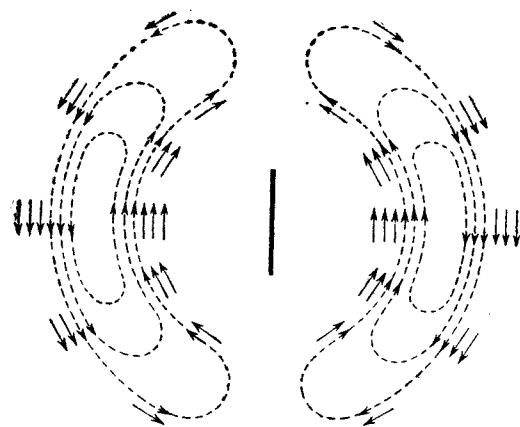
[1] Evidentemente, per piccolissimi valori di r, predominano i termini contenenti la massima potenza di $\frac{1}{r}$.

$\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$, variano in modo inversamente proporzionale alla distanza del punto considerato M dal centro C del dipolo. E, quanto alla direzione, quella del vettore $\vec{\mathbf{F}}$ risulta senz'altro tangente al meridiano per M, mentre quella di $\vec{\mathbf{H}}$ è, come nel caso generale, parallela alla tangente al parallelo per M. Le intensità variano sinusoidalmente nel tempo con pulsazione ω, ed i due campi sono fra loro dovunque in fase (ben inteso, a grande distanza dal dipolo). Invece tanto l'uno quanto l'altro presentano differenze di fase da punto a punto, e precisamente, come indica il fattore $e^{-j\alpha r}$ che compare nelle precedenti espressioni, lo sfasamento vale angolarmente $\alpha(r_2 - r_1)$ fra due punti distanti r_2 ed r_1 dal dipolo. In particolare si ritrova la medesima fase in due punti tali che $\alpha(r_2 - r_1)$ sia multiplo di 2π, cioè su ogni coppia di sfere la differenza dei cui raggi sia multipla della lunghezza d'onda.

Il campo elettrico ed il campo magnetico appaiono così *propagarsi* in tutte le direzioni con una certa velocità di fase u, definita da ciò, che un osservatore viaggiante lungo un raggio CM con tale velocità non avverta sfasamento alcuno fra i campi che successivamente incontra sul suo cammino. Ciò val quanto dire che, se $MM' = udt$ è il cammino coperto dall'osservatore nel tempuscolo dt, la fase dell'oscillazione in M all'istante iniziale di tale tempuscolo coincide con quella dell'oscillazione in M' all'istante terminale del tempuscolo stesso. Ora, il ritardo con cui si svolgono le oscillazioni in M' rispetto a M è angolarmente misurato da $\alpha \cdot MM' = \alpha udt$, d'altra parte la fase dell'oscillazione in qualunque punto procede angolarmente di ωdt durante il tempo dt, quindi dovrà aversi

Fig. 191

$$\alpha u = \omega\,, \quad \text{cioè} \quad u = \frac{\omega}{\alpha}\,.$$

Tale velocità coincide dunque con $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$, cioè con quella stessa di cui ci siamo serviti per valutare i ritardi delle azioni emananti dal dipolo rispetto alla corrente ed alle cariche nel dipolo stesso.

La propagazione di cui si tratta è anche accompagnata da una attenuazione commisurata all'allontanamento del punto M dal dipolo, e precisamente in misura inversamente proporzionale alla distanza $r = CM$.

La distribuzione del campo elettrico in un dato istante si presenta

come schematicamente indicato in fig. 191, dove è indicato anche il corrispondente andamento delle linee di forza; mentre per il campo magnetico, come già veduto, si avrà una distribuzione del tipo di fig. 188.

4. - Energia del campo di un dipolo. - Potenza irradiata. — Dal fatto, sopra segnalato, che i campi $\vec{\mathbf{F}}$ ed $\vec{\mathbf{H}}$, a grande distanza dal dipolo, sono fra loro in fase, discende la importantissima conseguenza che, mentre l'energia corrispondente a quelle parti dei campi elettrici e magnetici che abbiamo chiamati di induzione, si trova — come nei comuni circuiti risonanti a induttanza e capacità concentrate — impegnata in una periodica fluttuazione fra i due campi, talchè il mantenimento di questi non richiede sostanzialmente alcuna somministrazione energetica da parte del generatore che alimenta il dipolo, altrettanto non può dirsi per l'energia pertinente ai campi di radiazione. Per questi invero viene meno la possibilità di tempestivi scambi, e conseguentemente l'energia ad essi pertinente deve *necessariamente* essere fornita dal generatore predetto.

Dalle (7) si deduce la relazione

$$\varepsilon F^2 = \mu H^2 ,$$

la quale dimostra poi che l'energia magnetica e l'energia elettrica, costituenti nel loro insieme l'energia del campo elettromagnetico, sono presenti dovunque in eguale misura.

L'energia complessiva del campo, a senso del teorema di Poynting (App., C, 4), si può considerare come irradiata dal dipolo nelle varie direzioni dei raggi spiccati dal centro C, i quali costituiscono le linee del vettore di Poynting. Infatti fra poco vedremo che questo vettore ha dovunque la direzione di $\vec{r}$.

Vogliamo ora procedere alla valutazione quantitativa di tale energia, o meglio della potenza ad essa corrispondente, la quale, come detto al n. prec., deve essere fornita al dipolo dal generatore che lo alimenta.

All'uopo richiamiamo l'espressione generale del teorema di Poynting:

$$dP_i = dW_e + dW_m + dP_J + dt\int_S \vec{R} \times \vec{n} \cdot dS \tag{9}$$

secondo la quale l'energia dP_i conferita dal sistema di generatori nel tempo dt equivale alla somma delle variazioni dell'energia elettrica e magnetica immagazzinate all'interno di una qualunque superficie S contenente i generatori stessi, con la energia dissipata per effetto Joule e col prodotto di dt per il flusso del vettore radiante

$$\vec{R} = \vec{F} \wedge \vec{H}$$

uscente dalla superficie S stessa.

Nel caso che ci interessa, poichè le variazioni nel tempo di tutte le grandezze hanno carattere periodico, ci proporremo di calcolare i valori medi durante un periodo dei vari elementi energetici in giuoco.

Innanzi tutto osserviamo che i valori medi in un periodo di dW_e e dW_m, a causa della periodicità predetta, sono senz'altro nulli. Pertanto, se riteniamo trascurabile la dissipazione per effetto Joule, possiamo asserire che la potenza erogata dai generatori equivale al flusso attraverso S del valor medio del vettore $\vec{R}$ in un periodo. Quanto alla superficie S, essa può essere qualunque purchè comprenda il dipolo nel suo interno.

Il calcolo che vogliamo fare riesce notevolmente semplificato se per S si assume la superficie di una sfera di centro C il cui raggio indichiamo con r. Introducendo nelle (5) il valore di $\mathbf{P}\alpha\omega$ fornito dalla (7), le espressioni di $\vec{\mathbf{F}}$ ed $\vec{\mathbf{H}}$ si scrivono

$$\vec{\mathbf{F}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\frac{\mathbf{I}l}{2jr\lambda}\,e^{-j\alpha r}\left[\left(1-\frac{j}{\alpha r}+\frac{1}{\alpha^2r^2}\right)\operatorname{sen}\theta\cdot\vec{s}+2\left(\frac{j}{\alpha r}+\frac{1}{\alpha^2r^2}\right)\cos\theta\cdot\vec{r}\right],$$

$$\vec{\mathbf{H}} = \frac{\mathbf{I}l}{2jr\lambda}\,e^{-j\alpha r}\left(1-\frac{j}{\alpha r}\right)\operatorname{sen}\theta\cdot\vec{t}\,.$$

Poichè tali vettori sono perpendicolari ad $\vec{r}$, il vettore $\vec{R}$ risulta diretto secondo $\vec{r}$, coincidente alla sua volta con $\vec{n}$. Perciò nel calcolo dell'elemento di flusso $\vec{R}\times\vec{n}\cdot dS$ si può prescindere dal secondo termine dell'espressione di $\vec{\mathbf{F}}$ (¹). Limitandoci dunque al primo, e osservando che è $\vec{s}\wedge\vec{t}\times\vec{r}=1$, l'elemento generico dell'integrale che compare nella (9) si valuterà moltiplicando per dS il valore medio R_m del prodotto dei valori istantanei delle grandezze alternative rappresentate dai numeri complessi

$$\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\frac{\mathbf{I}le^{-j\alpha r}}{2jr\lambda}\left(1-\frac{j}{\alpha r}-\frac{1}{\alpha^2r^2}\right)\operatorname{sen}\theta\,,\qquad \frac{\mathbf{I}le^{-j\alpha r}}{2jr\lambda}\left(1-\frac{j}{\alpha r}\right)\operatorname{sen}\theta\,.$$

Ora, come è noto, tale valor medio equivale al prodotto scalare dei complessi stessi riferiti ai valori efficaci (Cfr. El., VII, 11). Si ha dunque (²)

$$R_m = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\frac{I^2l^2}{8r^2\lambda^2}\operatorname{sen}^2\theta\,dS = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\frac{I_e^2l^2}{4r^2\lambda^2}\operatorname{sen}^2\theta\,dS\,,$$

dove I è il modulo (ampiezza) di $\mathbf{I}$, ed $I_e = \dfrac{I}{\sqrt{2}}$ il corrispondente valore efficace.

(¹) Tale secondo termine essendo un vettore parallelo ad $\vec{r}$, il contributo di esso al prodotto $\vec{R}\times\vec{n}$ conterrà il fattore $\vec{r}\wedge\vec{t}\times\vec{r}$, quindi è nullo.

(²) Prescindendo dal fattore $\dfrac{e^{-j\alpha r}}{j}$ comune ai due complessi ed avente modulo unitario, si ha

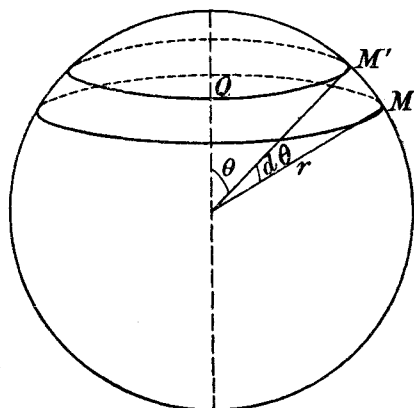
$$\left(1-\frac{j}{\alpha r}-\frac{1}{\alpha^2r^2}\right)\times\left(1-\frac{j}{\alpha r}\right)=1\,.$$

Il flusso medio (nel tempo) di $\vec{R}$, cioè la *potenza irradiata* Π, è dunque misurata dall'integrale:

$$\Pi = \int R_m dS$$

esteso alla superficie della sfera. Questa integrazione si eseguisce molto facilmente dividendo la superficie S nelle strisce anulari elementari comprese fra i coni θ e $\theta + d\theta$; l'area della striscia generica (fig. 192) è misurata dal prodotto della circonferenza di raggio $MQ = r \operatorname{sen} \theta$ per la lunghezza dell'arco $MM' = r\, d\theta$ cioè da $2\pi r^2 \operatorname{sen} \theta d\theta$, e l'intera superficie sferica si ottiene facendo variare θ fra 0 e π. Si ha dunque:

Fig. 192

$$\Pi = \int R_m\, 2\pi r^2 \operatorname{sen} \theta d\theta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\, \frac{I_e^2 l^2 \pi}{2\lambda^2} \int_0^\pi \operatorname{sen}^3 \theta d\theta\,.$$

Sostituendo a μ, ε i valori loro spettanti nel caso dell'aria, cioè

$$\mu_0 = 1{,}256 \cdot 10^{-6}\mathrm{H/m}\,, \quad \varepsilon_0 = 8{,}86 \cdot 10^{-12}\mathrm{F/m}\,,$$

ed osservando che l'integrale a terzo membro vale $\frac{4}{3}$ (1), si ottiene

$$\Pi = 394{,}25 \frac{I^2 l^2}{\lambda^2} = 788{,}5 \frac{I_e^2 l^2}{\lambda^2} \text{ (2)}\,, \tag{10}$$

dove il coefficiente numerico è misurato in ohm $\left(\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\right.$ è omogeneo con una resistenza), e pertanto Π risulta espresso in watt per I, I_e in ampere, l e λ in una stessa unità.

Per un mezzo diverso, questa espressione dovrà moltiplicarsi per $\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}$ essendo μ_r, ε_r i valori delle corrispondenti permeabilità e permittività relative all'aria.

---

(1) Si ha: $\int_0^\pi \operatorname{sen}^3 \theta\, d\theta = \int_0^\pi \operatorname{sen} \theta\, (1 - \cos^2 \theta)\, d\theta = \int_0^\pi \operatorname{sen} \theta\, d\theta - \int_0^\pi \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta\, d\theta =$
$= \int_0^\pi \operatorname{sen} \theta\, d\theta + \int_0^\pi \cos^2 \theta\, d\,(\cos \theta) = \left[-\cos \theta + \frac{\cos^3 \theta}{3}\right]_0^\pi = \frac{4}{3}\,.$

(2) Quando per ε e μ si adottano i valori $\frac{10^{-9}}{36\pi}$, $4\pi \cdot 10^{-7}$ (corrispondenti all'ohm teorico ed al valore $3 \cdot 10^8$ m/sec della velocità c), i coefficienti numerici risultano $40\pi^2 \cong 395$, rispettivamente $80\pi^2 \cong 790$ ohm.

5. - Semidipolo. - Antenna elementare. — Ora osserviamo che un dipolo, rispetto al suo piano equatoriale π (piano normale al dipolo nel suo centro), presenta simmetria con inversione nel senso degli elementi elettrici. Basta allora applicare il principio delle immagini (I, 9 e App., *C*, 9) per concludere che tutte le considerazioni precedenti non cessano di essere valide se, al posto di detto piano equatoriale, si suppone d'avere un conduttore di conducibilità infinita. Ed in particolare, se limitiamo le nostre considerazioni al semispazio situato da una delle due parti di

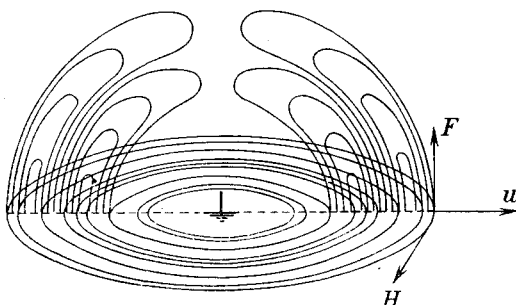



Fig. 193

tal piano, avremo che la distribuzione delle linee del campo elettrico F e del campo magnetico H corrisponde a quella disegnata in fig. 193, per modo che a grande distanza dal *semidipolo* le prime avranno approssimativamente andamento normale, le seconde parallelo a π, essendo entrambe normali alla direzione u della propagazione. Le intensità dei campi elettrico e magnetico saranno uguali a quelle corrispondenti al dipolo intero, mentre la potenza irradiata risulterà dimezzata.

Questo caso può approssimativamente realizzarsi utilizzando la terra come piano π, e si arriva al semidipolo o *antenna elementare* verticale, messa a terra ad un estremo e libera all'altro.

Se h è la sua altezza, le espressioni (8), (10) assumono dunque l'aspetto:

$$(8') \qquad \vec{\mathbf{F}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\frac{Ihe^{-j\alpha r}}{jr\lambda}\,\mathrm{sen}\,\theta\cdot\vec{s}\,, \quad \vec{\mathbf{H}} = \frac{Ihe^{-j\alpha r}}{jr\lambda}\,\mathrm{sen}\,\theta\cdot\vec{t}\,,$$

$$(10') \qquad \Pi = 788{,}5\,\frac{I^2h^2}{\lambda^2} = 1577\,\frac{I_e^2h^2}{\lambda^2}\,.$$

6. - Antenna di lunghezza finita. - Altezza equivalente. — Dalle espressioni trovate nel n. prec. pel campo elettromagnetico generato da un'antenna (ideale) costituita da un solo dipolo, si possono dedurre, per semplice processo di somma (integrazione), le analoghe espressioni relative al caso di un'antenna reale, considerando questa come un aggregato di infiniti

dipoli distribuiti in un sistema ad una dimensione, in quanto che le espressioni generali del campo dovuto ad un sistema di dipoli contengono linearmente i momenti elementari $\vec{p}d\tau$.

Esamineremo qui in particolare il caso di un'antenna costituita da un filo rettilineo verticale la cui lunghezza non sia, come dianzi, infinitesima, bensì finita.

In un tale filo può in effetto agevolmente realizzarsi uno stato di cose del tutto paragonabile a quello studiato nei nn. prec., senonchè, come abbiamo veduto al Cap. V, l'intensità della corrente non sarà in generale la stessa nei vari punti. Per es., se il filo è connesso con un estremo a terra, e la pulsazione eccitatrice è tale che la corrispondente lunghezza d'onda λ uguagli il quadruplo della lunghezza del filo, i valori (ampiezze) della corrente nei vari punti avranno una variazione sensibilmente sinusoidale partendo da un massimo alla base fino al valore nullo all'estremità superiore; se il filo è isolato nello spazio ed ha una lunghezza corrispondente alla metà di λ si avrà in esso una distribuzione assimilabile ad un «raddoppiamento» della precedente, e così via.

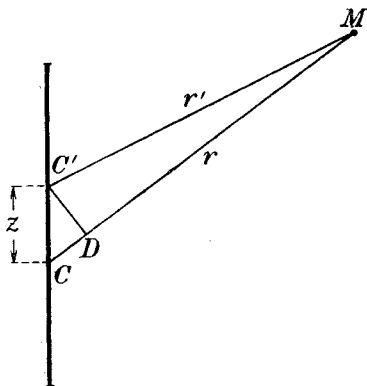



Fig. 194

Consideriamo dunque in generale un'antenna costituita da un filo rettilineo verticale. Portiamo l'origine del sistema di riferimento nel centro del filo e dirigiamo l'asse z parallelamente ad esso, cosicchè, detta $2h$ la lunghezza, il filo occuperà il segmento compreso fra i valori $-h$ e $+h$ dell'ordinata z; ed indichiamo con $\mathbf{I}(z)$ il valore (complesso) della corrente nel punto generico di esso.

Per quanto precede, il campo elettrico e magnetico in un punto qualunque M si otterranno integrando fra $z=-h$ e $z=+h$ le espressioni (8'), in cui ad $\mathbf{I}l$ si sostituisca $\mathbf{I}(z)dz$, e dove r, $\vec{r}$, $\vec{s}$, $\vec{t}$ saranno da intendersi pure funzioni di z, in quanto che in corrispondenza di ciascun punto del filo si avranno diversi valori della distanza r e diverse direzioni dei vettori $\vec{r}$, $\vec{s}$, $\vec{t}$.

Si può subito procedere ad una notevole semplificazione quando ci si limiti alla considerazione di punti M a notevole distanza dall'antenna. In tal caso infatti, se (fig. 194) r è la distanza del punto $M \equiv (x_1, y_1, z_1)$ dal centro $C \equiv (0, 0, 0)$ dell'antenna ed r' quella dello stesso M dal punto $C' \equiv (0, 0, z)$ di ordinata $z \neq 0$, si ha sensibilmente, per $r \gg z$:

$$r' \cong r + \frac{\partial r'}{\partial z} z .$$

Ora, essendo

$$r'^2 = x_1^2 + y_1^2 + (z_1 - z)^2$$

e

$$\frac{\partial r'}{\partial z} = -\frac{\partial r'}{\partial z_1} = -\cos\theta$$

col solito significato di θ, si può scrivere

(11) $$r' \cong r - z\cos\theta \ [1] .$$

A questo punto, occorre notare che nelle formole (5) e (7) la distanza r compare in doppio modo, e precisamente alcune volte in modo diretto, altre pel tramite dell'esponenziale $e^{-j\alpha r}$. Ora, per le r che compaiono direttamente, si può senz'altro trascurare il termine correttivo $-z\cos\theta$, cioè ritenere r costante lungo tutta l'antenna, perchè ciò in sostanza equivale a considerare come parallele le congiungenti M coi vari punti dell'antenna, il che è certamente lecito quando r è molto maggiore del massimo valore di z, cioè per $r \gg h$. Questo è quanto si verifica sempre in pratica, in quanto h è al massimo dell'ordine delle centinaia di metri, mentre le distanze r di cui ci si occupa sono di parecchie decine e spesso di centinaia o migliaia di km.

Ben diversa è invece l'influenza del termine correttivo nei riguardi della r che compare nell'esponenziale $e^{-j\alpha r}$ caratterizzante la fase. Per il fatto che la funzione esponenziale e^x è periodica con periodo $2\pi j$, l'espressione $e^{-j\alpha r}$ ha, rispetto ad r, il periodo $\frac{2\pi}{\alpha} = \lambda$, e pertanto il termine correttivo $-z\cos\theta$ non deve più confrontarsi con r, bensì con λ. Dell'influenza di tale termine sulla fase ci si può rendere conto chiaramente osservando che, per fatto della differenza $r' - r$ fra le distanze r ed r', i contributi che al campo in M sono apportati dagli elementi d'antenna situati in C e C' sono diversamente sfasati rispetto alle corrispondenti correnti in C e C', e precisamente la differenza fra tali sfasamenti è angolarmente rappresentata dallo stesso numero $2\pi\frac{r'-r}{\lambda}$ che esprime quella che noi abbiamo chiamato la misura angolare di $r' - r$ (prodotto di 2π per il rapporto di $r' - r$ *alla lunghezza d'onda*). Ora è ovvio che tale misura può non essere affatto trascurabile pur essendolo invece il rapporto della stessa $r' - r$ *alla distanza* r.

Affinchè la correzione indicata dalla (11) possa essere completamente trascurata, non basta dunque che si considerino punti a grande distanza dall'antenna, ma occorre anche che questa abbia una estensione lineare piccola in confronto a λ.

---

[1] La sostituzione di $-z\cos\theta$ ad $r' - r$ equivale ad assimilare la perpendicolare $C'D$ condotta da C' su PC con l'arco di cerchio di centro P e raggio PC'.

Supponiamo in primo luogo che così sia, cioè che si abbia $h \ll \lambda$. In tal caso, il calcolo del campo a distanza non presenta alcuna difficoltà. Per esso si possono senz'altro utilizzare le formole (8), con un valore di r costante lungo l'antenna, e pertanto tutto si riduce a sostituire $\mathbf{I}l$ con l'integrale $\int \mathbf{I}(z)dz$.

Si suole in tal caso introdurre una così detta «altezza equivalente d'antenna» h_e, per la cui definizione bisogna far riferimento ad un ben determinato valore della corrente, per es. a quello $\mathbf{I}_0$ — supposto non nullo — pertinente al punto centrale C. L'altezza equivalente h_e è quella che soddisfa a

$$\mathbf{I}_0 h_e = \int_{-h}^{h} \mathbf{I}(z)dz ,$$

cioè:

$$h_e = \frac{1}{\mathbf{I}_0} \int_{-h}^{h} \mathbf{I}(z)dx .$$

È evidente che una tale definizione non ha senso se non quando l'espressione a secondo membro sia reale. Ciò in particolare si verifica quando le correnti nei vari punti dell'antenna sono fra loro in fase, cioè quando, posto

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_0 f(z) , \tag{12}$$

la $f(z)$ che caratterizza la legge di distribuzione delle correnti lungo il filo, sia una funzione reale di z. Ad es., ciò è quanto approssimativamente avviene nel caso in cui il filo corrisponda ad un tronco di linea in regime stazionario (abbiamo detto «approssimativamente» perchè, come ci è noto, il regime stazionario è una astrazione ideale). In tale caso la precedente rimane inalterata se ai valori complessi delle correnti si sostituiscono i loro moduli, cioè le ampiezze, vale a dire che si ha fra queste ultime la relazione

$$I = I_0 f(z) .$$

Quando si può parlare di altezza equivalente h_e, questa può ovviamente definirsi come quella che spetterebbe ad un dipolo percorso in ogni suo punto dalla corrente $\mathbf{I}_0$ — rispetto alla quale è definita la h_e stessa — capace di produrre in ogni punto dello spazio — sufficientemente lontano dal dipolo — un campo elettromagnetico uguale a quello prodotto dall'antenna effettiva.

Se poniamo

$$h_e = 2ah ,$$

dalle precedenti si ha:

$$a = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} f(z)dz .$$

L'altezza equivalente si ottiene dunque moltiplicando l'altezza reale $2h$ per un fattore a che, come si legge nell'ultima uguaglianza, non è altro che il valore medio della funzione caratterizzante la distribuzione della corrente. A tale fattore a si dà talvolta il nome di *coefficiente di forma*.

Non si deve dimenticare che alle nozioni di altezza equivalente ed a quella di coefficiente di forma non spetta significato concreto se non quando l'antenna ha dimensioni lineari piccole rispetto alla lunghezza d'onda, ed inoltre la $f(z)$ che rappresenta la legge di distribuzione della corrente è una funzione reale (o almeno a media reale).

Tuttavia dalla prima condizione si può prescindere, e si può quindi ancora parlare di altezza equivalente per una antenna di dimensioni paragonabili a λ, quando lo studio della distribuzione del campo non venga esteso all'intero spazio, ma limitato ai punti del piano xy, cioè del piano normale all'antenna passante per il suo punto centrale. Infatti, siccome per i punti di tale piano l'angolo θ vale $\frac{\pi}{2}$, il termine correttivo $-z\cos\theta$ di cui al n. prec., è rigorosamente nullo, e pertanto *a fortiori* trovano applicazione le considerazioni dianzi fatte nell'ipotesi di $z\cos\theta$ trascurabile.

Quanto ai valori spettanti al coefficiente di forma, è ovvio che nel caso di una antenna caricata con capacità terminale abbastanza grande perchè la corrente possa ritenersi praticamente costante lungo di essa, l'altezza equivalente uguaglia la effettiva; se invece è caricata alla base con induttanza tale che la distribuzione della corrente sia pressochè lineare, si avrà invece $h_e = \frac{h}{2}$; per un'antenna caricata alla base con capacità tale che la lunghezza di essa corrisponda, ad es., a $\frac{3}{8}\lambda$, il coefficiente di forma a sarebbe uguale al valore medio di sen x fra 0 e $\frac{3\pi}{4}$, cioè:

$$\frac{4}{3\pi}\int_0^{\frac{3\pi}{4}} \operatorname{sen} x \, dx \cong 0{,}72 \, .$$

Per un'antenna costituita da un filo verticale messo a terra ad un estremo e libero all'altro, se l'eccitazione è fatta, come si dice, in quarto d'onda, il diagramma della distribuzione dei valori di $\mathbf{I}$ corrisponde ad un arco di sinusoide compreso fra lo zero ed il massimo I_0, e poichè, come è noto, l'ordinata media di un tal diagramma è $\frac{2I_0}{\pi}$, possiamo asserire che il valore del coefficiente di forma è $\frac{2}{\pi}$, e pertanto si ha:

$$h_e = \frac{2}{\pi} h \, .$$

Naturalmente, trattandosi qui di antenna di dimensioni paragonabili a λ, tale altezza equivalente vale soltanto pel calcolo del campo nei punti del suolo. Con la stessa restrizione, nel caso di antenna eccitata su un'armonica della fondamentale, si hanno sempre minori valori di h_e. Ad es., per eccitazione sulla terza armonica, il diagramma di corrente assume l'aspetto di fig. 195 e manifestamente, ai fini del calcolo del campo nei punti del suolo, è come se esistesse uno solo dei due tratti BC e CD, perchè l'effetto dell'altro è annullato da quello di AB. Pertanto l'altezza equivalente si riduce ad $\frac{1}{3}$ di quella che si avrebbe nel caso di eccitazione in quarto d'onda, e quindi risulta $a = \frac{2}{3\pi} = 0{,}212$.

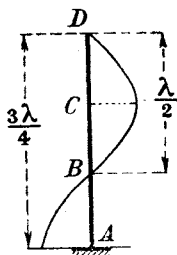



Fig. 195

7. - **Resistenza di radiazione.** — Alla espressione (10′) della potenza irradiata da un dipolo si può dare la forma tipica RI_e^2 delle potenze *uscenti*, qualora si ponga

$$R = 1577 \left(\frac{h_e}{\lambda}\right)^2 . \tag{13}$$

dove abbiamo scritto h_e in luogo di h, in quanto che la stessa posizione può ovviamente farsi nei casi in cui si può parlare di altezza equivalente.

La grandezza R così definita, che si misura evidentemente in ohm, si chiama la *resistenza di radiazione* del dipolo o dell'antenna (o in generale del sistema radiante di cui si tratta), ben inteso, con riferimento alla convenzione fatta per la scelta del valore di I.

Tale resistenza di radiazione costituisce un indice delle proprietà radiative del sistema, in quanto che, per una data corrente I, la potenza irradiata sarà tanto maggiore quanto maggiore è R.

L'espressione (13) mostra che tale resistenza R è direttamente proporzionale al quadrato del rapporto fra l'altezza equivalente dell'antenna e la lunghezza dell'onda. Se ad es., si trattasse di una frequenza di 50 Hz, cui corrisponde $\lambda = 6000$ km, per un'altezza $h_e = 150$ m, si avrebbe $R = 1\ \mu\Omega$, e pertanto la potenza irradiata, anche con una corrente rilevante, ad es. di 100 amp., sarebbe di soli 5 milliwatt. Invece, per una frequenza di 200 kHz, cui corrisponde $\lambda = 1500$ m, la resistenza R sale al valore di 16 Ω, e pertanto, con la stessa corrente di 100 amp., la potenza irradiata si eleva a 80 kW.

Questo esempio è assai istruttivo. Esso ci fa comprendere che, quando interessi fare assegnamento su grandi potenze irradiate, non potendosi, per ovvie ragioni, pensare ad altezze equivalenti superiori a certi limiti (dell'ordine di circa 200 metri), occorre necessariamente ricorrere ad elevate frequenze.

8. - Antenne chiuse o telai. — Le antenne di cui ci siamo occupati nei nn. prec. sono in generale gli organi più adatti per irradiare energia elettromagnetica; ma non sono i soli.

Invero, per qualunque conduttore si possono effettuare computi analoghi a quelli fatti pel dipolo elementare, avendo sempre presente che, siccome si opera in vicinanza della terra, occorre, in virtù del principio generale delle immagini, considerare insieme ad ogni elemento il suo simmetrico rispetto alla superficie del suolo, salvo poi ritenere, nel risultato, la sola parte che sta al di sopra del suolo stesso.

In particolare vogliamo qui esaminare l'irradiazione prodotta da un'antenna avente la forma di circuito chiuso, o *telaio*. Per semplicità, supporremo che esso sia costituito da un rettangolo di lati a (verticali) e b (orizzontali) e che la corrente in esso sia, in ogni istante, la stessa in tutti i punti. Inoltre ci limiteremo a considerare la distribuzione del campo per i punti situati nel piano orizzontale che dimezza i lati a, astraendo dalla presenza della terra [1].

È evidente che, per ognuno di tali punti, le azioni dei lati b risultano fra loro opposte, per cui tutto avviene come se vi fossero solo i lati verticali a. Anche per questi si potrebbe giungere a conclusione analoga, ma soltanto sotto la condizione che le *dimensioni del telaio siano piccole rispetto alla lunghezza d'onda*, perchè in tal caso i fattori sinusoidali $\operatorname{sen} \omega \left(t - \frac{r}{u} \right)$ che affettano le espressioni dei campi sono praticamente uguali, ed essendo opposte le correnti che percorrono i due lati, l'effetto complessivo è nullo.

Ma ciò non è più vero se la condizione predetta non è soddisfatta.

Più precisamente, considerando un punto M *situato nel piano del telaio*, sia r la sua distanza dal centro del telaio stesso; saranno così $r \pm \frac{b}{2}$ le distanze dai due lati verticali. I campi prodotti in M da tali due lati sarebbero in opposizione di fase se i due lati fossero sovrapposti, ma essendo invece essi alla distanza b l'uno dall'altro, lo sfasamento fra i due differirà da π di un angolo ε la cui misura rispetto all'angolo giro corrisponde alla misura di b in lunghezze d'onda, cioè $\varepsilon = 2\pi \frac{b}{\lambda}$. Dalla composizione di tali due campi, si ha un campo risultante (fig. 196) la cui ampiezza è $2F \operatorname{sen} \frac{\varepsilon}{2}$, che, per ε sufficientemente piccolo, equivale a $F\varepsilon = 2\pi \frac{Fb}{\lambda}$, se F è il campo prodotto da uno dei lati a.

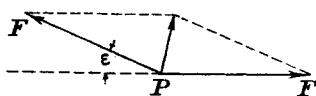



Fig. 196

[1] O, ciò che è lo stesso, ritenendo che il telaio sia costituito da due analoghi a quello descritto, uno dei quali situato sotto la terra, ed aventi in comune un lato b.

Ora, siccome nell'espressione di F compare il prodotto aI, l'ampiezza del campo risultante può intendersi dedotta da quella di F sostituendo $\frac{2\pi\, ab}{\lambda}$ ad a. Possiamo dunque concludere che il telaio si comporta come un'antenna verticale di altezza equivalente:

$$h_e = 2\pi \frac{S}{\lambda},$$

essendo S l'area del telaio (1).

Queste conclusioni sono valide finchè il punto M è nel piano del telaio. Per punti fuori di tale piano, interviene un altro fattore di riduzione, che, come a suo tempo vedremo, è precisamente uguale al coseno dell'angolo compreso fra il piano del telaio e quello che contiene il suo asse verticale ed il punto P; per modo che si realizza così una distribuzione di campo che non ha più quella simmetria assiale, che aveva invece quella del dipolo o antenna verticale unifilare. Ma tale argomento verrà approfondito in sede opportuna (Cap. XIV).

9. - Distribuzione del campo a distanza sul suolo. — Per i nostri scopi è importante avere presente la distribuzione dei valori del campo nei vari punti del piano orizzontale (suolo), per il che basta servirsi delle formole (8′), nelle quali dovremo intendere in generale che h ed I rappresentino l'altezza equivalente dell'antenna e la massima ampiezza della corrente, mentre sarà da porre sen $\theta = 1$.

Il campo F ha variazione alternativa nel tempo, e la sua ampiezza è, nel caso ordinario (aria):

$$\frac{120\pi hI}{\lambda r} \cong \frac{377 hI}{\lambda r} \quad (\mathrm{V/m}),$$

dove h, λ, r sono espressi in metri, oppure

$$0{,}377 \cdot 10^6 \frac{hI}{\lambda r} \quad (\mu\mathrm{V/m}),$$

dove h, λ, r sono espressi in km, oppure h e λ in metri, r in km.

Si vede dunque che l'intensità del campo ad una data distanza r e per ogni data lunghezza d'onda d'eccitazione è proporzionale, come già si è osservato, ad hI.

Questo prodotto, che riesce misurato in metri-ampere, dà pertanto un indice della *efficacia* del sistema radiante, intesa come attitudine a produrre una certa predeterminata intensità di campo ad una certa, pure

(1) Si potrebbe dimostrare che questa formola sussiste anche se il contorno del telaio è una curva piana qualunque.

predeterminata, distanza, e sotto una data frequenza di eccitazione. La sua calcolazione è ovviamente di importanza capitale per commisurare li sistema radiante alla *portata* (distanza), tenuto conto della intensità di campo desiderata.

Se ad es. con $\lambda = 800$ m, si vuole avere un campo di 50 μV/m alla distanza di 500 km, occorrerà che l'efficacia dell'antenna sia di

$$\frac{F\lambda r}{377} = \frac{(50 \cdot 10^{-6}) \cdot (8 \cdot 10^{2}) \cdot (5 \cdot 10^{5})}{377} \backsimeq 53 \text{ metri-amp.}$$

10. - Distribuzione del campo per un'antenna verticale qualunque. - Applicazione all'antenna verticale in mezz'onda. — Quando le dimensioni dell'antenna non sono trascurabili rispetto alla lunghezza d'onda, le formole e le deduzioni dei nn. precc. non possono più applicarsi, salvo quando, come s'è detto, ci si limiti alla considerazione di punti situati sul piano equatoriale.

Fuori di tale piano, interviene l'azione del termine correttivo (formola (11)) da cui non si può più prescindere. In generale, i vettori del campo elettrico e magnetico, in un punto P a distanza r abbastanza grande (tale che si possano ritenere r, $\vec{r}$, $\vec{s}$, $\vec{t}$ praticamente coincidenti coi valori loro spettanti al centro dell'antenna) sono ancora dati dalle stesse (5) in cui si intenda che $\mathbf{P}a\omega$ non sia definito dalla (7), ma dall'integrale:

$$\int_{-h}^{+h} \frac{e^{-j\alpha(r - z\cos\theta)}}{2jr\lambda} \mathbf{I}(z)dz .$$

A titolo di esempio, nel caso di un'antenna di lunghezza $\frac{\lambda}{2}$ percorsa da correnti in regime stazionario, se $\mathbf{I}_0$ è la corrente al centro (ventre), sarà:

$$\mathbf{I}(z) = \mathbf{I}_0 \cos \alpha z . \tag{12'}$$

Quanto al coefficiente α, non possiamo a priori asserire che esso coincida con la grandezza dianzi indicata con lo stesso simbolo, cioè con $\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$, perchè nulla ci autorizza a ritenere che la velocità di propagazione corrispondente alla distribuzione della corrente lungo la «linea» rappresentata dal filo di antenna coincida con quella con cui si propagano i fatti elettromagnetici nello spazio che lo circonda. Anzi, appunto perchè tale linea è sede di una uscita energetica, non è lecito ritenere nullo il suo parametro dissipativo, ed a ciò consegue una variazione della velocità di propagazione rispetto al valore $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ che le competerebbe in assenza di dissipazione. Non solo, ma in tali condizioni non è neppur lecito supporre che il filo possa essere sede di correnti in regime stazionario.

Tuttavia, in prima approssimazione, trascureremo queste differenze, e riterremo quindi che la distribuzione delle correnti sia caratterizzata dalla relazione (12′) dove a ha lo stesso valore indicato nei nn. prec., avvertendo che, fortunatamente, i risultati cui così si perviene sono in buon accordo con l'esperienza.

Ciò posto, tutto si riduce a sostituire, nelle formole precedentemente stabilite per il dipolo elementare, la corrente $\mathbf{I}$ con $\mathbf{I}_0$ e la lunghezza l con l'integrale

$$L = \int_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} e^{jaz\cos\theta} \cos az dz \,.$$

Questo si calcola facilmente. Invero, ponendo $u = az$, e quindi $dz = = \frac{du}{a} = \frac{\lambda}{2\pi} du$, si ha

$$= \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{ju\cos\theta} \cos udu = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(u\cos\theta) \cos udu + \frac{\lambda j}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(u\cos\theta)\cos udu =$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi} \left\{ \frac{\operatorname{sen}\left\{\frac{\pi}{2}(1-\cos\theta)\right\}}{1-\cos\theta} + \frac{\operatorname{sen}\left\{\frac{\pi}{2}(1+\cos\theta)\right\}}{1+\cos\theta} \right\} \text{(1)} \,.$$

Si potrebbe dire che questa espressione, con riferimento alla corrente ventrale $\mathbf{I}_0$, funge da altezza equivalente dell'antenna. Se non che, trattandosi di una grandezza variabile con θ, con si può attribuire a tale nozione un significato paragonabile a quello indicato nel n. 6.

A grande distanza dall'antenna, potendosi ritenere

$$1 - \frac{j}{ar} - \frac{1}{a^2 r^2} \cong 1 \,, \quad 1 - \frac{j}{ar} \cong 1 \,,$$

---

[1] L'ultimo passaggio si eseguisce sostituendo a $\cos(u\cos\theta)\cos u$ l'equivalente valore $\frac{1}{2}\cos\{(1-\cos\theta)u\} + \frac{1}{2}\cos\{(1+\cos\theta)u\}$ e ricordando che in generale è

$$\int_a^b \cos ku\,du = \left[\frac{\operatorname{sen} ku}{k}\right]_a^b \,.$$

Il secondo dei due integrali che figurano a terzo membro è poi nullo, come si può riconoscere con analoga trasformazione o, più semplicemente, osservando che la funzione integranda assume valori ordinatamente opposti nelle due parti $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ e $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ dell'intervallo di integrazione.

si ha

$$F \backsimeq \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\frac{I_0}{4\pi r\lambda}\,\mathrm{sen}\,\theta\left\{\frac{\mathrm{sen}\left\{\frac{\pi}{2}(1-\cos\theta)\right\}}{1-\cos\theta}+\frac{\mathrm{sen}\left\{\frac{\pi}{2}(1+\cos\theta)\right\}}{1+\cos\theta}\right\},$$

$$H \backsimeq \frac{I_0}{4\pi r\lambda}\,\mathrm{sen}\,\theta\left\{\frac{\mathrm{sen}\left\{\frac{\pi}{2}(1-\cos\theta)\right\}}{1-\cos\theta}+\frac{\mathrm{sen}\left\{\frac{\pi}{2}(1+\cos\theta)\right\}}{1+\cos\theta}\right\},$$

Si osservi che la dipendenza di F ed H dall'angolo θ non è in questo caso così semplice come pel dipolo elementare, a causa del fattore fra parentesi che è funzione piuttosto complicata di θ. Su tale dipendenza avremo occasione di ritornare a momento opportuno (Cap. XIV).

11. - Potenza irradiata e resistenza di radiazione per le antenne considerate nel n. prec. — Per il calcolo della potenza irradiata da un'antenna qualunque si deve, come nel caso elementare studiato al n. 4, valutare il flusso del vettore di Poynting uscente da una qualunque superficie S comprendente nel suo interno l'antenna.

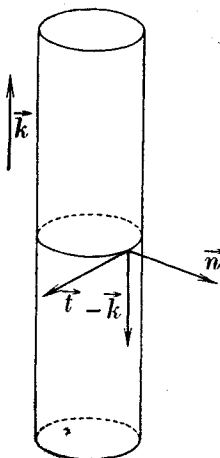



Fig. 197

Poichè tale S è arbitraria, il risultato si può presentare sotto aspetti diversissimi, pure fra loro equivalenti, scegliendo S in uno piuttosto che in altro modo.

A conclusioni particolarmente interessanti si perviene assumendo per S un cilindro circolare retto avente per asse il filo ed il cui raggio di base ϱ faremo poi tendere a zero (fig. 197). Come elemento dS assumeremo l'area $2\pi\varrho dz$ della superficie laterale di quella parte di tale cilindro che è compresa fra i piani z e $z+dz$. Moltiplicando tale area per la componente F_z di $\vec{F}$ secondo l'asse z, e per quella H_t di $\vec{H}$ secondo la tangente $\vec{t}$ al cerchio di raggio ϱ, otterremo il flusso di $\vec{R}$ attraverso dS, il quale risulterà entrante o uscente a seconda del senso assunto per $\vec{t}$. Se conveniamo di assumere questo conformemente alla regola del cavatappi rispetto al vettore unitario $\vec{k}$ — cioè rispetto al senso positivo della corrente nel filo —, la normale esterna $\vec{n}$ ad S risulta definita da

$$\vec{n} = -\vec{k}\wedge\vec{t}\,;$$

pertanto il flusso di $\vec{R}$ uscente dalla superficie S è misurato in valore e segno da

$$-\int F_z H_t 2\pi\varrho dz\,.$$

Ora, in virtù della prima equazione di Maxwell, il $\lim\limits_{\varrho \to 0} 2\pi\varrho H_t$ equivale alla corrente i fluente nell'elemento dz del filo, per cui l'espressione della potenza istantanea risulta

$$-\int F_z i dz \,. \tag{14}$$

Questa formola è particolarmente espressiva; essa invero ci presenta la potenza irradiata sotto l'ordinario aspetto di una potenza uscente. Più precisamente l'antenna, per effetto del campo elettrico prodotto dalla corrente che la percorre, diviene in ogni suo elemento dz sede di una f. e. m. misurata da $F_z dz$, equivalente ad una f. *contro* e. m. rappresentata da $-F_z dz$, ed il prodotto di tale controtensione per la corrispondente corrente i è la misura di una potenza *assorbita* dalla f. e. m. stessa e quindi *uscente* dal circuito di cui l'elemento fa parte.

Sotto questo punto di vista la nozione di resistenza di radiazione si presenta nel modo più naturale. Invero, ogni qualvolta un circuito elettrico cede energia all'esterno, viene spontaneo di pensare, in via di immagine, ad una resistenza (ohmica) capace di dar luogo ad equivalente uscita energetica, cioè a quella resistenza il cui prodotto per il valore medio del quadrato della corrente uguaglia il valor medio della potenza uscente (vedi Cap. II).

Nel caso di cui qui si tratta, non avendosi a che fare con un solo valore di corrente, la nozione stessa deve necessariamente completarsi con l'indicazione di quella, fra le infinite correnti presenti, cui intendiamo riferirci. Una tale corrente è a priori arbitraria; naturalmente però, quando esista qualche valore avente carattere speciale, la scelta si farà cadere su di esso, conformemente a quanto abbiamo già praticato al n. 6.

Dall'espressione (14) della potenza istantanea, nel caso ordinario di variazioni sinusoidali, si deduce al solito modo quella della potenza media Π in un periodo, sostituendo al prodotto delle grandezze alternative F_z ed i il semiprodotto scalare dei corrispondenti complessi riferiti ai valori massimi, che alla sua volta equivale alla parte reale del prodotto ordinario di uno dei due complessi per il coniugato dell'altro [1].

Si ha cioè

$$\Pi = -\frac{1}{2}\int \mathbf{F}_z \times \mathbf{I} \cdot dz \,,$$

oppure

$$\Pi = \Re\left(-\frac{1}{2}\int \mathbf{F}_z \mathbf{I}_1 dz\right) = \Re\left(-\frac{1}{2}\int \mathbf{F}_{z1} \mathbf{I} dz\right) \text{ [2]} \,,$$

---

[1] Infatti il prodotto scalare $(a + jb) \times (c + jd)$ coincide con la parte reale del complesso $(a + jb)(c - jd)$ oppure di $(a - jb)(c + jd)$.

[2] Col simbolo $\Re(\mathbf{A})$ si suole indicare la parte reale del numero complesso $\mathbf{A}$.

dove $\mathbf{F}_{z1}$, $\mathbf{I}_1$ rappresentano i complessi coniugati di $\mathbf{F}_z$, $\mathbf{I}$, e tutti i complessi scritti sono riferiti ai valori massimi.

Il calcolo della componente $\mathbf{F}_z$ del campo elettrico nel punto generico le cui coordinate, per chiarezza, indicheremo ora con x_1, y_1, z_1, si può effettuare molto facilmente: invero, poichè il vettore di Hertz $\vec{\mathbf{P}} = \mathbf{P}\vec{k}$ è diretto secondo l'asse z, la componente secondo z di grad div $\vec{\mathbf{P}}$ coincide con $\dfrac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial z_1^2}$, mentre l'analoga componente di $\dfrac{\partial^2 \vec{\mathbf{P}}}{\partial t^2}$ coincide ovviamente con la grandezza alternativa rappresentata dal complesso $-\omega^2\mathbf{P}$. Si ha dunque

$$\mathbf{F}_z = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial z_1^2} + \alpha^2 \mathbf{P}\right).$$

Se, con riferimento al particolare valore $\mathbf{I}_0$ della corrente di antenna, la distribuzione di questa è caratterizzata dalla funzione $f(z)$ secondo la (11), l'espressione di $\mathbf{P}$ si dedurrà dalla (4) sostituendo $\mathbf{I}_0 f(z)dz$ ad $\mathbf{I}l$ ed integrando fra $-h$ e $+h$, cioè si avrà

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{I}_0}{4\pi j\omega}\int_{-h}^{+h} \frac{f(z)e^{-j\alpha r}}{r}\,dz\,,$$

e quindi

$$\text{(15)} \qquad \mathbf{F}_z = \frac{\mathbf{I}_0}{4\pi j\omega\varepsilon}\left\{\frac{\partial^2}{\partial z_1^2}\int_{-h}^{+h} f(z)\frac{e^{-j\alpha r}}{r}\,dz + \alpha^2\int_{-h}^{+h} f(z)\frac{e^{-j\alpha r}}{r}\,dz\right\},$$

che si può scrivere anche [1]

$$\text{(15')} \qquad -\mathbf{F}_z = \frac{\mathbf{I}_0}{4\pi j\omega\varepsilon}\left\{\left[f(z)\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{e^{-j\alpha r}}{r}\right]_{-h}^{+h} + \left[f'(z)\frac{e^{-j\alpha r}}{r}\right]_{-h}^{+h} - \int_{-h}^{+h}(f'' + \alpha^2 f)\frac{e^{-j\alpha r}}{r}\,dz\right\}.$$

Prima di lasciare queste considerazioni generali (che riprenderemo in altra occasione), è istruttivo confrontare questo risultato con quello cui si perverrebbe calcolando $\vec{\mathbf{F}}$ mediante la

$$\varepsilon\vec{\mathbf{F}} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial\vec{\mathbf{U}}}{\partial t}$$

---

[1] Essendo $\dfrac{\partial r}{\partial z_1} = -\dfrac{\partial r}{\partial z}$, si ha

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\int_{-h}^{+h} f(z)\frac{e^{-j\alpha r}}{r}\,dz = \int_{-h}^{+h} f(z)\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{e^{-j\alpha r}}{r}\,dz = -\int_{-h}^{+h} f(z)\frac{\partial}{\partial z}\frac{e^{-j\alpha r}}{r}\,dz =$$

$$= \left[-f(z)\frac{e^{-j\alpha r}}{r}\right]_{-h}^{+h} + \int_{-h}^{+h} f'(z)\frac{e^{-j\alpha r}}{r}\,dz\,,$$

dove l'ultimo passaggio si giustifica con una ovvia integrazione per parti. Derivando nuovamente rispetto a z_1 e procedendo in modo analogo, si perviene alla formola del testo.

essendo φ il potenziale scalare ritardato relativo della distribuzione di cariche lungo il filo, *calcolata mediante la equazione* $\operatorname{div} \mathbf{u} + \frac{\partial \rho}{dt} = 0$, che nel caso attuale di distribuzione lineare si riduce a

$$\frac{\partial \mathbf{I}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0\,,$$

essendo σ la densità lineare di carica. Da queste si deduce facilmente

$$\sigma = -\frac{\mathbf{I}_0 f'(z)}{j\omega}\,,$$

e quindi per φ si avrebbe l'espressione:

$$\varphi = -\frac{\mathbf{I}_0}{4\pi j\omega}\int f'(z)\,\frac{e^{-j\alpha r}}{r}\,dz\,.$$

Il secondo termine dell'espressione di $\vec{\mathbf{F}}$, come agevolmente si verifica, non differirebbe dal secondo termine della (15), ma al primo termine di questa si verrebbe a sostituire

$$\frac{\mathbf{I}_0}{4\pi j\omega\varepsilon}\,\frac{\partial}{\partial z_1}\int f'(z)\,\frac{e^{-j\alpha r}}{r}\,dz\,,$$

e pertanto dalla (15′) scomparirebbe il primo termine. I due risultati dunque coincidono soltanto quando $f(z)$ è nulla agli estremi, in perfetto accordo con una osservazione fondamentale esposta in App. *C*, 8.

Ciò in particolare si verifica nel caso, che vogliamo qui studiare, di un'antenna percorsa da corrente in regime stazionario, di lunghezza $\frac{\lambda}{2}$, limitata fra due successivi nodi di corrente.

Come al n. prec., riterremo che $\frac{2\pi}{\lambda}$ coincida con $\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$, cioè che la velocità di propagazione lungo l'antenna coincida con $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$.

L'espressione di $\mathbf{F}_z$ si semplifica notevolmente, in quanto che, assunta per $\mathbf{I}_0$ la corrente (ventrale) al centro dell'antenna, nella formola (15) sarà da porre:

$$h = \frac{\lambda}{4}\,, \qquad f(z) = \cos \alpha z\,,$$

e poichè con tali valori si ha:

$$f(h) = f(-h) = 0\,,\ f'' + \alpha^2 f = 0\,,\ f'(z) = -\alpha \operatorname{sen} z\,,\ f'(h) = -f'(-h) = \alpha,$$

la (15′) si riduce a

$$-\mathbf{F}_z = \frac{j\mathbf{I}_0\alpha}{4\pi\omega\varepsilon}\left(\frac{e^{-j\alpha r_1}}{r_1} + \frac{e^{-j\alpha r_2}}{r_2}\right) = \frac{\mathbf{I}_0\alpha}{4\pi\omega\varepsilon}\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha r_1}{r_1} + \frac{\operatorname{sen}\alpha r_2}{r_2} + j\,\frac{\cos\alpha r_1}{r_1} + j\,\frac{\cos\alpha r}{r_2}\right.$$

avendo indicato con

$$(16) \qquad r_1 = \sqrt{\varrho^2 + (z_1 - h)^2}\,, \qquad r_2 = \sqrt{\varrho^2 + (z_1 + h)^2}$$

le distanze del punto generico M in cui è calcolata $\mathbf{F}_z$ dagli estremi A, B (valori $+h$ e $-h$ di z) dell'antenna (figura 198).

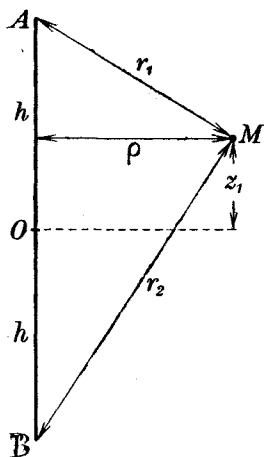



Fig. 198

Per calcolare la potenza irradiata Π, basterà moltiplicare la precedente per il complesso coniugato di $\mathbf{I}_0$ e per $f(z_1)dz_1$ ed integrare rispetto a z_1 da $-h$ a $+h$, conservando del risultato la sola parte reale, e passare poi al limite per $\varrho \to 0$.

Sostituendo ad $\dfrac{a}{4\pi\omega\varepsilon}$ il suo valore numerico che nel caso dell'aria è circa 30 (ohm) (¹), dobbiamo dunque calcolare il $\lim\limits_{\varrho \to 0}$ di

$$15 I_0^2 \left\{ 2 \int_{-h}^{+h} \frac{\operatorname{sen} a r_1 \cos a z_1}{r_1} dz_1 + 2 \int_{-h}^{+h} \frac{\operatorname{sen} a r_2 \cos a z_1}{r_2} dz \right.$$

cioè di (²)

$$30 I_0^2 \left\{ 2\operatorname{Ci}(a\varrho) - \operatorname{Ci}(a\sqrt{\varrho^2 + 4h^2} + 2ah) - \operatorname{Ci}(a\sqrt{\varrho^2 + 4h^2} - 2ah) \right\}$$

(¹) Esattamente 29,98.

(²) Innanzi tutto si osservi che i valori dei due integrali fra parentesi coincidono. Per convincersene basta assumere, in uno di essi, come variabile $-z_1$ in luogo di z_1, il che porta di conseguenza soltanto lo scambio di r_1 con r_2, in quanto che al mutamento di segno dovuto alla sostituzione di $-dz_1$ a dz_1 si oppone quello dovuto all'inversione dei limiti. Basterà dunque calcolare uno dei due integrali e raddoppiare il risultato.

Scrivendo $\operatorname{sen} a(r_1 + z_1) + \operatorname{sen} a(r_1 - z_1)$ in luogo di $2 \operatorname{sen} a r_1 \cos a z_1$ ed osservando che, per essere $ah = \dfrac{\pi}{2}$, si ha

$$\operatorname{sen} a(r_1 + z_1) = \cos a(r_1 + z_1 - h)\,, \quad \operatorname{sen} a(r_1 - z_1) = -\cos a(r_1 - z_1 + h)\,,$$

si vede che il primo dei due integrali vale:

$$\int_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} \frac{\cos a(r_1 + z_1 - h)}{r_1} dz_1 - \int_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} \frac{\cos a(r_1 - z_1 + h)}{r_1} dz_1\,,$$

o, moltiplicando e dividendo per a:

$$\int \frac{\cos a(r_1 + z_1 - h)}{a r_1} d(az_1) - \int \frac{\cos a(r_1 - z_1 + h)}{r_1} d(az_1)\,.$$

Ora, dalla prima delle (16), differenziando i due membri rispetto a z_1, si ha $r_1 dr_1 = (z_1 - h)dz_1$, cioè

$$\frac{d(az_1)}{ar_1} = \frac{d(ar_1)}{a(z_1 - h)}\,,$$

Sostituendo ad ogni $\mathrm{Ci}(x)$ il suo valore (App., *A*, 4)

$$C + \log x - \int_0^x \frac{1-\cos x}{x}\, dx$$

con $C = 0{,}577\ldots$, ed osservando che è:

$$\log \frac{\varrho^2}{(\sqrt{\varrho^2+4h^2}-2h)(\sqrt{\varrho^2+4h^2}+2h)} = 0\,,$$

$$\lim_{\varrho\to 0} a(\sqrt{\varrho^2+4h^2}-2h) = 0\,, \qquad \lim_{\varrho\to 0} a(\sqrt{\varrho^2+4h^2}+2h) = 4ah = 2\pi\,,$$

l'espressione precedente si riduce a

$$30I_0^2 \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos x}{x}\, dx = 30I_0^2(C + \log 2\pi - \mathrm{Ci}(2\pi)) = 73{,}2I_0^2\,.$$

In essa si legge che la resistenza di radiazione dell'antenna considerata vale 73,2 ohm. Per un'antenna analoga costituita da un filo di lunghezza $\frac{\lambda}{4}$, libero ad un estremo e connesso a terra all'altro, l'espressione della potenza irradiata nel semispazio occupato dall'aria risulterebbe la metà della precedente, a parità di corrente al ventre (terra), quindi la resistenza di radiazione dell'antenna in quarto d'onda vale 36,6 ohm.

Se si fosse applicata la formula (13), con $h_e = \frac{2}{\pi}h$, $h = \frac{\lambda}{4}$, si sarebbe

---

dalla quale, componendo e dividendo, segue:

$$\frac{d(az_1)}{ar_1} = \frac{da(r_1+z_1)}{a(r_1+z_1-h)} = -\frac{da(r_1-z_1)}{r_1-z_1+h} \text{ ed anche } = \frac{da(r_1+z_1-h)}{a(r_1+z_1-h)} = -\frac{da(r_1-z_1+h)}{a(r_1-z_1+h)}$$

Sostituendo nella precedente, questa si trasforma in

$$\int \frac{\cos u_1}{u_1}\, du_1 + \int \frac{\cos u_2}{u_2}\, du_2$$

dove, avendo posto

$$u_1 = a(r_1 + z_1 - h)\,, \quad u_2 = a(r_1 - z_1 + h)\,,$$

gli integrali scritti dovranno estendersi agli intervalli definiti dai valori che u_1, rispettivamente u_2 assumono per $z_1 = -h$ e $z_1 = h$, cioè

$$(u_1)_{z_1=-h} = a(\sqrt{\varrho^2+4h^2}-2h)\,, \qquad (u_1)_{z_1=+h} = a\varrho \qquad \text{per il primo}$$

$$(u_2)_{z_1=-h} = a(\sqrt{\varrho^2+4h^2}+2h)\,, \qquad (u_2)_{z_1=+h} = a\varrho \qquad \text{per il secondo.}$$

Ricordando la definizione della funzione $\mathrm{Ci}(x)$ (App., *A*, 4), il risultato dell'integrazione si scrive dunque:

$$2\mathrm{Ci}(a\varrho) - \mathrm{Ci}(a\sqrt{\varrho^2+4h^2}+2ah) - \mathrm{Ci}(a\sqrt{\varrho^2+4h^2}-2ah)$$

corrispondente alla formola del testo.

trovato 40 ohm. La differenza rispetto al vero valore non è notevole, come si poteva intuitivamente prevedere pensando che gli elementi di antenna maggiormente influenti sulla riduzione del campo sono i più prossimi all'estremo libero. Per questi infatti il termine correttivo ha i maggiori valori e quindi i corrispondenti contributi al campo risultano maggiormente sfasati rispetto a quelli dovuti agli elementi prossimi al ventre di corrente; ma i contributi stessi hanno rispetto a questi ultimi grandezze relative assai modeste data la lenta variazione del coseno in prossimità del suo massimo e la rapida variazione in vicinanza dello zero. Si deve inoltre tener presente che la correzione stessa varia con l'angolo θ e, per ragione analoga alla precedente, si ha che nel computo totale influiscono molto più gli addendi per i quali $\cos\theta$ ha valori prossimi a zero che non quelli per i quali $\cos\theta$ è vicino al suo massimo, in quanto i primi (campo in direzioni poco inclinate sull'orizzontale) hanno valori ben maggiori dei secondi.

12. - Antenna qualunque in presenza della terra. — Esaminiamo ora il caso di una antenna qualunque in presenza del suolo, che per semplicità supporremo infinitamente conduttivo.

In virtù del principio delle immagini (App., *C*, 9), si può sempre prescindere dal suolo stesso, purchè insieme all'antenna reale si pensi esistere anche la sua immagine e si consideri il campo prodotto dalle due.

Se, in primo luogo, si tratta di un dipolo elementare *AB* verticale a distanza h dal suolo, non avremo da fare altro che ripetere i calcoli del n. 3, con la sola variante che a comporre il vettore $\vec{\mathbf{P}}$ entreranno due termini, l'uno dipendente dal dipolo *AB*, l'altro dalla sua immagine *A'B'* il cui centro *O'* dista dal centro *O* di *AB*. Per il calcolo del campo a grande distanza, potremo attribuire un medesimo valore agli r che compaiono al denominatore dell'espressione di **P** — ben inteso quando sia $r \gg h$ —, mentre dovremo in generale distinguere i due valori di r nel computo dell'esponenziale e^{-jar}. Intendendo che r rappresenti la distanza del punto in cui si calcola il campo dal piede *O* del dipolo, dovremo, nei fattori e^{-jar}, porre $r - h\cos\theta$, $r + h\cos\theta$ al posto di r.

Pertanto le formole (5) si modificano soltanto in ciò, che l'espressione del campo nel punto generico risulta moltiplicata per

$$e^{-jah\cos\theta} + e^{jah\cos\theta},$$

cioè per $2\cos(ah\cos\theta)$. È appena necessario osservare che, per h tendente a zero, il campo così calcolato risulta di valore doppio di quello pertinente ad un *unico* dipolo centrato in *O*, in quanto che il procedimento indicato conduce, per $h \to 0$, a considerare *due* (non *uno*) dipoli elementari uguali al dato, e praticamente sovrapposti.

Le espressioni della potenza irradiata e della resistenza di radiazione si modificheranno, in conseguenza della variazione accennata, nel senso che al posto dell'integrale $\int_0^\pi \operatorname{sen}^3\theta\, d\theta$ si avrà da considerare l'altro

$$4\int_0^\pi \operatorname{sen}^3\theta \cos^2(ah\cos\theta)\, d\theta = 2\int_0^\pi \operatorname{sen}^3\theta\,[1+\cos(2ah\cos\theta)]\, d\theta\,,$$

il cui valore è

$$\frac{8}{3}\left(1+3\,\frac{\operatorname{sen} 2ah - 2ah\cos 2ah}{(2ah)^3}\right)\ ^{(1)}.$$

Per $h \to 0$ (doppio dipolo centrato in O), il numero fra parentesi tende a 2 (2), per cui il rapporto $\frac{\Pi}{\Pi_0}$ fra la potenza irradiata, nel semispazio occupato dall'aria, dal dipolo AB distante h dal suolo e quella che nello stesso semispazio verrebbe irradiata per $h = 0$ vale

$$\frac{\Pi}{\Pi_0} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\,\frac{\operatorname{sen} 2ah - 2ah\cos 2ah}{(2ah)^3}\,,$$

ed uguale valore spetta, naturalmente, al rapporto fra le corrispondenti resistenze di radiazione.

Facendo crescere h a partire da zero, il secondo termine di questa espressione s'annulla per la prima volta per $2ah = 4\pi\frac{h}{\lambda} \backsimeq 4{,}5$ cioè per $h = 0{,}36\,\lambda$, dopo di che il suo valore, per la presenza al denominatore della terza potenza di $2ah$, tende rapidamente a zero col crescere di h, talchè, per distanze superiori a circa $\frac{\lambda}{2}$, si può ritenere che il compor-

---

(1) Posto

$$\cos\theta = u \quad \text{e quindi} \quad \operatorname{sen}\theta = (1-u^2)^{\frac{1}{2}}, \quad d\theta = -(1-u^2)^{\frac{1}{2}}\, du\,,$$

si ha

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}^3\theta\cos(2ah\cos\theta)\, d\theta = \int_1^{-1}(u^2-1)\cos ku\, du$$

avendo posto per brevità $k = 2ah$. Integrando due volte per parti, si ha poi

$$\int u^2\cos ku\, du = \frac{u^2\operatorname{sen} ku}{k} - \frac{2}{k}\int u\operatorname{sen} ku\, du = u^2\,\frac{\operatorname{sen} ku}{k} + 2u\,\frac{\cos ku}{k^2} - 2\,\frac{\operatorname{sen} ku}{k^3} + \text{cost.}$$

quindi

$$\int_1^{-1}(u^2-1)\cos ku\, du = \frac{4(\operatorname{sen} k - k\operatorname{sen} k)}{k^3}\,,$$

da cui segue immediatamente la formola del testo.

(2) Per rendersi conto di ciò, basta applicare la regola di L'Hôpital, oppure, più rapidamente, sostituire a sen e cos i primi due termini dei loro sviluppi in serie.

tamento energetico non differisca da quello di un dipolo isolato nello spazio.

Occorre però non dimenticare che tali conclusioni sono subordinate a ciò, che si possa considerare il suolo come perfettamente riflettente (conduttività infinita), il che, come vedremo, è lecito soltanto per le frequenze più basse (onde lunghe).

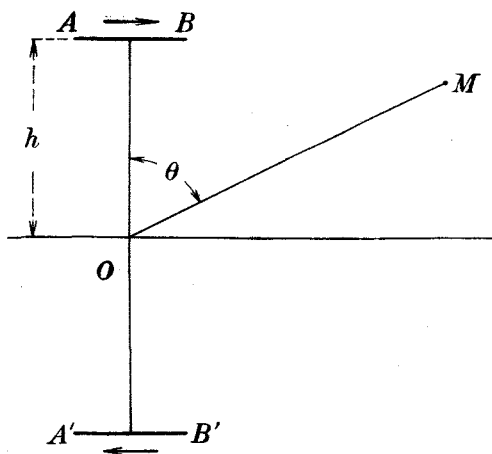



Fig. 199

In secondo luogo consideriamo un dipolo disposto orizzontalmente a distanza h dal suolo. Al solito, dovremo associare ad esso la sua immagine ed eseguire i computi relativamente al sistema di due dipoli così costituito. Tenendo conto del senso della corrente nell'immagine (fig. 199), si vede subito che, quando h è abbastanza piccolo rispetto alla lunghezza d'onda, il campo ha valore sensibilmente nullo. Invero, per punti a grande distanza dal sistema di cui si tratta, il campo dovuto ad *un* dipolo orizzontale posto sul suolo sarà da calcolarsi con la solita formula (5), in cui θ sia sostituito con $\frac{\pi}{2} - \theta$, essendo θ l'angolo di OM con la verticale, perchè l'angolo di OM con la direzione del dipolo vale appunto $\frac{\pi}{2} - \theta$.

Per il sistema costituito dal dipolo AB e dalla sua immagine $A'B'$, per la solita ragione, si dovrà moltiplicare ulteriormente l'espressione del campo per

$$e^{-j\alpha h \cos\theta} - e^{j\alpha h \cos\theta},$$

cioè per $-2j$ sen $(\alpha h \cos\theta)$, il quale fattore è sensibilmente nullo per αh molto piccolo, cioè per $h \ll \lambda$, come si era asserito.

Per $\theta = \frac{\pi}{2}$ poi, il fattore stesso è rigorosamente nullo con qualunque h; si ha cioè che un dipolo orizzontale in presenza di un suolo perfettamente riflettente non produce campo alcuno alla superficie del suolo stesso.

Lo studio del campo dovuto ad un'antenna comunque foggiata e comunque disposta rispetto al suolo può sempre farsi dipendere da quello relativo ai casi elementari sopra esaminati. Basta all'uopo pensare che,

in conseguenza della linearità delle espressioni generali rispetto ai momenti elementari $\vec{p}d\tau$, ad ognuno dei vettori corrispondenti ai dipoli elementari in cui può pensarsi decomposta un'antenna può sempre sostituirsi un insieme di vettori di cui quello sia la somma geometrica. In particolare, con riferimento ad un sistema ortogonale cartesiano x, y, z, ad un dipolo come AB (fig. 200) percorso da corrente **I**, si possono sostituire i tre dipoli AB_x, AB_y, AB_z di lunghezze uguali alle proiezioni di AB secondo x, y, z, e percorsi ciascuno dalla medesima corrente **I** di cui è sede AB. Da ciò consegue che un'antenna di forma qualunque può, ai fini della valutazione del campo, sostituirsi con l'insieme delle sue tre « proiezioni » sugli assi coordinati. Per proiezione sull'asse z si intenderà un filo parallelo all'asse z di cui ogni elemento dz è sede di una corrente uguale a quella che nell'antenna effettiva è localizzata nell'elemento ds che si proietta in dz. In altri termini, se

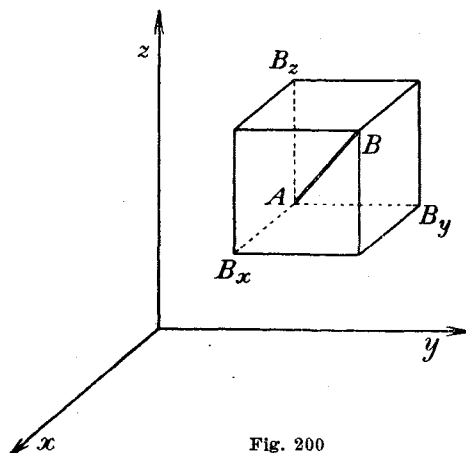



Fig. 200

$$x = x(t)\,, \qquad y = y(t)\,, \qquad z = z(t)$$

sono le equazioni parametriche del filo costituente l'antenna effettiva, il cui sviluppo sarà limitato fra due certi valori t_0 e t_1 del parametro t, ed $f(t)$ è la funzione che caratterizza la distribuzione della corrente su di essa, per proiezione dell'antenna sull'asse z intendiamo il segmento parallelo all'asse z compreso fra i valori $z(t_0)$ e $z(t_1)$ dell'ordinata, sul quale pensiamo distribuita una corrente secondo la funzione $F(z)$ definita da ciò, che ponendo in essa $z(t)$ al posto di z, risulti identicamente

$$F(z) = f(t)\,.$$

Ridotta così l'antenna reale ad un insieme di antenne rettilinee, per ogni elemento di queste si applicheranno le norme indicate nei casi elementari dianzi esaminati, e si otterrà così in ogni caso, sotto forma di integrali (in generale piuttosto complicati) l'espressione spettante al campo dovuto ad un'antenna qualunque disposta comunque rispetto al suolo.

In particolare, sempre nell'ipotesi di terra perfettamente conduttrice, si osserverà che al campo prodotto sui punti del suolo da un'antenna di forma qualunque non recano contributo alcuno gli eventuali tratti orizzontali che entrano a comporla. Ed altrettanto avviene anche per

punti situati comunque nello spazio, qualora le dimensioni dell'antenna siano piccole rispetto alla lunghezza d'onda.

L'ipotesi che il suolo sia perfettamente conduttore non può essere accolta senza riserve, specialmente per le più elevate frequenze della gamma radiotelegrafica (onde corte); tuttavia, siccome la terra partecipa ad un tempo delle proprietà dielettriche e delle conduttrici, i precedenti risultati possono ancora ritenersi praticamente accettabili, almeno entro i (necessariamente larghi) limiti d'approssimazione concessi in tal genere di questioni.

13. - D. d. p. alla ricezione. - Le radiocomunicazioni. — Supponiamo di porre in un punto M situato nel campo elettromagnetico generato ad es. da un'antenna verticale A, un'altra antenna A' pure verticale, di lunghezza l. Questa verrà ad occupare il posto di una delle linee di forza del campo elettrico generato dalla prima, e pertanto ai capi di ogni suo elemento dl si avrà una d. d. p. uguale ad Fdl. Se supponiamo che l'antenna A' sia sufficientemente distante dalla A, il campo F non avrà variazione sensibile lungo di essa, e pertanto possiamo concludere che in A' è presente una f. e. m. alternativa sinusoidale, avente la stessa pulsazione ω del campo, e la cui ampiezza è data in volt da $E = Fl$ se F è espresso in V/m, ed l in m.

È interessante notare che allo stesso risultato si perviene considerando invece la f. e. m. indotta in A' per effetto del *taglio* delle linee magnetiche. Invero il flusso tagliato dall'antenna A' nell'unità di tempo corrisponde al prodotto di $B = \mu H$ per l'altezza di A' e per la velocità u di propagazione. Avendo presente la relazione (8) fra F ed H e ponendo per ε e μ i loro valori, si trova ancora $E = Fl$ [1].

È appena necessario notare che agli stessi risultati cui sopra siamo pervenuti si arriverebbe pure qualora, invece di un'antenna verticale, si avesse un telaio od altro qualunque sistema di pari altezza equivalente.

Se l'antenna A' fa parte di un circuito, si avrà in questo una corrente $\frac{E}{Z}$, dove Z indica la impedenza complessiva del circuito stesso, nel computare la quale si deve anche tener conto della resistenza di radiazione, in quanto che l'antenna A', divenendo sede di corrente, irradia essa pure.

---

(1) Potrebbe a prima vista sembrare che la f. e. m. presente in A' dovesse essere $2E$ anzichè E. Ma ciò non è, perchè il campo magnetico ed il campo elettrico non sono che una diversa forma di manifestazione di un unico fenomeno, il campo elettromagnetico. In generale, tutte le volte che un conduttore è immerso in un campo elettrico variabile, si può sempre intendere che la d. d. p. nascente ai suoi capi sia dovuta o alla tensione pertinente al campo elettrico oppure all'effetto induttivo provocato dal *taglio* delle linee magnetiche che inevitabilmente accompagnano il campo elettrico variabile (n. 1).

L'energia assorbita da A' è sostanzialmente fornita da A. Pertanto, in ultima analisi, si è così realizzato un *trasporto* di energia da A ad A'. Il tramite attraverso il quale tale trasporto si effettua è il campo elettromagnetico, talchè il sistema A, A' si può in certo modo assimilare ad un trasformatore.

È però da notare che, siccome la distanza fra A e A' è sempre piuttosto rilevante, un tale sistema di trasferimento energetico presenta un *rendimento* enormemente basso, in quanto che è piccolissimo il rapporto fra l'energia raccolta in A' e quella emessa da A.

Ma quello che vi è di essenziale e che rende tale processo prezioso e decisivo per realizzare una radiocomunicazione è il fatto che la *forma* dell'impulso col quale è stato eccitato il sistema *trasmittente* A, si ritrova inalterata nel sistema *ricevente* A'. A rigore, ciò è stato da noi riscontrato per un impulso sinusoidale; ma per altro, siccome le relazioni generali dell'elettromagnetismo hanno carattere lineare, per esse vale il principio della sovrapposizione degli effetti, dal che si deduce che, anche quando l'impulso eccitatore contiene contemporaneamente componenti sinusoidali di diverse frequenze, la conservazione della forma è sempre assicurata *per ognuna delle componenti.* Non devesi però dimenticare che le ampiezze corrispondenti alle varie frequenze subiscono alterazioni diverse e quindi, in generale, la forma dell'impulso complesso non riesce conservata, se non quando esso risulti da un insieme di frequenze poco dissimili fra loro o, come si dice, se la *banda di frequenze* interessata ha una larghezza convenientemente piccola rispetto alla sua frequenza media.

Queste osservazioni consentono di delineare nei suoi tratti essenziali il procedimento col quale si realizza una comunicazione per via radio fra due stazioni. La trasmittente dovrà eccitare un'antenna con correnti di forma determinata, aventi però il carattere essenziale di variabilità ad alta frequenza; potrà trattarsi, ad es., di una corrente alternata d'alta frequenza e di ampiezza costante, periodicamente interrotta secondo un ritmo convenuto (per es. quello dei segnali Morse) oppure anche di ampiezza che viene fatta variare secondo una legge determinata (per es. con ritmo avente frequenza acustica) [1]. A tale eccitazione consegue la propagazione nello spazio di un sistema di onde elettromagnetiche, nel percorso delle quali viene a trovarsi l'antenna che all'uopo è stata predisposta nel luogo ricevente. Pertanto, un circuito facente capo a questa, si troverà alimentato con d. d. p. le quali, pur avendo valori estremamente piccoli, tuttavia riproducono la forma di quelle inviate dal posto trasmittente.

In generale, l'antenna ricevente non sarà in condizioni di captare

---

[1] Come vedremo a suo tempo, ciò corrisponde ad utilizzare un insieme di frequenze costituenti una banda soddisfacente alle condizioni indicate nel prec. capoverso.

quantità apprezzabili di energia, e conseguentemente di tali d. d. p. occorrerà valersi unicamente per comandare acconci sistemi locali atti ad esaltare, senza deformarli, gli impulsi raccolti ed a consentire la riproduzione, in *scala* opportuna, dei ritmi usati dal posto trasmittente, onde tradurli poi in segnali avvertibili in qualche modo dai sensi dell'operatore ricevente.

Si comprende pertanto che la realizzazione di una trasmissione di tale tipo esige che si disponga, alla trasmissione, di organi atti alla creazione di correnti alternate di elevate frequenze, e di altri atti a disciplinare il ritmo della emissione, che andrà ad effettuarsi con potenze relativamente grandi a mezzo di un'antenna trasmittente. Alla ricezione poi dovranno predisporsi innanzi tutto organi atti a captare l'onda e. m. e a divenire sede di tensioni riproducenti i segnali trasmessi, e successivamente altri destinati a «riprodurre» in scala maggiore le tensioni predette, onde farle agire in circuiti capaci di erogare potenze apprezzabili; ed infine di apparecchiature, dette di rivelazione, il cui ufficio è quello di rendere sensibili all'operatore i ritmi caratterizzanti i segnali emessi.

Pertanto nei capitoli successivi andremo ad occuparci ordinatamente e singolarmente di tutti questi problemi e delle realizzazioni effettive degli apparecchi atti a risolverli, dopo di che passeremo allo studio della connessione organica di essi per la concreta costituzione di una stazione trasmittente e di una stazione ricevente.

14. - Propagazione in un gas ionizzato. — Il fenomeno della propagazione delle onde elettromagnetiche non si verifica nel modo così semplice che è stato delineato nei nn. 1 a 5, in quanto che, per stabilire le leggi ivi enunciate, siamo partiti da due ipotesi semplificative che in pratica non sono esattamente soddisfatte, e cioè che il mezzo (aria) sia un dielettrico perfetto e che la terra sia un piano geometrico di conducibilità infinita.

Purtroppo, non appena si tenta di scostarsi dalle condizioni teoriche ideali, si urta contro difficoltà assai gravi, sia di ordine matematico, sia dipendenti dalla incertezza con cui sono conosciuti gli svariati parametri a cui può riferirsi la determinazione delle condizioni in cui si svolge la propagazione.

Tuttavia, per rendersi conto, almeno in via qualitativa, dei fatti fondamentali accertati dall'esperienza e tentare di coordinarli, sia pure in modo grossolano e necessariamente imperfetto, è d'uopo esaminare con qualche dettaglio il comportamento di un campo elettromagnetico in un mezzo dotato di proprietà particolari, il che può farsi mediante lo studio delle equazioni di Maxwell (App., *C*), ogni qualvolta si possano tradurre in formole matematiche le peculiari proprietà del mezzo stesso.

Cominceremo con l'esaminare il comportamento di un'onda elettromagnetica quando l'ambiente che ne è sede, anzichè essere un dielettrico perfetto elettricamente neutro, sia costituito da quel che si chiama un *gas ionizzato*. Con questo nome si intende un mezzo, che, come quello costituente gli altissimi strati dell'atmosfera, è sede ad un tempo di corpuscoli neutri (molecole) e di ioni (positivi e negativi, questi ultimi eventualmente elettroni liberi). Se, per chiarezza di esposizione, supponiamo che in esso esistano ioni di una sola specie, per es. elettroni [1], caratterizzeremo lo stato di tale mezzo mediante la sua *densità ionica*, cioè mediante il numero N di ioni contenuti nell'unità di volume. Se e è la carica di ogni singolo ione, la densità cubica ϱ di carica elettrica vale $\varrho = Ne$, e se il sistema di ioni è in movimento con velocità media $\vec{v}$, sarà $\varrho\vec{v}$ la densità superficiale $\vec{u}$ della corrente *equivalente*, cioè

$$\vec{u} = \varrho\vec{v} = Ne\vec{v}\,, \tag{17}$$

od anche

$$\vec{u} = e\Sigma\vec{v}_i\,,$$

essendo $\vec{v}_i$ la velocità di ogni singolo ione e la somma comprendendo tanti termini quant'è il numero di ioni interessati.

Le precedenti uguaglianze si giustificano agevolmente: se consideriamo una superficie di area unitaria normale alla velocità media $\vec{v}$, la intensità della corrente che la attraversa si rappresenta sia col modulo di $\vec{u}$, sia con la carica complessiva contenuta in un prisma avente quella superficie per base e altezza corrispondente al modulo di $\vec{v}$; ora, poichè il volume di tale prisma è misurato da questo stesso modulo, la carica in esso contenuta si otterrà moltiplicando tale modulo per N e per l'importo e della carica di ciascun ione.

Il numero N è in generale mediamente costante in determinate condizioni fisiche (temperatura, pressione, ecc.) ed è sempre notevolmente inferiore al numero totale dei corpuscoli (ioni e molecole neutre) presenti nella unità di volume (per es. all'altezza di 100 km dal suolo tali numeri sono dell'ordine di 10^{11} e $10^{18}/\mathrm{m}^3$ rispettivamente); quanto alle velocità $\vec{v}$, esse, in assenza di cause orientatrici, quali ad es. possono essere fornite da un campo elettrico, hanno valori svariatissimi, ma poichè ogni valore si ritrova in generale praticamente in tutte le direzioni, si può ritenere nulla la somma vettoriale $\Sigma\vec{v}_i$, e quindi la velocità (vettoriale) media $\vec{v}$.

---

[1] In effetto, ne esisteranno almeno di due tipi, ad es. ioni positivi ed elettroni, ed i moti incessanti di cui essi sono animati fanno sì che continuamente avvengono delle ricombinazioni e delle dissociazioni ioniche. Quando, come qui, si allude ad una densità ionica costante nel tempo, si suppone implicitamente che siano soddisfatte condizioni tali per cui il numero delle prime sia mediamente (nel tempo) uguale a quello delle seconde.

Non così avviene però quando il mezzo sia sede di un campo elettrico [1]. Gli ioni vengono allora sollecitati a muoversi, ed in tali movimenti essi incontrano altri corpuscoli, ioni o molecole neutre, queste ultime con una frequenza che per lo più è incomparabilmente maggiore che per quelli, e quindi i loro *percorsi liberi* vengono limitati da questi incontri o *urti*, per effetto dei quali essi perdono gran parte della velocità acquisita per effetto della supposta causa esterna. In conseguenza di ciò, la velocità media degli ioni non sarà più nulla, ma anzi assumerà un valore legato alla intensità del campo elettrico, semprechè, ben inteso, le variazioni di questo non siano troppo rapide; più specificatamente, riferendoci ad un regime sinusoidale del campo elettrico, occorrerà che il periodo di questo sia minore della durata del libero percorso degli ioni [2]. Oltre a ciò avviene che gli urti di cui sopra costituiscono una causa di dissipazione energetica.

In regime sinusoidale, il complesso di questi fatti mette in giuoco, come ora vedremo, un elemento avente i caratteri di una corrente di spostamento negativa ed un altro assimilabile ad una corrente di conduzione. Più precisamente si tratta di questo, che i movimenti orientati degli ioni si verificano in quadratura ritardo rispetto al campo orientatore, laddove le ordinarie correnti di spostamento sono invece in quadratura anticipo; e l'assorbimento energetico dovuto agli urti, globalmente considerati, equivale formalmente a quello che si avrebbe per effetto Joule, qualora il mezzo, insieme al carattere dielettrico, presentasse anche quello di un conduttore, cioè avesse una conduttività γ diversa da zero [3].

Del primo fatto possiamo elementarmente renderci conto pensando che, durante il percorso libero, il movimento dello ione medio è retto dalla equazione (seconda legge della Dinamica)

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{F}, \tag{18}$$

---

[1] Successivamente accenneremo anche a quel che avviene per effetto di un campo magnetico.

[2] Un'idea di tali durate si può avere pensando che a 0 °C il libero percorso di una molecola si valuta dell'ordine di 10^{-7} m alla pressione atmosferica, e varia in modo inversamente proporzionale alla pressione; così, all'altezza di 100 km, detto libero percorso può valutarsi intorno al cm. La velocità delle agitazioni molecolari essendo dell'ordine del km/sec, la durata risulta dell'ordine di 10^{-5} sec. Per gli elettroni, in ragione della minor massa rispetto a quella delle molecole, la durata stessa risulta notevolmente ($50 \div 100$ volte) minore.

[3] Questa rappresentazione è del tutto analoga a quella che si potrebbe fare qualora si attribuisse, in via di immagine, il carattere di effetto Joule al calore che si svolge sull'anodo di un tubo elettronico per il bombardamento degli elettroni provenienti dal catodo. Il fenomeno è essenzialmente diverso, ma le leggi quantitative che lo reggono sono identiche a quelle che si avrebbero pensando ad un vero e proprio effetto Joule, dopo aver sostituito il flusso elettronico libero con una corrente conduttiva attraverso una conveniente resistenza.

essendo m la massa dello ione, $\vec{v}$ la sua velocità, $\vec{F}$ il campo elettrico e quindi $e\vec{F}$ la forza agente sullo ione.

Dalla precedente, derivando rispetto al tempo, si ricava

$$\frac{d^2\vec{v}}{dt^2} = \frac{e}{m}\frac{d\vec{F}}{dt}. \tag{19}$$

La densità della corrente ionica è misurata da $Ne\vec{v}$; d'altra parte, in regime sinusoidale di pulsazione ω, $\vec{v}$ è in opposizione rispetto a $\frac{d^2\vec{v}}{dt^2}$ cioè rispetto ad $\frac{e}{m}\frac{d\vec{F}}{dt}$, e la relativa ampiezza si ottiene dividendo per ω^2 quella di $\frac{d^2\vec{v}}{dt^2}$, quindi la corrente ionica può rappresentarsi con

$$-\frac{Ne^2}{m\omega^2}\frac{d\vec{F}}{dt}.$$

Come si vede, essa coincide con una corrente di spostamento negativa; o, ciò che è lo stesso, si può, per tener conto del fenomeno esaminato, trattare il mezzo come se la sua costante dielettrica fosse

$$\varepsilon - \frac{Ne^2}{m\omega^2},$$

essendo ε il valore che ad essa compete in assenza del campo.

Per quanto riguarda l'effetto degli urti, si pensi che l'energia perduta dallo ione nell'urto vale $\frac{mv^2}{2}$, e che, in regime sinusoidale, l'ampiezza v della velocità è legata a quella F del campo dalla relazione

$$v = \frac{eF}{m\omega}$$

che si deduce integrando rispetto al tempo la (18). La dissipazione per ogni urto vale dunque

$$\frac{e^2F^2}{2m\omega^2}.$$

Se con f indichiamo il numero di urti che per ogni unità di tempo subisce mediamente un ione, nell'unità di volume si verificheranno Nf urti per ogni unità di tempo, per cui la potenza dissipata per ogni unità di volume vale

$$\frac{Nfe^2}{m\omega^2}\cdot\frac{F^2}{2}$$

Confrontando con la (10) di App. C, ed osservando che $\frac{F^2}{2}$ è il valore medio (nel tempo) del quadrato dell'intensità del campo, si deduce che

il fenomeno in discorso può energeticamente considerarsi come dovuto all'essere la conduttività del mezzo diversa da zero, e precisamente misurata da

$$\frac{Nfe^2}{m\omega^2}.$$

In realtà, la presenza contemporanea dei due fatti considerati fa sì che ciascuno influenza l'altro, talchè alle precedenti espressioni occorre apportare una correzione, e si dimostra che questa consiste semplicemente nella sostituzione di $\omega^2 + f^2$ ad ω^2 (1).

Più precisamente, quelle che potremo chiamare permittività ε' e conduttività γ' *apparenti* del gas ionizzato sono date dalle relazioni

$$(20) \qquad \varepsilon' = \varepsilon - \frac{Ne^2}{m(\omega^2 + f^2)}, \quad \gamma' = \frac{Nfe^2}{m(\omega^2 + f^2)}.$$

Non si deve dimenticare che il significato preciso di tali conclusioni è il seguente: in un mezzo ionizzato definito dai numeri N ed f, il campo elettromagnetico, *in regime sinusoidale* di pulsazione ω, obbedisce alle equazioni fondamentali di Maxwell scritte relativamente ad un mezzo ordinario le cui permittività e conducibilità, anzichè ε, γ, abbiano i valori (20).

A rigore le formole (20) dovrebbero contenere tanti termini quante sono le specie di ioni. Ma in pratica ci si può limitare ai termini relativi

---

(1) Di questo risultato ci si può rendere conto così. Durante l'urto, cioè nel breve periodo di tempo in cui lo ione risente l'azione della molecola urtante, il moto dello ione medio è retto da una equazione del tipo

$$(\alpha) \qquad m\frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{F} + \vec{F}_u$$

dove $\vec{F}_u$ è l'azione media determinante l'urto. Una espressione di tale $\vec{F}_u$ si può avere facilmente appoggiandosi ad alcune ipotesi semplificative, come segue. La differenza fra le quantità di moto possedute dallo ione all'inizio ed alla fine dell'urto è misurata dall'impulso delle forze agenti, il quale, data la enorme prevalenza di $\vec{F}_u$ su $\vec{F}$, si riduce praticamente al solo impulso di $\vec{F}_u$; pertanto, essendo $\frac{1}{f}$ la durata dell'urto, si ha

$$mf(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \vec{F}_u,$$

essendo $\vec{v}_2$, $\vec{v}_1$ le velocità finale ed iniziale dello ione medio. Ora la $\vec{v}_2$, potendosi assimilare alla velocità media che gli ioni possederebbero in assenza del campo orientatore, può ritenersi nulla, talchè dalla precedente si ricava

$$\vec{F}_u = -mf\vec{v}_1$$

dove $\vec{v}_1$, velocità media degli ioni prima dell'urto, coincide con la $\vec{v}$ che entra nell'espressione (17) della corrente $\vec{u}$.

La (α) può dunque scriversi

$$(\beta) \qquad m\frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{F} - mf\vec{v}.$$

Deriviamo rispetto al tempo e, in vista dell'applicazione al caso sinusoidale, scri-

agli elettroni, sia perchè il loro valore è di gran lunga preponderante, sia perchè generalmente gli elettroni sono più numerosi degli ioni, sia infine pel fatto che, mentre le cariche degli ioni sono dell'ordine di quella dell'elettrone, le loro masse, che nei termini stessi compaiono al denominatore, sono di gran lunga maggiori.

A questo punto, è facile dedurre i caratteri essenziali della propagazione di un'onda e. m. in un gas ionizzato. Basta all'uopo richiamare i risultati generali relativi ad un mezzo qualunque (App. *C*, 6, *a*), per concludere che la propagazione stessa sarà caratterizzata da un certo numero complesso

$$\alpha - j\beta = \omega \sqrt{\varepsilon'\mu - j\frac{\gamma'\mu}{\omega}}$$

la cui parte reale α divisa per ω corrisponde all'inversa della velocità di fase, ed il coefficiente β di $-j$ dà la misura in neper dell'attenuazione, o *assorbimento*, per ogni unità di lunghezza.

Per scendere a valutazioni quantitative, osserviamo che la precedente, introducendo i valori numerici di e, m, carica e massa dell'elettrone, e ponendo per ε la permittività ε_0 del mezzo normale (aria, vuoto):

$$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ coul.}, \quad m = 0{,}9 \cdot 10^{-30} \text{ kg}, \quad \varepsilon_0 = 8{,}86 \cdot 10^{-12} \text{ F/m},$$

diviene

$$\alpha - j\beta = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{3200\,N}{\omega^2 + f^2}\left(1 + j\frac{f}{\omega}\right)}$$

---

viamo $-\omega^2\vec{v}$ in luogo di $\frac{d^2\vec{v}}{dt^2}$, mentre, per la derivata $\frac{d\vec{v}}{dt}$ nascente dal secondo termine a secondo membro, scriviamo il valore fornito dalla (β) stessa. Si ottiene così:

$$e\frac{d\vec{F}}{dt} - \frac{ef\vec{F}}{m} + m(f^2 + \omega^2)\vec{v} = 0 .$$

Moltiplicando per $\frac{Ne}{m}$ e scrivendo $\vec{u}$ al posto di $Ne\vec{v}$, si ricava:

$$\vec{u} = -\frac{Ne^2}{m(\omega^2 + f^2)}\frac{d\vec{F}}{dt} + \frac{fNe^2}{m(\omega^2 + f^2)}\vec{F} .$$

Sostituendo questo valore di $\vec{u}$ nella prima equazione di Maxwell

$$\text{rot}\,\vec{H} = \varepsilon\frac{\partial\vec{F}}{\partial t} + \vec{u},$$

il secondo membro assume appunto l'aspetto

$$\varepsilon'\frac{\partial F}{\partial t} + \gamma'\vec{F},$$

avendo ε' γ' i valori (20), il che dimostra l'asserto.

Nei casi che interessano le nostre applicazioni, f è dell'ordine di $10^{-4} \div 10^{-5}$ sec^{-1}, per cui la correzione di cui si tratta è trascurabile ogni qualvolta si ha a che fare con valori di ω dell'ordine di $10^6 \div 10^7$ (onde medie e corte).

essendo $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ la velocità della luce nel mezzo normale ($= 3 \cdot 10^8$m/sec).

Per lunghezze d'onda dell'ordine di 30 m ($\omega = 2\pi \cdot 10^7$) e con i valori di N ed f che si verificano a 100 km d'altezza dal suolo ($N = 10^{11}/\text{m}^3$, $f = 10^4 \div 10^5/\text{sec}$), la precedente può semplificarsi sostituendo al radicale i primi due termini del suo sviluppo in serie e scrivendo ω^2 in luogo di $\omega^2 + f^2$. Si ottiene così

$$\alpha = \frac{\omega}{c}\left(1 - \frac{1600\,N}{\omega^2}\right), \quad \beta = \frac{1600\,Nf}{c\omega^2}.$$

Il fattore che moltiplica $\frac{\omega}{c}$ nell'espressione di α non è altro che l'*indice di rifrazione* n del mezzo, cioè il rapporto fra le velocità di propagazione nel vuoto (c) e nel mezzo stesso $\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$. Sostituendo ad ω il suo valore $\frac{2\pi c}{\lambda} \backsimeq \frac{6\pi \cdot 10^8}{\lambda}$ si ottiene

$$n \backsimeq 1 - 4{,}49 \cdot 10^{-16} N\lambda^2, \quad \beta \backsimeq 1{,}5 \cdot 10^{-8} Nf\lambda^2. \tag{21}$$

Come si vede, l'indice di rifrazione risulta *minore dell'unità*, cioè la velocità di propagazione supera quella nel vuoto, come era del resto prevedibile, dato che la costante dielettrica è minore [1].

Sempre nell'ipotesi $\omega^2 + f^2 \backsimeq \omega^2$, si possono avere migliori approssimazioni scrivendo

$$\alpha - j\beta = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{3200\,N}{\omega^2}}\,\sqrt{1 - j\,\frac{f}{\omega\left(1 - \frac{3200\,N}{\omega^2}\right)}} \tag{22}$$

e sostituendo all'ultimo radicale i primi due termini del suo sviluppo in serie. Si troverebbe così, con le solite sostituzioni numeriche:

$$n \backsimeq \sqrt{1 - 8{,}9 \cdot 10^{-16} N\lambda^2}, \quad \beta \backsimeq \frac{f}{2cn} = 6{,}5 \cdot 10^{-10}\frac{f}{n}. \tag{22'}$$

15. - Presenza di un campo magnetico. — Se il mezzo ionizzato in cui si propaga un'onda e. m. è sede di un campo magnetico, ben inteso indipendente da quello che fa parte dell'onda, le cose si modificano profondamente rispetto allo schema esaminato nel n. prec., in quanto che sugli ioni agisce anche la forza ponderomotrice magnetoelettrica.

[1] La velocità di propagazione essendo però sempre positiva, l'indice n non può mai risultare nullo. L'apparente contraddizione con la formola scritta (la quale, per un dato N, accuserebbe l'esistenza di lunghezze d'onda cui compete indice nullo) dipende dalle approssimazioni poste, le quali richiedono essenzialmente che $\frac{3200\,N}{\omega^2}$ sia abbastanza piccolo in confronto all'unità.

È noto infatti (El., V, 18) che un elemento filiforme $\vec{dl}$ percorso da corrente i, immerso in un campo magnetico la cui induzione vale $\vec{B}$, è soggetto alla forza $i\,\vec{dl} \wedge \vec{B}$. Sostituendo $i\,\vec{dl}$ con $\vec{u}\,d\tau$, dove $\vec{u}$ rappresenta la densità superficiale, possiamo dire che l'azione esercitantesi sull'elemento (di volume) $d\tau$ di corrente vale $\vec{u} \wedge \vec{B} \cdot d\tau$.

Nel caso attuale dovremo sostituire $Ne\vec{v}$ ad $\vec{u}$; in tal modo otteniamo $Ne\,\vec{u} \wedge \vec{B} \cdot d\tau$ come espressione dell'azione esercitata dal campo magnetico rappresentato da $\vec{B}$ sul complesso di ioni esistenti in $d\tau$; e poichè questi sono in numero di $Nd\tau$, ciò equivale a dire che $e\,\vec{v} \wedge \vec{B}$ è la forza agente sullo ione medio.

Dunque l'equazione che governa il moto di questo si presenterà sotto la forma (Cfr. (a) della nota a pag. 408):

$$\frac{dv}{dt} = \frac{e\vec{F}}{m} + \frac{e\,\vec{v} \wedge \vec{B}}{m} + \vec{F}_u\,.$$

La presenza di m al denominatore ci permette intanto di concludere che, come nel caso precedente, l'effetto che stiamo esaminando è assai più importante per gli elettroni che per gli ioni.

Manifestamente poi, siccome la direzione di $\vec{B}$ ha un carattere affatto speciale rispetto alle altre, ne segue che il gas si comporterà in modo anisotropo rispetto ad un'onda e. m. che in esso si propaga. E precisamente si trova che, se la propagazione avviene in modo che il campo elettrico dell'onda sia parallelo a $\vec{B}$, il campo magnetico rimane senza effetto sull'onda, in ogni altro caso invece si verificano influenze di vario genere: più precisamente si trova che se la propagazione è normale a $\vec{B}$, ma il campo elettrico non è parallelo a $\vec{B}$, l'onda si decompone in due, entrambe polarizzate rettilineamente [1], una il cui campo elettrico è parallelo a $\vec{B}$, ed una polarizzata ad angolo retto con la precedente, ed alle due competono diverse velocità di propagazione e diversi coefficienti d'assorbimento; se invece la propagazione avviene parallelamente a $\vec{B}$, si ha ancora decomposizione dell'onda elettrica in due polarizzate circolarmente in versi opposti, e dotate di coefficienti di assorbimento diversi.

[1] Un vettore $\vec{V}$ a variazione di tipo sinusoidale di pulsazione ω si può in generale rappresentare con

$$\vec{V} = \vec{A}\cos\omega t + \vec{B}\,\mathrm{sen}\,\omega t\,,$$

cioè come somma di due vettori dello stesso tipo, fra loro in quadratura temporale, ma di ampiezze (tensori di $\vec{A}$ e $\vec{B}$) e direzioni in generale qualunque. Ora, se $\vec{A}$ e $\vec{B}$ sono paralleli, l'espressione precedente è riducibile alla forma $\vec{C}\,\mathrm{sen}\,(\omega t + \varphi)$, con $\vec{C}$ parallelo ad $\vec{A}$ e $\vec{B}$, e l'estremo del vettore $\vec{V}$ considerato descrive, durante un periodo, un segmento (di lunghezza $2|\vec{C}|$). Ma se $\vec{A}$ e $\vec{B}$ non sono paralleli, l'estremo di $\vec{V}$ percorre in generale un ellisse. Si dice che il vettore è polarizzato *rettilineamente* nel primo caso, *ellitticamente* nel secondo. Quando $\vec{A}$ e $\vec{B}$ hanno uguali tensori e sono fra loro perpendicolari, l'ellisse si riduce ad un cerchio e la polarizzazione è detta *circolare*.

I coefficienti d'assorbimento variano al solito con la frequenza, ed esiste una frequenza particolare per la quale l'assorbimento è massimo. È quella del moto rotatorio che gli elettroni liberi possono assumere in presenza del campo $\vec{B}$: la forza $e\vec{v} \wedge \vec{B}$ è diretta normalmente a $\vec{B}$ ed a $\vec{v}$ e la sua intensità vale eBv sen α se α è l'angolo compreso fra $\vec{B}$ e $\vec{v}$; per $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (campo magnetico normale alla velocità dell'elettrone), la traiettoria diventa un cerchio il quale viene percorso con una velocità angolare ω tale che la forza centripeta $m\omega^2 r$ uguagli l'azione magneto-elettrica $eBv = eB\omega r$. Questa velocità angolare, che quindi vale

$$\omega = \frac{eB}{m},$$

coincide con la pulsazione di massimo assorbimento.

Nel caso del campo magnetico terrestre, B vale circa $5 \cdot 10^{-5}$Wb/m^2, e si trova così $\omega = 8{,}8 \cdot 10^6$ corrispondente a $\lambda = 214$ m (1).

16. - Propagazione alla superficie del suolo. - Teoria di Zenneck. — Mediante le nozioni contenute nei due nn. precc. si possono, come vedremo, spiegare abbastanza bene i vari fenomeni osservati nella propagazione delle onde e. m. nei bassi e negli altissimi strati dell'atmosfera, in quanto questi possono considerarsi costituiti da gas in varia misura ionizzati.

Meno agevole è invece il rendersi conto dei fatti che accompagnano la propagazione alla superficie della terra.

La teoria svolta nei nn. precc., se può servire ad una schematizzazione grossolana, è ben lungi dal rendere conto dei vari fatti che in realtà si verificano, e specialmente essa non consente valutazioni attendibili del campo e. m. a distanze notevoli da un'antenna trasmittente.

La ragione principale di divario risiede nel fatto che il suolo non è mai un conduttore perfetto, come si ammette nella teoria schematica, ma presenta i caratteri di un mezzo *semiconduttore*, intendendo con ciò dire che la permittività ε e la conduttività γ hanno entrambe valori diversi da zero, i quali poi variano entro limiti abbastanza estesi a seconda della natura e delle accidentalità della superficie.

I primi passi verso una risoluzione del problema rimontano ai primordi della radiotelegrafia, e si può ritenere che la prima impostazione razionale della questione sia quella proposta dallo Zenneck (1907). Quantunque in tal genere di questioni, come già si è avvertito, la teoria non

(1) Questa considerazione non può però essere correttamente invocata per spiegare certe anomalie di propagazione verificate sulle onde e. m. di lunghezza fra i 200 ed i 300 metri.

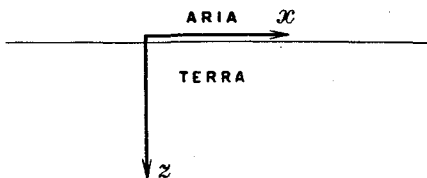
possa dare che delle indicazioni qualitative, è tuttavia di grande utilità per lo studioso conoscerne i tratti essenziali, e perciò ora ne daremo qui un cenno.

Supponiamo che la superficie del suolo sia un piano π separante due mezzi, l'uno (atmosfera) costituito da un dielettrico perfetto, l'altro (terra) da un corpo semiconduttore, come dianzi definito, e proponiamoci di determinare le possibili onde piane (App., *C*, 5) propagantisi in una direzione parallela a detto piano, ammettendo per semplicità che il vettore magnetico abbia direzione costante, normale alla direzione di propagazione (e quindi parallelo al piano π).

Fig. 201

Assunto l'asse delle x parallelo a quest'ultima, e quello delle z verticale ($z < 0$ aria, $z > 0$ terra, fig. 201), il vettore magnetico sarà parallelo all'asse y, e quindi di modulo uguale a quello della sua componente H_y. Quanto al vettore elettrico, supporremo soltanto che esso sia parallelo al piano verticale xz, talchè esso sarà completamente determinato dalle sue componenti F_x ed F_z. Supporremo infine che la struttura del campo sia la stessa lungo ogni parallela all'asse y (1), con che F_x, F_z ed H_y saranno funzioni delle sole x e z, oltre che, ben inteso, del tempo.

Il problema proposto equivale a quello della ricerca di una soluzione delle equazioni di Maxwell, scritte una volta per il semispazio $z < 0$, un'altra per i punti $z > 0$, con la consueta condizione dell'annullamento di F ed H all'infinito e quella della «saldatura» attraverso il piano $z = 0$ secondo le note leggi (App., *C*, 3).

Ritenendo F ed H a variazione sinusoidale di pulsazione ω, la loro dipendenza da x sarà necessariamente tale che nelle espressioni effettive entri come fattore un esponenziale del tipo $e^{j(\omega t+sx)}$ (2), talchè in definitiva le componenti F_x, F_z, H_y saranno rappresentabili con tre numeri complessi $\mathbf{F}_x$, $\mathbf{F}_z$, $\mathbf{H}_y$ ciascuno dei quali è prodotto di una funzione della sola x per una della sola z.

(1) Il campo generato da un'antenna presenta veramente simmetria assiale, ma, a grande distanza dall'antenna stessa, e limitando le considerazioni ad una regione di spazio abbastanza ristretta, si può ritenere infinita la distanza dall'asse di simmetria, il che equivale a considerare come rette parallele gli archi di cerchi aventi un piccolo angolo al centro.

(2) Invero, in regime sinusoidale, ogni grandezza G interessata alla questione deve essere rappresentabile con $\mathbf{G}e^{j\omega t}$, essendo $\mathbf{G}$ un complesso funzione delle coordinate locali. D'altra parte, se la propagazione avviene secondo l'asse x con una certa velocità v, la stessa grandezza deve essere funzione della combinazione $t - \frac{x}{v}$; pertanto, posto $s = -\frac{\omega}{v}$, si avrà $\mathbf{G} = \mathbf{G}'e^{jsx}$ con $\mathbf{G}'$ funzione soltanto delle altre coordinate.

Esplicitando le equazioni di Maxwell nel caso attuale [1], dopo aver sostituito la derivazione rispetto al tempo con la moltiplicazione per $j\omega$, si riconosce che i tre complessi predetti soddisfano alle equazioni

$$\frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{F}_z}{\partial x} = -j\mu\omega \mathbf{H}_y\,, \quad \frac{\partial \mathbf{H}_y}{\partial x} = (\gamma + j\varepsilon\omega)\mathbf{F}_z\,, \quad -\frac{\partial \mathbf{H}_y}{\partial z} = (\gamma + j\varepsilon\omega)\mathbf{F}_x\,.$$

Sostituendo nella prima i valori di $\mathbf{F}_x$, $\mathbf{F}_z$ tratti dalle altre due, si trova per $\mathbf{H}_y$ l'equazione alle derivate parziali

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}_y}{\partial z^2} = -\varepsilon\mu\omega^2 k \mathbf{H}_y = -a^2 k \mathbf{H}_y\,, \tag{23}$$

avendo posto

$$a^2 = \varepsilon\mu\omega^2\,, \quad k = 1 - j\frac{\gamma}{\varepsilon\omega}\,. \tag{24}$$

A questa, tenuto conto che $\mathbf{H}_y$ deve essere prodotto di una funzione della sola x per una della sola z, si può soddisfare soltanto con una combinazione lineare di espressioni della forma

$$\mathbf{H}e^{-j(rz+sx)}\,,$$

dove $\mathbf{H}$, r, s sono tre complessi costanti, e fra i due ultimi sussiste la relazione

$$r^2 + s^2 = a^2 k \;\text{[2]}\,, \tag{25}$$

dopo di che seguono per $\mathbf{F}_x$ e $\mathbf{F}_z$ i valori

$$\mathbf{F}_x = \frac{r}{\varepsilon\omega k}\mathbf{H}e^{-j(rz+sx)}\,, \quad \mathbf{F}_z = -\frac{s}{\varepsilon\omega k}e^{-j(rx+sx)}\,.$$

---

[1] Siccome è

$$F_y = H_x = H_z = 0\,, \quad H_y = H\,,$$

le equazioni fondamentali di App., C, 3) si esplicitano come segue:

$$\frac{\partial H}{\partial z} = \varepsilon\frac{\partial F_x}{\partial t} + \gamma F_y\,, \quad -\frac{\partial H}{\partial y} = \varepsilon\frac{\partial F_x}{\partial t} + \gamma F_x\,, \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = -\mu\frac{\partial H}{\partial t}\,.$$

[2] Infatti, posto $\mathbf{H}_y = \mathbf{XZ}$ con $\mathbf{X}$, $\mathbf{Z}$ funzioni della sola x, della sola z rispett., dalla (23) si deduce

$$\frac{\mathbf{Z}''}{\mathbf{Z}} + \frac{\mathbf{X}''}{\mathbf{X}} = -a^2 k\,,$$

ed a questa non si può soddisfare se non attribuendo a $\frac{\mathbf{Z}''}{\mathbf{Z}}$ e $\frac{\mathbf{X}''}{\mathbf{X}}$ due valori costanti, che indichiamo con $-r^2$, $-s^2$, soddisfacenti alla (25). Ora, alle $\mathbf{Z}'' + s^2\mathbf{Z} = 0$, $\mathbf{X}'' + s^2\mathbf{X} = 0$ si soddisfa soltanto con combinazioni lineari di $e^{\pm jrz}$, $e^{\pm jsx}$. L'espressione di $\mathbf{H}_y$ dovrebbe dunque constare di quattro termini; ne abbiamo invece scritto soltanto uno perchè, come vedremo, le condizioni accessorie del problema consentono di attribuire un solo valore ad r ed uno solo ad s.

Distinguendo con gli indici t ed a i valori relativi ai due semispazi $z > 0$ e $z < 0$, avremo dunque

per $z > 0$: $$\mathbf{F}_{xt} = \frac{r_t}{\varepsilon_t \omega k_t} \mathbf{H}_t e^{-j(r_t z + s_t x)}, \quad \mathbf{F}_{zt} = -\frac{s_t}{\varepsilon_t \omega k_t} \mathbf{H}_t e^{-j(r_t z + s_t x)},$$
$$\mathbf{H}_{yt} = \mathbf{H}_t e^{-j(r_t z + s_t x)},$$

per $z < 0$: $$\mathbf{F}_{xa} = -\frac{r_a}{\varepsilon_a \omega k_a} \mathbf{H}_a e^{j(r_a z - j s_a x)}, \quad \mathbf{F}_{za} = -\frac{s_a}{\varepsilon_a \omega k_a} \mathbf{H}_a e^{j(r_a z - s_a x)},$$
$$\mathbf{H}_{ya} = \mathbf{H}_a e^{j(r_a z - s_a x)}$$

avendo indicato con $-r_a$ la grandezza analoga ad r_t.

Dovendo (App., C, 3) per $z = 0$ risultare $\mathbf{F}_{xt} = \mathbf{F}_{xa}$, $\mathbf{H}_{yt} = \mathbf{H}_{ya}$, fra le costanti si hanno le relazioni

$$\mathbf{H}_a = \mathbf{H}_t, \quad s_a = s_t, \quad \frac{r_t}{\varepsilon_t k_t} = -\frac{r_a}{\varepsilon_a k_a}.$$

Le ultime due, unitamente alle (25):

$$r_a^2 + s_a^2 = \alpha_a^2 k_a, \qquad r_t^2 + s_t^2 = \alpha_t^2 k_t,$$

permettono di calcolare r_t^2, r_a^2 ed il comune valore di s_t^2 ed s_a^2.

In particolare, se il mezzo a è un dielettrico perfetto, quale può ad es. considerarsi l'atmosfera non ionizzata, sarà $\varepsilon_a = \varepsilon_0$, $k_a = 1$, e le precedenti, scrivendo α, k in luogo di α_a, k_t ed introducendo la permittività relativa $h = \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_a} = \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_0}$ del mezzo t, si riducono a

$$r_t = -hk, \quad r_a^2 + s^2 = \alpha^2, \quad r_t^2 + s^2 = \alpha^2 hk,$$

da cui si ricava

$$r_a^2 = \frac{\alpha^2}{1 + hk}, \quad r_t^2 = \alpha^2 \frac{h^2 k^2}{1 + hk}, \quad s^2 = \alpha^2 \frac{hk}{1 + hk}. \tag{26}$$

Se la propagazione avviene nel senso delle x positive, js dovrà avere positiva la parte reale; altrettanto poi dovrà verificarsi per jr_a, jr_t affinchè le ampiezze dei campi elettrico e magnetico siano nulle all'infinito. Queste condizioni consentono di precisare a quali delle radici quadrate dei secondi membri corrispondono gli effettivi valori di r_a, r_t, s; ed è facile vedere che dovrà essere

$$r_a = -r_{a1} - jr_{a2}, \quad r_t = r_{t1} - jr_{t2}, \quad s = s_1 - js_2$$

con r_{a1}, r_{a2}, r_{t1}, r_{t2}, s_1, s_2 positivi [1].

---

[1] Infatti, indicando con $-\varphi$ l'argomento di hk, si ha $\varphi < \frac{\pi}{2}$, e quindi, detto $-\varphi'$ l'argomento di $1 + hk$, sarà $\varphi' < \varphi$. Gli argomenti dei secondi membri delle (26) valgono dunque rispettivamente $+\varphi'$, $-2\varphi + \varphi'$, $-\varphi + \varphi'$, e quelli delle loro radici quadrate $-\frac{\varphi'}{2} (+\pi)$, $-\varphi + \frac{\varphi'}{2} (+\pi)$, $-\frac{\varphi}{2} + \frac{\varphi'}{2} (+\pi)$. Pertanto quelle delle radici quadrate che hanno negativa la parte immaginaria sono rappresentate da punti del 3°, 4°, 4° quadrante.

Dall'esame delle espressioni trovate si deducono molte importanti conseguenze: in primo luogo si vede che nel semispazio $z < 0$ (aria) si ha a che fare con una propagazione i cui piani d'onda (piani lungo i quali è costante la fase) non sono verticali. L'equazione di questi piani è:

$$s_1 x + r_{a1} z = \text{cost.}\,,$$

e pertanto le loro tracce sul piano xz sono le rette parallele la cui inclinazione φ sull'asse x è definita da $\operatorname{tg}\varphi = \frac{s_2}{r_{a1}}$, e la velocità di propagazione, misurata lungo le normali a tali piani, vale $\frac{\omega}{\sqrt{s_1^2 + r_{a1}^2}}$ (1). Poi, siccome nelle espressioni di $\mathbf{F}_{xa}$, $\mathbf{F}_{za}$, $\mathbf{H}_a$ compare un fattore esponenziale

$$e^{r_{a2} z - s_2 x}$$

decrescente indefinitamente col crescere di x (ed anche di $|z| = -z$), si vede che la propagazione è accompagnata da attenuazione, come per effetto di assorbimento. In particolare, alla superficie del suolo ($z = 0$), l'attenuazione si commisura ad s_2; cioè alla parte immaginaria della radice quadrata di $a^2 \frac{hk}{1 + hk}$.

In secondo luogo, possiamo vedere che il campo elettrico è in generale polarizzato ellitticamente (v. nota a pag. 411). Invero il rapporto fra le componenti $\mathbf{F}_{za}$ ed $\mathbf{F}_{xa}$ vale

$$\frac{\mathbf{F}_{za}}{\mathbf{F}_{xa}} = \frac{s}{r_a} = \sqrt{hk}\,,$$

e poichè k è in generale complesso, le due componenti non sono in fase. La loro differenza di fase φ corrisponde all'argomento di $\sqrt{k}$, cioè si ha

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{\gamma}{\varepsilon_t \omega}\,.$$

Per il rapporto fra le componenti $\mathbf{F}_{zt}$ e $\mathbf{F}_{xt}$ — ben inteso per $z = 0$ — si trova l'inverso del precedente valore, e pertanto il corrispondente sfasamento vale $90° - \varphi$.

Gli effettivi valori di questi rapporti e dell'angolo φ, il quale dà la misura delle deviazioni dalla polarizzazione rettilinea, dipendono essen-

(1) Se agli assi x, z si sostituiscono X, Z, essendo il nuovo asse X normale ai piani d'onda, all'espressione $s_1 x + r_{a1} z$ si sostituisce $X\sqrt{s_1^2 + r_{a1}^2}$; quindi l'esponenziale $e^{j(r_a z - s_a x)}$, salvo un fattore reale, si riduce ad $e^{-jX\sqrt{s_1^2 + r_{a1}^2}}$, il che significa appunto che $\frac{\omega}{\sqrt{s_1^2 + r_{a1}^2}}$ è la velocità di propagazione della fase.

zialmente dal numero $\frac{\gamma}{\varepsilon_t \omega}$, i cui valori variano grandemente a seconda delle circostanze. Invero, per la conduttività del suolo si hanno valori da alcune unità di S/m (acqua marina) a pochi centesimi (terreni ordinari mediamente umidi) e fino a $10^{-5} \div 10^{-6}$ per terreni sabbiosi secchi;

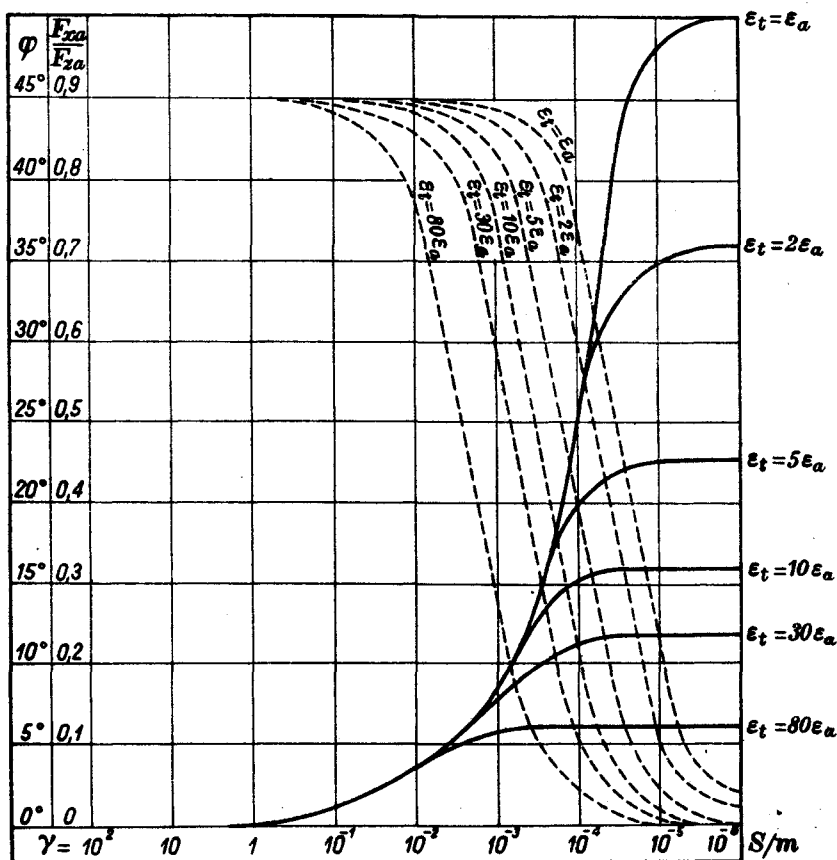



Fig. 202

mentre la costante dielettrica, che per terreno asciutto non differisce praticamente da quella dell'aria, assume valori $20 \div 50$ volte maggiori per terreni umidi, 80 volte per l'acqua.

I diagrammi di fig. 202 mostrano l'andamento di $\frac{F_{xa}}{F_{za}}$ (curve a tratto continuo) e di φ (curve tratteggiate) per i diversi valori di γ_t e di ε_t e per $2\pi \cdot 5 \cdot 10^5$ ($\lambda = 600$ m).

Quando $\frac{F_x}{F_z}$ è molto piccolo rispetto all'unità, il campo elettrico per $z = 0$ risulta sensibilmente a polarizzazione rettilinea e normale al piano $x = 0$ nell'aria, parallelo invece allo stesso piano entro la terra. Questo caso si presenta per $\gamma_t \geq 10^{-2}$ circa, quasi indipendentemente dai valori di ε_t.

Invece per $\frac{F_x}{F_z}$ non molto piccolo e piccolo valore di φ, come si verifica per i minori valori di γ_t e di ε_t, il campo elettrico nell'aria è sensibilmente inclinato sull'orizzontale, ma la ellitticità della polarizzazione è poco sen-

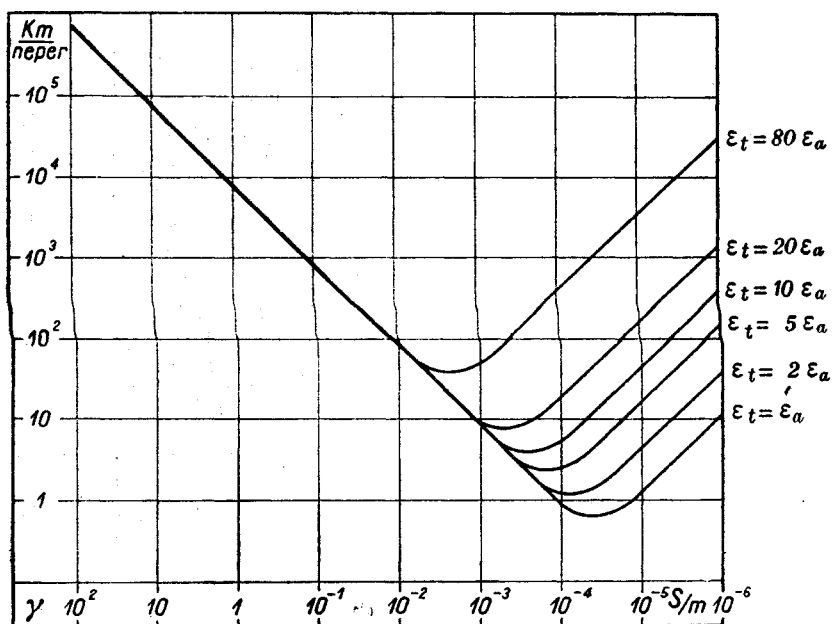



Fig. 203

tita, mentre questa è invece piuttosto sensibile nel suolo. Se poi φ non è tanto piccolo, come avviene per i più bassi valori di ε_t e per i più piccoli valori di γ_t, la ellitticità è sensibile tanto nell'aria che nel suolo.

Quanto all'assorbimento, se ne può avere un'idea esaminando le curve di fig. 203, le quali mostrano l'andamento della grandezza $\frac{1}{s_2}$, espressa in km/neper, cioè della distanza alla quale l'intensità del campo si trova attenuata di un neper. Come si vede, per ogni dato valore di ε_t, esiste una γ_t cui corrisponde un massimo dell'assorbimento. Giova soprattutto rilevare l'importanza decisiva della costante dielettrica sul valore di s_2.

I diagrammi (figg. 202 e 203) sono disegnati per $\omega_0 = 2\pi \cdot 5 \cdot 10^5\ \text{sec}^{-1}$; quello di fig. 203 può anche utilizzarsi per una pulsazione diversa e pre-

cisamente per la $x\omega_0$, purchè si divida per x il valore che da esso si ricava in relazione all'effettiva ε_t e ad una conduttività $\frac{\gamma_t}{x}$. Così, per la pulsazione $10\,\omega_0$ ($\lambda = 60$ m), $\varepsilon_t = 80\,\varepsilon_0$, $\gamma_t = 10^{-4}$, si rileverà nel diagramma l'ordinata ($\cong 3000$) corrispondente ad $\varepsilon_t = 80\,\varepsilon_a$, $\gamma_t = 10^{-5}$ e la si dividerà per 10, ottenendosi così 300 km. Per rendersi conto di tale procedimento, basta osservare che nelle (26) la pulsazione interviene sia per il tramite di k, che, a senso della (24), dipende dal solo rapporto $\frac{\gamma_t}{\omega}$, sia pel tramite di a che è proporzionale ad ω.

17. - Cenno sulla teoria di Sommerfeld. — Il problema della propagazione delle onde e. m. in uno spazio occupato da due mezzi diversi separati dal piano $z = 0$ fu successivamente trattato in modo più completo dal Sommerfeld, il quale lo ha affrontato sotto un aspetto più generale. Siccome però il procedimento seguito da questo Autore richiede l'uso di complessi strumenti di calcolo, qui ci limiteremo ad esporre i punti essenziali delle conclusioni cui esso conduce.

Il Sommerfeld tratta il caso del dipolo elementare ricercando la più generale espressione di un vettore $\vec{\mathbf{P}}$ soddisfacente alla equazione a derivate parziali

$$\Delta\vec{\mathbf{P}} + \frac{a^2}{\omega^2}\frac{\partial^2\vec{\mathbf{P}}}{\partial t^2} = 0,$$

e ad alcune condizioni (qualitative) riguardanti il comportamento di $\vec{\mathbf{P}}$ nelle vicinanze del dipolo, per poi dedurre le espressioni del campo elettrico e magnetico mediante le note formole (App., C, 8, formole (31)) che legano questi vettori al vettore di Hertz. Egli trova così che il più generale vettore $\vec{\mathbf{P}}$ risulta composto di tre termini, in uno dei quali compare al denominatore $\frac{1}{\sqrt{r}}$, negli altri invece $\frac{1}{r}$. Ciascuno di questi termini è inoltre affetto da un fattore esponenziale ad esponente complesso — analogo a quello che abbiamo incontrato nella precedente teoria — cui si connette un assorbimento accompagnato da progressivo sfasamento. Qui la grandezza r non rappresenta la effettiva distanza del punto considerato M dal centro del dipolo, ma quella che il Sommerfeld chiama « distanza numerica », definita nel modo seguente.

Richiamiamo che, in regime sinusoidale di data pulsazione ω, abbiamo chiamato misura angolare di una lunghezza l il prodotto di 2π per la misura di l in lunghezze d'onda, cioè al, essendo $a = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$. La velocità c in base alla quale da ω si deduce λ, è, nel caso dell'aria ($\varepsilon = \varepsilon_0$,

$\mu = \mu_0$), la velocità della luce; e generalmente, per un mezzo le cui costanti sono ε, μ si ha

$$a = \omega \sqrt{\varepsilon\mu} .$$

Quando il mezzo presenta una conduttività γ non nulla, le equazioni fondamentali di Maxwell — nel caso sinusoidale, bene inteso — possono formalmente ricondursi al caso $\gamma = 0$; basta pensare attribuito alla costante dielettrica ε un valore complesso, e precisamente sostituire ad ε la differenza $\varepsilon - j\frac{\gamma}{\omega}$, cioè mutare ε in $k\varepsilon$ essendo k definito dalla (24) [1]. In tal caso la misura angolare di una lunghezza

$$al = \omega \sqrt{k\varepsilon\mu}\, l$$

riuscirà un (angolo) complesso.

Ciò premesso, per « distanza numerica » di un punto M dal dipolo si intende la misura angolare della distanza R di M dalla retta verticale (fig. 204) contenente il dipolo, valutata con riferimento al mezzo normale (aria), cioè $\frac{\omega R}{c}$, e ridotta secondo un rapporto che, per $|a_t| \gg |a_a|$, coincide sensibilmente con $\frac{1}{2}\left|\frac{a_t}{a_a}\right|^2$. Nel caso particolare in cui è $\gamma_t \gg \varepsilon_t\omega$ e quindi $k_t \cong -\frac{j\gamma_t}{\varepsilon_t\omega}$, il valore effettivo di tale rapporto risulta

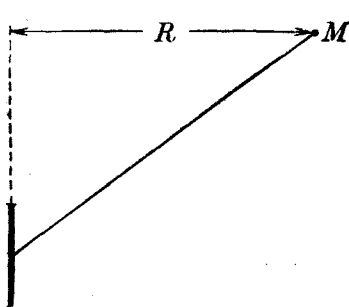



Fig. 204

$$\frac{\varepsilon_a\omega}{2\gamma_t} = \frac{1}{120\,\gamma_t\lambda},$$

essendo γ_t, λ espressi in S/m e m, e la distanza numerica relativa alla distanza effettiva R (metri) è

$$r = \frac{\pi R}{60\,\gamma_t\lambda^2} . \qquad (27)$$

Ogni termine dell'espressione di $\vec{\mathbf{P}}$ dà luogo a termini corrispondenti pel campo, talchè l'espressione generale di questo consta di termini proporzionali alle potenze di $\frac{1}{\sqrt{r}}$ ed altri contenenti le potenze intere di $\frac{1}{r}$.

---

[1] Nel secondo membro della prima equazione di Maxwell $\varepsilon\frac{\partial\vec{F}}{\partial t} + \gamma\vec{F}$ si può, nel caso sinusoidale, sostituire $\frac{1}{j\omega}\frac{\partial\vec{F}}{\partial t}$ ad $\vec{F}$, e ciò equivale appunto a ritenere il mezzo non conduttivo, ma dotato di costante dielettrica complessa $\left(= \varepsilon - j\frac{\gamma}{\omega}\right)$.

Questi termini sono affetti da fattori esponenziali del tipo e^{kr} con k complesso, la cui parte reale è negativa e corrisponde ad attenuazione, la immaginaria è legata alla velocità di propagazione della fase.

Ora, se ci si limita alla considerazione di quel che avviene pei punti M del piano $z = 0$ — per i quali R coincide con la distanza effettiva — si trova che, mentre per i termini in $\frac{1}{\sqrt{r}}$ la relativa k dipende simmetricamente dalle costanti di entrambi i mezzi, per gli altri termini invece la corrispondente k dipende soltanto dai parametri dell'uno, oppure dell'altro mezzo. I primi termini, in quanto appaiono ripetere la loro origine da un'azione combinata dei due mezzi, e quindi localizzata sul piano $z = 0$, possono pensarsi rappresentare un'onda *superficiale*, mentre le onde rappresentate dagli altri termini hanno carattere *spaziale*, e di queste ve ne sono di due tipi, corrispondenti a ciascuno dei due mezzi separati dal piano $z = 0$.

È essenziale notare che tali caratteri superficiale e spaziale non si riferiscono soltanto all'origine dell'onda relativa, ma anche e soprattutto ad una precisa considerazione quantitativa, in quanto che « superficiale » e « spaziale » vogliono qui significare *bidimensionale*, rispettivamente *tridimensionale*. Ciò è legato alla circostanza che le variazioni di ampiezza, prescindendo dai fattori esponenziali di assorbimento, avvengono secondo la legge $\frac{1}{\sqrt{r}}$ per le prime, $\frac{1}{r}$ per le seconde. Ora tali comportamenti sono precisamente caratteristici di fatti la cui propagazione da un centro C si verifica in un piano, rispettivamente nello spazio. Invero, l'energia irradiata, che in ogni caso è proporzionale al quadrato dell'ampiezza di oscillazione, deve, in assenza d'assorbimento, distribuirsi in modo che se ne trovi una quantità costante lungo ogni circonferenza di centro C nel primo caso, sopra ogni sfera di centro C nel secondo, il che appunto adduce alla presenza dei fattori $\frac{1}{\sqrt{r}}$, rispettivamente $\frac{1}{r}$ nell'espressione delle corrispondenti ampiezze.

Quantunque tali deduzioni siano valide nell'ipotesi di una superficie piana di separazione fra i due mezzi, appare naturale ammettere che esse sussistano, almeno in prima approssimazione, per una forma qualunque della superficie stessa, e ciò darebbe in certo modo ragione dell'attitudine delle onde e. m. a seguire la curvatura della terra.

Man mano che ci si allontana dal dipolo, il campo si affievolisce specialmente per effetto dei fattori esponenziali d'assorbimento, ma l'assorbimento stesso essendo molto più rapido per le onde spaziali che per la superficiale, si conclude che, almeno per elevate distanze numeriche, il campo alla superficie del suolo è praticamente quello dovuto alla sola onda superficiale. D'altra parte, come si vede dalla sua espressione (27),

la distanza numerica decresce rapidamente con la frequenza, e ciò spiegherebbe la maggiore attitudine delle onde lunghe a dar luogo a campi apprezzabili anche ad elevate distanze effettive. Di qui la tendenza alle basse frequenze che ha caratterizzato le prime trasmissioni radiotelegrafiche. A parità di frequenza poi, tale attitudine dipende dalla conduttività del suolo; in particolare essa risulta sensibilmente migliore sul mare che su terreno secco.

18. - Propagazione delle onde elettromagnetiche. — Le considerazioni che hanno formato oggetto dei nn. prec. ci consentono di affrontare, almeno dal punto di vista qualitativo, l'esame delle condizioni reali in cui si svolge la effettiva propagazione del campo elettromagnetico generato da un'antenna, e di rendere conto in modo abbastanza esauriente dei fatti accertati dall'esperienza.

Innanzi tutto ci conviene stabilire, conformemente alle determinazioni del comitato consultivo di Radioelettricità (L'Aia, 1929), le seguenti denominazioni per le varie frequenze f della gamma radiotelegrafica

$f < 100$ kHz	$\lambda > 3000$ m	onde	lunghe
$100 < f < 1500$ »	$3000 > \lambda > 200$ »	»	medie
$1500 < f < 6000$ »	$200 > \lambda > 50$ »	»	intermedie
$6 < f < 30$ MHz	$50 > \lambda > 10$ »	»	corte
$f > 30$ »	$\lambda < 10$ »	»	cortissime.

Oggidì si sperimenta anche con onde ultracorte (o *microonde*), della lunghezza di pochi decimetri.

Per quanto riguarda la propagazione alla superficie della terra, almeno per le piccole portate, resta giustificata la formola empirica proposta da Austin, basata sui risultati di numerosissime esperienze, secondo la quale la valutazione del campo elettrico (μV/m) a distanza dell'antenna dovrebbe farsi mediante la formola

$$F = 377 \frac{h_e I}{r\lambda} \sqrt{\frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta}}\, e^{-\frac{ar}{\lambda^n}} \tag{28}$$

(h_e in m, r, λ in km, I in amp), in cui il fattore esponenziale rappresenta l'effetto dell'assorbimento, ed il fattore $\sqrt{\dfrac{\theta}{\operatorname{sen}\theta}}$, in cui θ è l'angolo compreso fra le verticali dell'antenna (posto di trasmissione) e del punto in cui è calcolato il campo (posto di ricezione), rappresenta l'effetto della curvatura terrestre. Quanto ai valori di a e di n, si può ritenere *mediamente*

$$a = 0{,}0014\,, \qquad n = 0{,}6\,.$$

In questo genere di questioni, la parola « mediamente » vuol essere intesa con grandissima larghezza. I valori indicati si possono ritenere

accettabili per onde lunghe, ed anche per onde medie quando il loro percorso si svolga prevalentemente sulla superficie del mare. Per adattare la formola ad onde medie su suolo più o meno secco, ricoperto o meno di abitazioni, occorrerebbe scostarsi (e non poco) da quei valori. Quanto al fattore $\sqrt{\frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta}}$, esso può ritenersi accettabile per θ sufficientemente lontano da π (antipodi).

Spesso, in luogo della corrente e dell'altezza efficace, si fa intervenire la potenza irradiata P_t (kW), con che la precedente assume l'aspetto

$$F = 3 \cdot 10^5 \frac{\sqrt{P_t}}{r} \sqrt{\frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta}}\, e^{-\frac{ar}{\lambda^n}}. \tag{28'}$$

Che la formola (28) (o la sua equivalente (28')) non possa avere carattere assoluto è messo in evidenza anche dal fatto che essa parrebbe accusare l'esistenza di una lunghezza d'onda cui corrisponde un campo massimo ad una data distanza, il che in effetto non si verifica ([1]).

Le trasmissioni a grandissima distanza e la varia fenomenologia della propagazione per onde corte non possono però in alcun modo spiegarsi con le teorie esposte ai nn. 14 e 15, almeno finchè si suppone che l'alta atmosfera abbia proprietà elettromagnetiche identiche a quella della bassa atmosfera.

Fin dall'inizio di questo secolo, Heaviside, Blondel, Kennely formularono l'ipotesi che gli alti strati dell'atmosfera consistessero di gas ionizzato, avente quindi (n. 14), almeno parzialmente, proprietà conduttrici, per modo che ad essi spetterebbe l'attitudine a riflettere verso il suolo le onde e. m.; queste poi potrebbero ancora venire riflesse dalla terra e così via, talchè in sostanza la propagazione delle onde e. m. avverrebbe in parte direttamente sul suolo, in parte entro lo strato compreso fra il suolo e l'alta atmosfera.

Alla parte ionizzata dell'atmosfera si diede inizialmente il nome generico di «strato di Heaviside»; oggi si parla più spesso di *ionosfera*, e studi accurati hanno messo in essere che essa consiste in un primo strato, detto regione E_1, all'altezza di 90 ÷ 100 km, in un secondo detto E_2 (o M) a circa 150 km, seguiti da altri due strati, F_1 ed F_2, alle altezze di circa 200 o 300 km. Secondo recentissime ricerche si avrebbero anche altri tre strati inferiormente allo strato E_1, i così detti C_1, C_2, C_3, alle altezze di circa 50 ÷ 55 km, 20 ÷ 35 km, 5 ÷ 15 km.

La ionizzazione degli alti strati dell'atmosfera pare sia essenzialmente da attribuirsi all'azione dei raggi ultravioletti del sole, quantunque non sia da escludersi l'azione di corpuscoli elettrizzati emessi dal sole stesso e quella della radiazione cosmica. In relazione a tali cause, le altezze degli

([1]) Uguagliando a zero la derivata di (28), si trova $\lambda = \sqrt[n+1]{ar}$.

strati ionizzati e le loro densità ioniche presentano variazioni dal giorno alla notte, dall'estate all'inverno, ed altre variazioni irregolari connesse con le tempeste magnetiche — dovute assai probabilmente all'arrivo di intense radiazioni elettroniche solari —, con certe situazioni meteorologiche della bassa atmosfera, ecc.

A prima vista parrebbe che la ionizzazione dovesse senz'altro sparire durante la notte, cioè con la scomparsa della causa ionizzante, ma così non è, perchè il tempo richiesto per la ricombinazione degli ioni è in generale assai lungo, specialmente nelle altissime regioni dell'atmosfera dove, a causa della estrema rarefazione, gli incontri fra due ioni sono poco probabili. Invece nelle basse regioni la ionizzazione scompare abbastanza rapidamente con lo scomparire della causa ionizzante, in particolare col passaggio dal giorno alla notte.

I vari fatti che l'esperienza di parecchi decenni ha permesso di accertare si lasciano abbastanza bene inquadrare invocando i caratteri generali della propagazione di un'onda e. m. in un gas ionizzato, come furono da noi dianzi (n. 14) delineati.

Poichè le nostre considerazioni si riferiranno sempre a punti situati a grande distanza dall'antenna trasmittente, questa potrà essere assimilata ad una sorgente puntiforme da cui emanano *raggi d'onda* in tutte le direzioni comprese nel semispazio occupato dall'atmosfera. Di questi raggi, quelli radenti il suolo costituiscono i così detti raggi *diretti* (o *terrestri*), ed a essi si applicano, con le riserve indicate, le teorie esposte nei nn. 16, 17, nell'ipotesi di un'atmosfera omogenea; agli altri, che vengono denominati raggi *atmosferici* — od anche, per ragioni che vedremo fra poco, *indiretti* —, si applicano, in prima approssimazione, le leggi dell'ottica geometrica.

Secondo queste, se il mezzo si può pensare suddiviso in strati separati da superfici sferiche con centro nell'antenna, l'andamento di ognuno dei raggi d'onda sarà retto dall'equazione

$$n \operatorname{sen} \varphi = \text{cost.},$$

essendo n l'indice di rifrazione dello strato generico e φ l'angolo che la direzione del raggio forma con la normale alla superficie di separazione con lo strato precedente, cioè con la verticale del punto di incidenza.

Se, in primo luogo, riteniamo di avere a che fare con onde sufficientemente corte (λ dell'ordine di 30 m), si potranno usare le formole approssimate (21) che danno l'indice di rifrazione in funzione dei vari parametri caratterizzanti lo stato ionico e la lunghezza d'onda. Ora, ognuno dei raggi che raggiunge la ionosfera subisce una deviazione (rifrazione) che, per essere $n < 1$, lo fa inclinare in senso tale da allontanarsi dalla normale. Se, come appare logico ammettere, n varia con continuità, la traiettoria del raggio risulterà così una curva con la concavità rivolta

verso il suolo. Una tale traiettoria può anche divenire parallela al suolo, e precisamente ciò si verificherà per quei raggi che escono dall'antenna con inclinazione φ_0 soddisfacente a $\operatorname{sen}\varphi_0 = n$ [1]. Siccome n, per una data frequenza, varia in senso opposto ad N, mentre d'altra parte N aumenta con l'altezza, si conclude che i raggi suscettibili di incurvarsi fino a divenire paralleli al suolo sono quelli esterni ad un cono ad asse verticale, il cui semiangolo di apertura φ_m è legato al massimo valore N_m di N dalla relazione

$$\operatorname{sen}\varphi_m = 1 - 4{,}49 \cdot 10^{-16} N_m \lambda^2 \,. \tag{29}$$

Dunque i raggi uscenti con inclinazione $\varphi_0 > \varphi_m$, in quanto raggiungono la ionosfera, possono in essa incurvarsi fino a divenire paralleli al suolo,

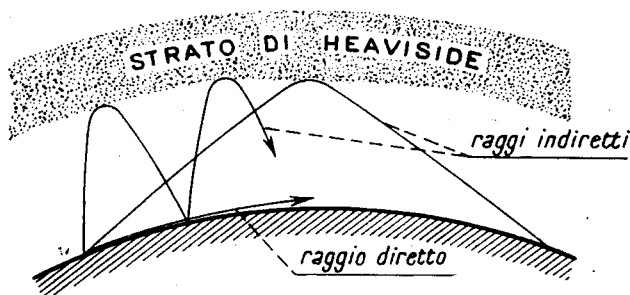



Fig. 205

mentre quelli definiti da valori di $\varphi_0 < \varphi_m$ riescono, per così dire, a forarla proseguendo poi verso strati più elevati.

In pratica poi, non tutti i primi raggiungono la ionosfera, ma solo quelli per cui φ_0 è inferiore ad un certo angolo, dell'ordine di circa 80°, in quanto i raggi poco inclinati sull'orizzonte vengono assai probabilmente fermati dalle irregolarità della superficie terrestre. Pertanto i raggi di cui si tratta saranno quelli compresi entro due certi coni aventi per asse la verticale d'antenna. Ciascuno di essi, raggiunta la direzione orizzontale, continua poi inclinandosi verso il suolo per un cammino simmetrico a quello dianzi descritto (fig. 205). È questa la ragione per cui tali raggi si chiamano *indiretti*.

L'apertura φ_m del cono delimitante i raggi capaci di tornare al suolo dipende essenzialmente dalla frequenza e diminuisce con essa, come si vede dalla (29). Questa formola anzi mette in evidenza che, per un dato

---

[1] Infatti, essendo $n \operatorname{sen}\varphi =$ cost. lungo il raggio, ed avendosi nella bassa atmosfera $n = 1$, $\varphi = \varphi_0$, risulta $n \operatorname{sen}\varphi = \operatorname{sen}\varphi_0$; pertanto il raggio diventerà parallelo al suolo $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$ per $\operatorname{sen}\varphi_0 = n$.

N_m, esiste una lunghezza d'onda minima, tale cioè che al di sotto di essa nessun raggio può venire rinviato dalla ionosfera. Tale λ minima, in quanto dipende da N_m, varia col variare della ionizzazione ed in particolare essa sarà diversa dal giorno alla notte; di massima si può ritenere $\lambda_{min} = 10$ m di giorno, $\lambda_{min} = 20$ m di notte.

Dalla stessa formola (29) — ben inteso, finchè non si esca dai limiti di sua validità — si sarebbe anche condotti a ritenere che le trasmissioni con onde lunghe riescano facilitate, in quanto tutti i raggi raggiungenti la ionosfera appare che possano da questa venire rinviati al suolo. Ma non bisogna dimenticare che il percorso di un raggio nella ionosfera è anche accompagnato da assorbimento, e più precisamente, come indica la (21), il coefficiente β varia proporzionalmente al quadrato della lunghezza d'onda. Per contro si deve osservare che il percorso del raggio nella ionosfera è tanto più breve quanto maggiore è la frequenza, come si rileva dalla relazione $1 - 4{,}49 \cdot 10^{-16} N\lambda^2 = \operatorname{sen} \varphi_0$, che in certo qual modo delimita il percorso predetto, riflettendo che, al crescere di λ, diminuisce il massimo N che necessita raggiungere per soddisfare la relazione stessa, e quindi diminuisce la lunghezza del percorso nello strato ionizzato.

Pertanto si può di massima ritenere che le onde corte generalmente attraversino gli strati E (a forte ionizzazione) subendo ivi una attenuazione che, pur non essendo trascurabile per ogni unità di lunghezza del percorso, è globalmente poco notevole a causa della brevità del percorso negli strati stessi, talchè esse possono poi raggiungere strati dove la rarefazione è molto maggiore ed in cui quindi l'assorbimento è lievissimo, ed ivi subiscono quella deviazione che determina il loro ritorno al suolo dopo un percorso che in massima parte si è verificato in regione scarsamente assorbente. Per esse quindi riesce possibile il ritorno al suolo, con intensità apprezzabili, anche a grande distanza dal posto trasmittente, il che val quanto dire che la portata è notevole. Non si deve però dimenticare che, affinchè questo stato di cose si verifichi, è necessario che vi siano effettivamente raggi capaci di raggiungere la ionosfera, quindi la lunghezza d'onda non deve essere troppo piccola.

Una trasmissione ad onda corta si presenta dunque come schematicamente indicato in fig. 206, la quale mette in evidenza un importante fatto, confermato dall'esperienza, e consistente nel presentarsi delle così dette *zone di silenzio* o *d'ombra*. In una tale trasmissione invero il raggio diretto, come s'è detto, è rapidamente assorbito, per cui la ricezione è da ritenersi esclusivamente affidata ai raggi indiretti. E per questi si verifica che, allontanandosi dal trasmettitore, la ricezione, che a piccolissima distanza era possibile, cioè fin dove l'assorbimento del raggio diretto non è sensibile, diventa nulla o quasi per un lungo tratto, per poi riapparire a distanza maggiore. Naturalmente l'ubicazione e l'entità delle zone di

ombra risente delle anomalie dipendenti dalle variazioni della densità ionica nell'alta atmosfera; in particolare, le condizioni di propagazione variano con l'intensità delle radiazioni solari, e quindi dal giorno alla notte, dall'estate all'inverno, ecc.

Un altro fenomeno, del quale rende abbastanza bene conto il processo di propagazione descritto, è quello della *evanescenza* (o *fading*), il quale consiste in ciò, che in taluni punti ed in taluni momenti si avverte la improvvisa scomparsa dei segnali in ricezione. Tale fenomeno può spiegarsi ammettendo che in quei punti il segnale giunga contemporaneamente da più vie, in relazione alle anfrattuosità ed irregolarità degli strati ionizzati. Quando ciò avvenga, l'intensità del campo alla ricezione, come facilmente si comprende, corrisponde alla somma (geometrica) dei singoli

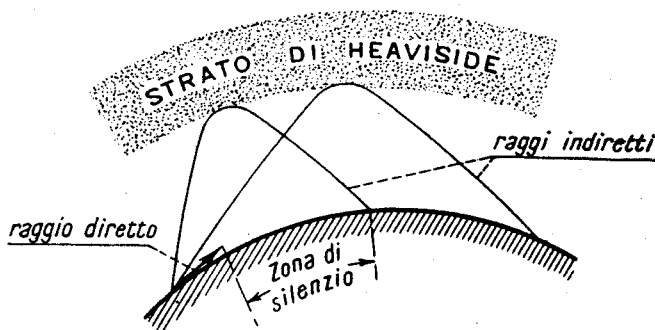



Fig. 206

campi dovuti ai vari raggi d'onda. Ora, per effetto delle varie lunghezze dei cammini seguiti, questi possono non giungere ai punti di ricezione in concordanza di fase, ed allora ne può seguire anche un annullamento del campo, qualora ad es. si tratti di due raggi che giungono nella stessa direzione attraverso cammini le cui lunghezze differiscono di mezza lunghezza d'onda. Data la rapida variabilità della costituzione e della distribuzione degli strati ionizzati, tali fenomeni hanno il carattere specifico della breve durata e della variabilità locale.

Meno semplice è l'esame del comportamento dei raggi atmosferici per onde medie e lunghe. Per le onde medie si osserva in generale che la propagazione notturna è nettamente migliore della diurna, e ciò si spiegherebbe pensando che di giorno gli strati ionizzati si estendono fino a distanza relativamente breve dal suolo dove, la pressione essendo notevole, è pure notevole l'assorbimento, per cui il percorso dei raggi nella ionosfera si accompagna con forte attenuazione, e pertanto la trasmissione risulta praticamente affidata ai soli raggi diretti. Di notte invece, elevandosi il limite inferiore degli strati ionizzati, la zona di ricezione dei raggi diretti si prolunga, per così dire, con una in cui sono ancora sensibili i raggi indiretti; in altre parole, in luogo della zona d'ombra carat-

teristica delle onde corte, si ha una parziale sovrapposizione delle due zone di ricezione relative ai raggi diretti ed agli indiretti. Naturalmente, un tale stato di cose può verificarsi a condizione che la lunghezza d'onda non sia troppo piccola. Invero si osserva per es. che le onde intorno a $\lambda = 100$ m non si prestano per trasmissione a grande distanza, e ciò si spiega pensando che il raggio diretto non ha una portata convenientemente ampia, e che il raggio indiretto, prima di ritornare al suolo, compie un percorso troppo lungo in regioni assorbenti.

Per le onde lunghe il comportamento dei raggi atmosferici è ancora più complesso. Innanzi tutto, specialmente di giorno, essi attraversano regioni ionizzate in cui è piuttosto elevato il numero f di urti per m^3-sec; per cui, come si deduce dalla (21), il raggio viene praticamente assorbito dopo un percorso molto breve. Non si può pertanto pensare ad un ritorno al suolo per effetto di *rifrazione*.

Si può invece però verificare un effetto di « riflessione », come se la ionosfera fosse un conduttore pressochè perfetto. Di ciò possiamo agevolmente renderci conto pensando che nel caso attuale la costante dielettrica apparente della ionosfera assume valori negativi. In tali condizioni, la propagazione attraverso la superficie di separazione fra l'atmosfera ordinaria ($\varepsilon = \varepsilon_0$, $\gamma = 0$) e la ionosfera ($\varepsilon < 0$, $\gamma > 0$) può studiarsi con l'aiuto delle formole di App., *C*, 6, dove alle costanti ivi indicate con $\varkappa_1$ e $\varkappa_2$ spetteranno un valore reale per la prima, un valore puramente immaginario per la seconda. Ne segue che il coefficiente di riflessione $\dfrac{\varkappa_1 - \varkappa_2}{\varkappa_1 + \varkappa_2}$ risulta di modulo unitario, il che significa che si ha a che fare con una riflessione completa, cioè, come si suol dire, di tipo *metallico* (¹).

Il problema può allora schematizzarsi pensando che la propagazione si compia in una atmosfera omogenea, limitata ad uno spazio compreso fra due superficie perfettamente riflettenti, grossolanamente assimilabili a due sfere concentriche. La relativa trattazione analitica non è molto facile; qui ci limiteremo ad asserire che essa, nell'ipotesi che la ionosfera si trovi all'altezza di 100 km, dà luogo a risultati in buon accordo con la formola di Austin.

In generale, si può ritenere, con Eckersley, che la ionosfera, per le onde più corte, tende a comportarsi come un dielettrico, rinviando i raggi atmosferici al suolo per effetto di rifrazione, mentre per le onde più lunghe essa ha comportamento di tipo conduttivo ed il rinvio avviene per effetto di riflessione. Inoltre, nei casi in cui predomina il primo com-

---

(¹) Si può vedere che, nel secondo mezzo, le oscillazioni non presentano più il carattere della propagazione, ma quello della stazionarietà con ampiezza rapidamente attenuantesi con l'allontanarsi dalla superficie di separazione. Infatti, essendo $\varkappa_2$ puramente immaginario, l'espressione del campo $\mathbf{F}$ risulta del tipo $\mathbf{F}_0 e^{-jkx}$ con k reale.

portamento, si deve tener conto dell'assorbimento, il quale è tanto maggiore quanto minore è la frequenza. Di massima, si può ritenere che, specie durante il giorno, prevalga il comportamento di tipo conduttivo per $\lambda > 1$ km, quello di tipo dielettrico per $\lambda < 100$ m, mentre per 100 m $< \lambda <$ 1000 m, e quindi in particolare per le onde medie, si ha un comportamento di tipo misto, cui consegue in ogni caso una scarsa efficienza dei raggi atmosferici.

19. - Altezza degli strati ionizzati. — Prima di lasciare queste considerazioni, accenneremo alla nozione di *altezza* degli strati ionizzati, la quale non ha carattere assoluto, ma risente necessariamente dei metodi usati per determinarla. Questi si fondano essenzialmente sulla valutazione

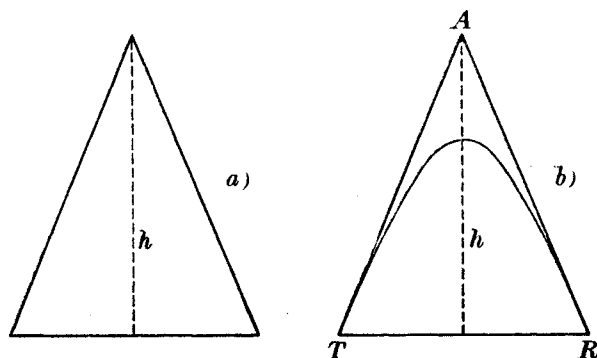



Fig. 207

del tempo decorrente fra la emissione di un segnale ed il suo arrivo al suolo. Ora, se il percorso del raggio si verificasse esclusivamente entro il mezzo non ionizzato ed il ritorno al suolo avvenisse per riflessione, il percorso stesso avrebbe l'aspetto indicato in fig. 207 *a*); e, potendosi ritenere la velocità coincidente con c, dal tempo predetto si potrebbe dedurre il cammino percorso e quindi, nota la distanza fra il trasmettitore ed il ricevitore, l'altezza della superficie riflettente.

In effetto invece il percorso del raggio è piuttosto del tipo di fig. 207 *b*); esso è cioè un po' più breve del precedente, ma la parte curva di esso viene percorsa con velocità minore. Si potrebbe dimostrare che, almeno in prima approssimazione, il tempo decorrente fra la partenza e l'arrivo del segnale equivale a quello che impiegherebbe un raggio viaggiante sempre con velocità c per coprire un percorso TAR analogo a quello di fig. 207 *a*) e determinato dalle tangenti estreme al tratto curvo della traiettoria effettiva. In altre parole si valuta l'altezza h come se si fosse nelle condizioni del primo caso.

A tale altezza h si dà il nome di *altezza apparente*.

Si potrebbe obbiettare che nella ionosfera la velocità di fase è in generale superiore a c (cfr. n. 14). Ma qui non si allude alla velocità di fase, bensì alla così detta *velocità di gruppo* la cui nozione riposa sulle considerazioni che andiamo ad esporre nel num. seguente.

20. - Velocità di gruppo. — Un segnale di tipo sinusoidale di pulsazione ω, ma di durata *limitata*, rappresentato cioè da un diagramma come quello di fig. 208, non è una funzione periodica del tempo, e come tale non può rappresentarsi con una serie di Fourier, bensì — come ogni fun-

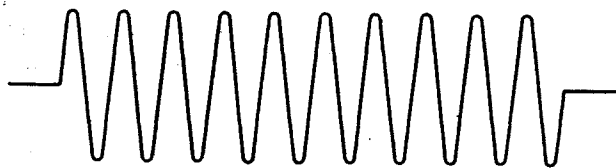



Fig. 208

zione regolare — con un integrale di Fourier, cioè con una espressione del tipo

$$\int_0^\infty A(\omega) \cos \omega t \, d\omega ,$$

che può intendersi rappresentare una somma di infinite funzioni sinusoidali di pulsazioni multiple di una fondamentale infinitesima $d\omega$.

Nel caso della funzione che stiamo esaminando, è quasi intuitivo — e del resto la cosa può rigorosamente dimostrarsi — che la funzione $A(\omega)$ rappresentatrice della legge di distribuzione delle ampiezze in funzione della pulsazione generica, avrà valori sensibili in un piccolo intervallo $(\omega_0 - \varepsilon, \omega_0 + \varepsilon)$ attorno ad ω e la semilarghezza ε di questo, che sarebbe rigorosamente nulla se il diagramma dato si estendesse indefinitamente nel tempo, sarà tanto più piccola quanto maggiore è la «lunghezza» (finita) del diagramma stesso. Talchè, la funzione del tempo a questo corrispondente potrà rappresentarsi con un integrale come quello sopra scritto, ma limitato all'intervallo $(\omega_0 - \varepsilon, \omega_0 + \varepsilon)$ anzichè fra 0 e ∞.

La consueta rappresentazione mediante numeri complessi potrà farsi mediante l'espressione:

$$\int_{\omega_0-\varepsilon}^{\omega_0+\varepsilon} A(\omega) e^{j\omega t} \, dt .$$

Ora, se un tale diagramma corrisponde all'andamento temporale di un fatto e. m. (per es., un'onda piana) che si propaga con una velocità

di fase *funzione della frequenza*, la distribuzione spazio-temporale della grandezza considerata sarà data dall'integrale

$$f(x,t) = \int_{\omega_0-\varepsilon}^{\omega_0+\varepsilon} A(\omega) e^{j(\omega t - \alpha x)} \, dt$$

dove, essendo v la velocità di fase relativa alla pulsazione generica ω, si è, al solito, posto $\alpha = \frac{\omega}{v}$.

Data la piccolezza d'intervallo di integrazione, potremo in esso ritenere

$$\alpha = \alpha_0 + \left(\frac{d\alpha}{d\omega}\right)_0 \Delta\omega \qquad (\Delta\omega = \omega - \omega_0),$$

(dove l'indice 0 corrisponde ai valori calcolati per $\omega = \omega_0$) e quindi si potrà scrivere

$$f(x,\, t) = e^{j(\omega_0 t - \alpha_0 x)} \int A(\omega) e^{j\Delta\omega\left[t - x\left(\frac{d\alpha}{d\omega}\right)_0\right]} d\omega\,.$$

Sotto questo aspetto, la $f(x, t)$, per ogni determinato valore di t, si presenta formalmente come una funzione sinusoidale del posto, di pulsa-

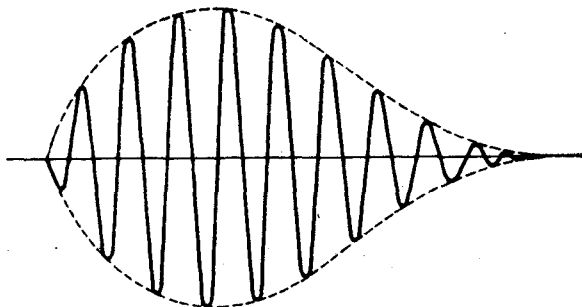



Fig. 209

zione α_0, la cui ampiezza e fase sono definite dall'integrale che figura a secondo membro e che brevemente indicheremo con **A**, ma non si tratta di una funzione sinusoidale in quanto che **A** dipende da x, talchè il diagramma di $f(x, t)$ presenta l'aspetto (simile a quello incontrato nel Cap. III, dovuto alla sovrapposizione di più sinusoidi di frequenze molto prossime) di una « sinusoide » di ampiezza variabile con x, cioè di una curva sinuosa il profilo delle cui « creste » ha un certo aspetto, determinato appunto dalla espressione **A** (fig. 209).

Ora si osserva che in **A** la variabile x entra soltanto nella combinazione $t - x\left(\frac{d\alpha}{d\omega}\right)_0$, e ciò, secondo un noto ragionamento (vedi App., C, 5),

sta ad indicare che col procedere del tempo il profilo predetto si propaga con una velocità misurata da $\left(\frac{d\omega}{da}\right)_0$.

È questa appunto quella che si chiama la *velocità di gruppo* delle onde elementari (sinusoidali indefinite) in cui può pensarsi decomposto il dato diagramma. La nozione di velocità di gruppo essendo data in relazione ad ogni particolare pulsazione ω_0, essa deve intendersi valere per un'onda effettiva composta di elementi le cui pulsazioni componenti sono comprese in un intorno convenientemente piccolo di ω_0. Ovviamente poi essa presenta interesse soltanto nel caso in cui la velocità di fase vari effettivamente con la frequenza, cioè quando a non sia proporzionale ad ω.

A titolo di esempio procederemo alla effettiva calcolazione della velocità di gruppo v_g nel caso che interessa le considerazioni svolte nel n. prec., quello cioè di un gas ionizzato per il quale la costante dielettrica apparente, e quindi anche la velocità v_φ di propagazione della fase, variano con la frequenza. Precisamente, se prescindiamo dalle alterazioni determinate dagli urti molecolari, l'espressione approssimata di a per un gas contenente N ioni (di carica e, massa m) per m^3, è

$$a = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{Ne^2 4\pi^2 c^2}{m\omega^2}} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{4\pi^2 Ne^2}{m}},$$

da cui

$$\frac{da}{d\omega} = \frac{\omega}{ac^2}.$$

Essendo $\frac{a}{\omega} = v_\varphi$, se ne ricava l'interessante relazione

$$v_\varphi v_g = c^2$$

tra la velocità di fase v_φ e quella di gruppo v_g relative ad una pulsazione generica ω.

In particolare si vede che, per $v_\varphi > c$, risulta necessariamente $v_g < c$, come asserito nel n. prec.

CAPITOLO DECIMO

GENERATORI A SCINTILLA E AD ARCO ALTERNATORI AD ALTA FREQUENZA

1. - Principio del generatore a scintilla. - Spinterometro. — Come abbiamo veduto nel Cap. III, un circuito contenente in serie una capacità C, una induttanza L, ed una resistenza R sufficientemente piccola, è atto a divenire sede di correnti oscillatorie, la cui pulsazione, con una conveniente scelta dei valori di R, L, C, può rendersi, almeno in via teorica, grande a piacere. Tali correnti sono ben lungi dall'essere paragonabili alle correnti alternate permanenti, in quanto, come abbiamo visto, sono caratterizzate da una rapida diminuzione della ampiezza; tuttavia, per il loro carattere oscillatorio ad alta frequenza, esse si prestano ad essere irradiate a mezzo di un'antenna. Anzi, nei primi anni delle applicazioni pratiche della radiotelegrafia, è solo di esse che si poteva far uso, perchè la tecnica non era ancora in possesso di dispositivi atti a generare correnti alternate permanenti di elevatissima frequenza.

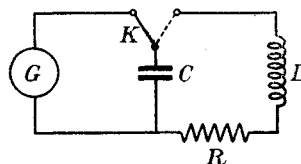



Fig. 210

La scarica oscillante del condensatore costituente la capacità C è in generale di durata assai breve; e pertanto se si vuole realizzare un fenomeno avente un certo carattere di continuità occorre provvedere ad una frequente ripetizione della carica. Ciò potrebbe pensarsi ottenuto con uno schema del tipo indicato in fig. 210 dove il commutatore K venga alternativamente mantenuto chiuso a sinistra sul generatore G finchè si effettua la carica del condensatore C, e successivamente a destra per consentirne la scarica attraverso il circuito L, R. Tali manovre dovrebbero però seguirsi a brevissimi intervalli di tempo, data la rapidità con cui si compiono i processi di carica e scarica, e si comprende quanto sarebbe difficile conseguire ciò, con la necessaria regolarità e tempestività, a mezzo di comandi meccanici.

Lo scopo può invece raggiungersi molto opportunamente mediante l'uso di uno *spinterometro*, cioè di un sistema costituito da due elettrodi

separati da un piccolo spazio d'aria, detto spazio spinterometrico, nel quale si fa scoccare una scintilla; e pertanto un sistema siffatto prende il nome di *generatore a scintilla*. Un tale spazio invero presenta proprietà isolanti finchè la d. d. p. ad esso applicata è inferiore ad un certo valore, dipendente essenzialmente dalla distanza fra gli elettrodi; ma quando è raggiunta la così detta tensione disruptiva, la ionizzazione prodotta dal corrispondente campo elettrico fa sì che lo spazio stesso si lascia attraversare da corrente (fenomeno della scarica); il riscaldamento che ne consegue favorisce vieppiù la ionizzazione, cosicchè lo spazio predetto si comporta come una debolissima resistenza. Se però la corrente cessa, anche per un tempo brevissimo, si ristabiliscono le condizioni primitive e lo spazio spinterometrico riprende le sue proprietà isolanti. A titolo di esempio, diciamo che uno spazio di circa 7 mm presenta resistenza praticamente infinita finchè la tensione è inferiore a circa 20 kV, mentre, una volta iniziata la scarica attraverso la scintilla, la resistenza stessa può scendere, per una forma appropriata dei terminali dello spinterometro, a soli 5 ohm.

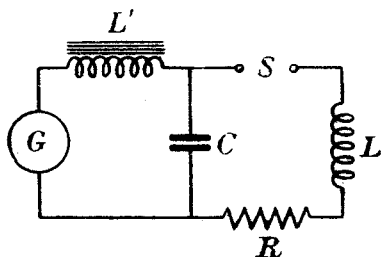
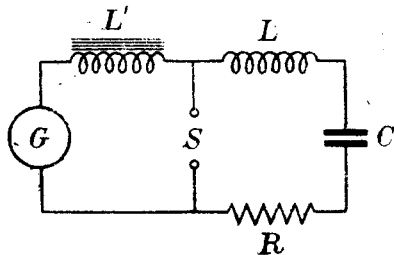



Fig. 211

Si comprende allora come, a mezzo di un tale dispositivo spinterometrico, si possa realizzare lo scopo che ci eravamo prefissi. Basterà all'uopo connettere il circuito R, L, C col generatore nel modo indicato nello schema di fig. 211, dove S rappresenta lo spinterometro ed L' è una forte induttanza il cui ufficio è quello di opporre una notevole impedenza alle correnti di alta frequenza ed impedire così che la corrente oscillatoria di scarica del condensatore si chiuda attraverso il generatore G.

Fig. 212

Con una disposizione del tipo indicato, la tensione ai capi di C, durante la carica, sale gradatamente fino al valore della tensione del generatore, che supporremo costante, mentre dovremo pensare che lo spazio spinterometrico sia regolato per una tensione disruptiva lievemente inferiore.

Se si fa il rapporto fra la energia che a carica finita si trova immagazzinata nel condensatore, e quindi potrà venire erogata durante la scarica, e quella spesa durante la carica, si trova che esso non può superare 0,5. Invero, l'energia spesa equivale al prodotto della tensione E per il totale impulso della corrente (El., III, 1) che ovviamente corrisponde alla carica Q accumulata sulle armature del condensatore, mentre, se si

indica con E' (certamente minore di E, sia pur di poco) la tensione alla quale si inizia la scarica, l'energia liberata da questa vale $\frac{1}{2}E'Q$, minore della metà della precedente.

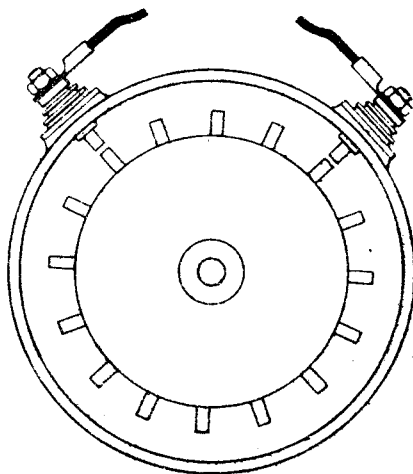
Si può migliorare il rendimento, osservando che è possibile (III, 6) raggiungere durante la carica tensioni E' superiori a quella E del generatore. All'uopo basta che il circuito di carica abbia carattere oscillatorio. Ciò può ad es. ottenersi disponendo gli elementi del circuito nel modo indicato in fig. 212 (¹). Di questo artificio si è servito Marconi nei suoi primi esperimenti di radiotrasmissione di segnali.

2. - **Potenza. - Modi per elevarla. - Spinterometro rotante.** — Ogni scarica comporta una serie di oscillazioni smorzate, o, come si suol dire, un « treno » di oscillazioni, la cui durata è teoricamente infinita; ma in pratica la corrente si riduce a valori inapprezzabili dopo un tempo assai breve, in generale dell'ordine di 10^{-4} secondi. Per mettere in gioco potenze di una certa entità, risulta quindi necessario far seguire i treni a breve distanza l'uno dall'altro. Se n è il numero di tali treni al secondo, e V la tensione di carica del condensatore, la corrispondente potenza P sarà evidentemente data da:

Fig. 213

$$P = \frac{1}{2} nCV^2 .$$

Della capacità C non si potrà disporre che in limiti ristretti, in quanto che essa ed L sono legate alla frequenza che si vuole ottenere. Si comprende dunque che per ottenere grandi potenze occorre elevare o V o n, o meglio entrambi.

Per disporre di elevati valori di V, si potrebbe ricorrere al rocchetto di Ruhmkorff, la cui corrente primaria può venire interrotta con ritmo abbastanza celere, ma più semplicemente ci si può valere della corrente alternata, mediante la quale è facile, disponendo di un opportuno trasformatore elevatore, raggiungere valori notevoli di V, realizzando contemporaneamente una certa rapidità nel ritmo delle successive cariche, in

(¹) È da rilevarsi che la pulsazione dell'oscillazione di carica è in generale notevolmente diversa da quella della scarica, giacchè la prima è determinata dalla capacità C e dalla induttanza $L + L'$ (oltre l'eventuale induttanza interna del generatore), mentre per la seconda la C è interessata soltanto insieme ad L.

quanto che ovviamente si può far partire un treno per ogni semiperiodo (1). All'uopo converrà far uso di frequenze relativamente elevate, dell'ordine di 200 ÷ 500 Hz, facilmente ottenibili con generatori elettromeccanici, con che si può disporre di 400 ÷ 1000 treni al secondo.

Elevando il ritmo dei treni, si incontra però un'altra difficoltà, dipendente dal fatto che lo spazio spinterometrico non ha, per così dire, il tempo di disionizzarsi fra la fine di una scarica e l'inizio della successiva, in conseguenza di che tutto il processo descritto tende a venire frustrato.

A ciò si pone rimedio mediante l'uso dello spinterometro rotante. Un tale apparecchio è costituito da un disco isolante (fig. 213) sulla cui periferia sono fissate radialmente delle punte metalliche, fra loro in comu-

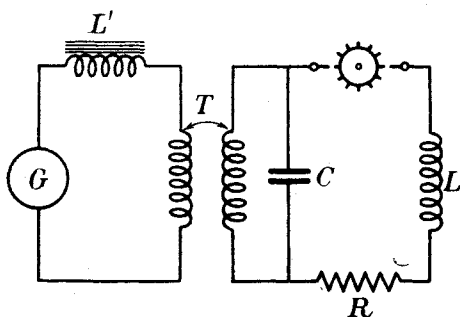
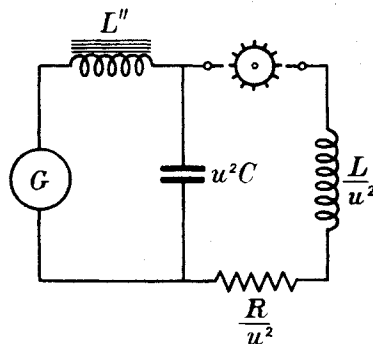



Fig. 214 a) Fig. 214 b)

nicazione elettrica mediante una corona metallica. Il disco può ruotare intorno al suo asse in guisa che le punte di esso vengano successivamente ad affacciarsi a due punte, costituenti gli elettrodi fissi dello spinterometro. Lo spazio spinterometrico è così costituito dai due intervalli d'aria che corrono fra gli elettrodi fissi e le punte ad essi affacciate. Quelli sono messi in comunicazione con la sorgente, generalmente costituita da un alternatore di frequenza opportuna, il cui rotore è solidale col disco, e questo viene calettato in modo che il passaggio delle punte mobili davanti alle fisse si verifichi esattamente al momento in cui la tensione al condensatore è massima.

Il vantaggio dello spiterometro rotante, in confronto di quello ad estremità fisse, consiste nel fatto che la ventilazione conseguente alla rapida rotazione facilita il raffreddamento delle punte e la pronta disionizzazione; con che si consegue una grande regolarità di funzionamento del sistema anche con elevati valori della «frequenza» (2) n dei treni.

(1) Si potrebbe anche far scoccare la scintilla allo spinterometro più volte in un semiperiodo, ma un tale sistema lascierebbe a desiderare dal lato della regolarità.

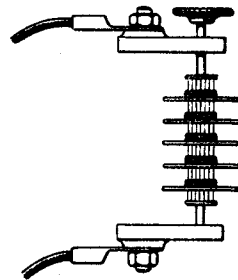
(2) Questa frequenza non è da confondersi con la frequenza delle oscillazioni componenti ciascun treno.

In generale tale numero n ha valori dell'ordine di alcune centinaia, per modo che i successivi rumori prodotti delle singole scintille hanno ritmo acustico e quindi danno luogo ad una nota musicale ben definita. Per tale ragione un sistema come quello descritto si chiama *a scintilla musicale*. La fig. 214 *a*) ne rappresenta lo schema: G è il generatore, L' una induttanza regolabile che, insieme a quella del generatore, impedisce alle oscillazioni d'alta frequenza di invadere gli avvolgimenti di G e del trasformatore T. Sostituendo al trasformatore il suo circuito equivalente (El., XIII, 4, 6), si perviene all'equivalente schema (fig. 214 *b*)) dove al posto del condensatore C ne compare uno di capacità u^2 volte maggiore, se u è il rapporto fra la tensione d'uscita e la tensione d'entrata del trasformatore, ed al posto di L una induttanza u^2 volte minore, ed L'' comprende, insieme al valore della primitiva induttanza L', anche le induttanze di dispersione del trasformatore, mentre la reattanza d'eccitazione di questo è intesa conglobata con quella del generatore. È evidente che, per meglio sfruttare la tensione di alimentazione, conviene far sì che il circuito di carica sia in risonanza con la frequenza del generatore. Per conseguire tale scopo si costituisce L' con una induttanza variabile, onde poterne regolare il valore in modo che la reattanza complessiva del circuito di carica risulti nulla.

3. - Accoppiamento all'antenna. - Sistemi a scintilla spenta. - Diagrammi di trasmissione. — Un tale sistema deve poi completarsi con l'antenna trasmittente. Avendo presente che questa è sostanzialmente equivalente ad un circuito del tipo R, L, C, si potrebbe senz'altro sostituirla al circuito di scarica del condensatore. Ma generalmente invece conviene meglio accoppiarla magneticamente al sistema precedente, che può ben chiamarsi il sistema generatore.

Fig. 215

Senonchè bisogna in generale accontentarsi di un accoppiamento piuttosto lasco per evitare che il sistema generatore-antenna presenti due frequenze di risonanza assai diverse fra loro (III, 19).

Si può però anche far uso di un accoppiamento stretto, senza temere l'inconveniente della doppia frequenza, utilizzando l'artificio indicato in III, 19. A tale scopo si usano spinterometri speciali (di Wien) in cui lo spazio spinterometrico è frazionato in molte piccole parti (fig. 215). Siccome la tensione disruptiva cresce più rapidamente della distanza fra gli elettrodi, si comprende che, a parità di tensione disruptiva totale, si possono avere modestissimi valori di ogni singolo spazio con conseguente maggiore facilità di regolazione e minore valore complessivo della resistenza delle scintille. Con alcuni acconci accorgimenti — scelta opportuna

del metallo (generalmente tungsteno), alette di ventilazione — si può ottenere il rapidissimo spegnimento della scintilla, talchè in pratica questa si estingue dopo due o tre oscillazioni.

Con tali spinterometri si può, come si è detto, impunemente stringere l'accoppiamento con evidente miglioramento del rendimento del sistema. Si realizza così il così detto sistema *a scintilla spenta*.

Con un generatore a scintilla non si possono ottenere, come si disse, che dei treni di oscillazioni smorzate, per cui il diagramma della corrente si presenterà come indicato nella fig. 216 *a*), dove, ad es., nel caso

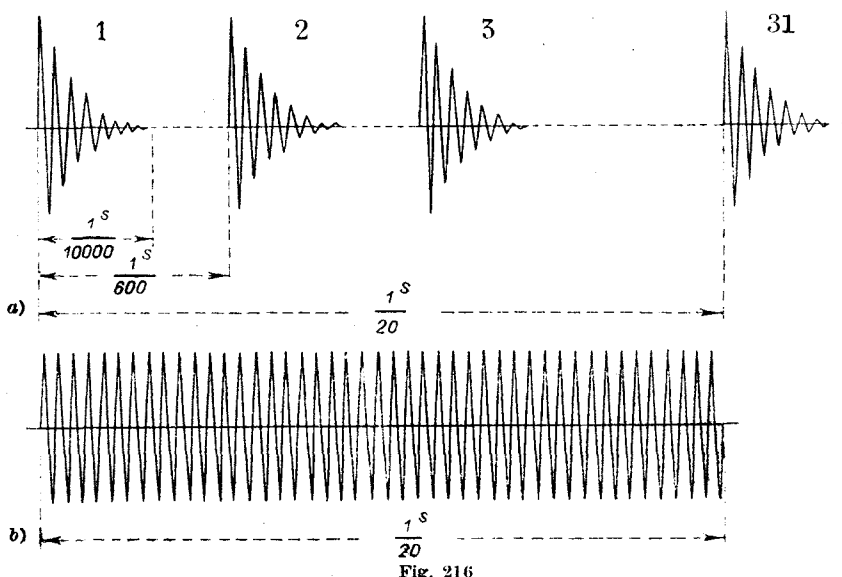



Fig. 216

di scintilla musicale a 600 Hz, la distanza fra gli inizi di due treni successivi sarà di 1/600 di secondo, laddove la durata pratica di ogni treno potrà essere di circa 10^{-4} sec. Per realizzare una trasmissione di segnali, ad es. punti e linee, basterà far funzionare il sistema per la durata di 1/20 di secondo per i primi, circa tripla per i secondi; si otterrà così per ogni punto un gruppo di 30 treni, per ogni linea un gruppo di 90 treni, separati gli uni dagli altri da convenienti intervalli.

4. Proprietà dell'arco voltaico. - Principio del generatore ad arco. — Fino dai primordi della radiotelegrafia, gli sforzi dei tecnici furono diretti a stabilizzare le oscillazioni ottenute dalla scarica di un condensatore, cioè a sostituire alle correnti smorzate delle correnti di carattere permanente, usando le quali un gruppo di treni come quello raffigurato in fig. 216 *a*) verrebbe sostituito con una corrente alternata di ampiezza costante di equivalente durata, come indicato nel diagramma fig. 216 *b*).

Un passo notevolissimo in questo senso si ebbe in seguito all'applicazione che il Poulsen fece delle proprietà dell'arco voltaico, mediante il quale già il Duddell era riuscito ad ottenere correnti alternate permanenti in circuiti appropriati.

La proprietà fondamentale dell'ordinario arco fra elettrodi di carbone o metallici consiste in ciò, che la tensione ai capi varia con la corrente attraversante l'arco secondo una legge non ohmica. Più precisamente la curva caratteristica (i, v) di un tale arco ha andamento discendente (fig. 217) il che, come sappiamo (VII, 3) sta ad indicare che *la conduttanza differenziale è negativa*. Si comprende quindi che un tale apparecchio, disposto in serie con un sistema R, L, C, può, se la scelta delle costanti è opportunamente fatta, consentire l'annullamento degli effetti di R nel corrispondente circuito differenziale, e questo pertanto può divenire sede di corrente alternata permanente la cui pulsazione sarà determinata unicamente dai valori di L e di C.

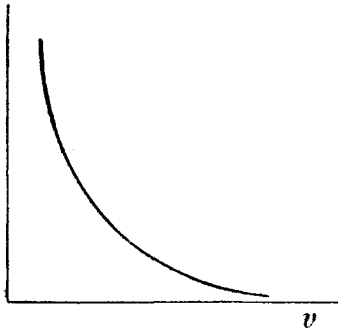



Fig. 217

Un dispositivo atto allo scopo può essere quello corrispondente allo schema di fig. 218, che sostanzialmente rientra nel tipo studiato in VII. 4 (fig. 133). La induttanza L' in serie col generatore G di tensione continua consente che la corrente nel ramo di sinistra non vari sensibilmente anche se intervengono notevoli variazioni della tensione fra i capi dell'arco, in quanto che essa, col suo valore assai elevato, mette in essere f. e. m. capaci di fronteggiare tali variazioni senza che intervengano sensibili variazioni della corrente nel ramo stesso, cosicchè questa si stabilizza ad un certo valore I_0 (¹). Il ramo di destra può divenire sede di tensioni variabili — e vedremo che in realtà ciò avviene — le quali riescono applicate ai capi dell'arco ed originano una corrente variabile i che percorre il ramo di destra e si chiude attraverso l'arco stesso, il quale è inoltre sempre attraversato dalla corrente costante I_0.

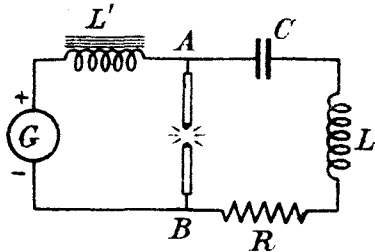



Fig. 218

La corrente variabile i può pensarsi in definitiva circolare, isolatamente, in un circuito (differenziale) comprendente in serie la R, la L e la C che

(¹) Precisamente $= \dfrac{E}{r + r' + r''}$ dove E è la f. e. m. del generatore, r la sua resistenza interna, r' quella della bobina L', ed r'' la resistenza dell'arco nel punto di riposo (VII, 3).

costituiscono il ramo di destra, ed inoltre la resistenza differenziale dell'arco. Siccome questa è negativa, basta regolare le cose in guisa che il suo valore assoluto uguagli R, perchè il circuito differenziale si riduca ad equivalere ad un circuito ideale di costanti L, C.

Le nostre deduzioni generali (VII, 6) ci consentono di asserire che nel ramo di destra la corrente i sarà alternativa sinusoidale [1] di pulsazione $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ e di ampiezza costante. Tuttavia è istruttivo rendersi fisicamente conto del processo effettivo in seguito al quale il sistema diviene atto alla generazione di una corrente alternata permanente circolante nel ramo di destra.

All'uopo, dopo aver osservato che la corrente fornita dal generatore G non può praticamente variare, a causa della presenza della grande induttanza L', riflettiamo che, se all'inizio dell'operazione il condensatore C è scarico, la tensione che risulta applicata ai punti A e B determina da un lato l'accensione dell'arco, dall'altro l'inizio della carica del condensatore, la quale (III, 6) *si verificherebbe* con regime oscillatorio smorzato [2], cioè con una corrente di carica la cui legge di variazione nel tempo, analogamente a quanto vedemmo in III, 3, 6, sarebbe del tipo:

$$i = \frac{V_0}{\omega L} e^{-\alpha t} \operatorname{sen} \omega t \qquad \left(\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \alpha^2}\right),$$

qualora la tensione applicata fosse costante.

Ma nel caso attuale, a causa della costanza di I_0, cioè della somma della corrente di carica e di quella fluente nell'arco, avviene che ogni valore di i diverso da zero rappresenta altrettanta intensità di corrente sottratta (ben inteso, in senso algebrico) all'arco, e pertanto si verificheranno contemporanee variazioni della d. d. p. V fra i punti A e B. Precisamente, avendo presente la forma discendente della caratteristica dell'arco, si deduce che ogni qualvolta la i ha il senso da B verso A o l'opposto, si avranno aumenti, rispettivamente diminuzioni di V, cioè, in definitiva, variazioni di V sempre tali da combattere l'azione deprimente del fattore di smorzamento $e^{-\alpha t}$ [3]. Si comprende come, regolando opportunamente le cose, si possa anche pervenire ad una compensazione completa, nel qual caso la oscillazione della corrente i nel ramo di destra

---

(1) Semprechè si possa considerare costante il valore della resistenza differenziale dell'arco nel tratto della caratteristica che è interessato al processo.

(2) Si suppone che R sia inferiore alla resistenza critica del sistema (III, 3).

(3) Si potrebbe dimostrare che la variazione di V avviene pure con legge esponenziale del tipo $V_0 e^{\beta t}$, ma con esponente $\beta > 0$; e contemporaneamente ω varierà assumendo il valore $\sqrt{\frac{1}{LC} - (\alpha - \beta)^2}$.

perde il carattere smorzato e può svolgersi con ampiezza costante. Nell'arco tale corrente i si sovrapporrà alla corrente costante I_0 fornita da G.

Per quanto riguarda le relazioni energetiche, riflettiamo che il circuito differenziale (VII, 4) corrispondente al sistema in esame comprende gli elementi R, L, C del ramo di destra, in serie con la resistenza differenziale negativa dell'arco. Richiamando quanto fu stabilito in generale, si conclude che l'arco, rispetto al circuito differenziale, funziona da generatore — della corrente alternata — fornendo potenza in misura corrispondente alla dissipazione che si ha in R. Siccome però il circuito di riposo, costituito dal generatore G e dall'arco *supposto percorso dalla corrente costante* I_0, eroga potenza costante, ciò significa che la potenza ap-

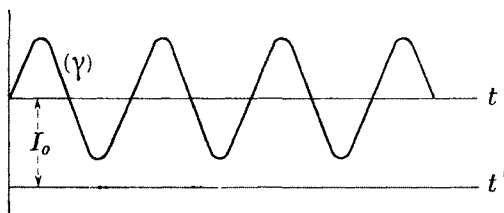



Fig. 219

parentemente fornita dall'arco ad R è sostanzialmente sottratta all'arco stesso. Il sistema è dunque un (parziale) convertitore di energia atto a trasformare della energia di corrente continua in altrettanta sotto forma di corrente alternata.

5. Oscillazioni di prima, di seconda e di terza specie. - Arco Poulsen. — Il Duddell, alla fine del secolo scorso, derivando su un arco un sistema R, L, C, riuscì ad ottenere nel ramo derivato delle correnti aventi frequenze dell'ordine di alcune migliaia di Hz ([1]). La corrente nell'arco viene a variare con lo stesso ritmo; ne conseguono variazioni sincrone delle sue condizioni fisiche ed analogo movimento dell'aria circostante; e poichè la frequenza di tale movimento appartiene alla gamma dei suoni udibili, l'arco emette una nota musicale (*arco cantante*) la cui altezza può essere modificata regolando le costanti L e C del circuito oscillatorio.

Le oscillazioni che possono prodursi con l'arco si sogliono classificare in tre tipi:

1°) Oscillazioni *di prima specie*. – L'ampiezza della corrente alternata i nel circuito (L, C) è minore di I_0, e quindi la corrente nell'arco ha

([1]) Egli invero operava con circuiti di basso decremento (circa 0,03) costituiti da induttanze dell'ordine di 5 mH e capacità di 1 a 4 μF, cui corrispondono appunto valori della frequenza di circa 2 a 4 kHz.

andamento pulsante, senza mai passare per zero; pertanto l'arco non si spegne mai. Il diagramma di fig. 219 mostra l'andamento del fenomeno; la curva (γ) rappresenta la corrente in (L, C) se riferita all'asse t, la corrente nell'arco se riferita all'asse t', distante I_0 da quello.

2°) Oscillazioni *di seconda specie.* – L'ampiezza della corrente i supera I_0, e pertanto, per un breve tratto T_1 del periodo, l'arco resta spento (fig. 220).

3°) Nelle oscillazioni *di terza specie*, l'intervallo di spegnimento T_1 è invece relativamente lungo e la corrente, nel tempo T_2 che precede il

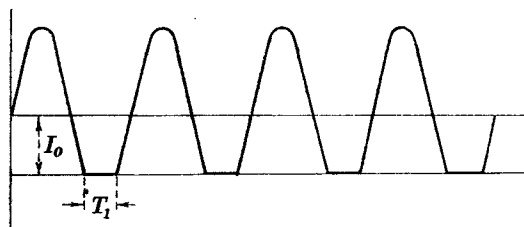



Fig. 220

suo annullamento, compie delle oscillazioni smorzate. Si ha quindi sostanzialmente una successione di treni (fig. 221), cioè un regime paragonabile a quello dei generatori a scintilla di cui ci siamo occupati nel n. prec. La frequenza dei treni è però qui determinata dai valori di L e C e quindi è in generale assai maggiore che in quelli.

Per la produzione di componenti alternate permanenti, è ovvio che il regime più adatto è il primo. Più precisamente, se si riflette che la po-

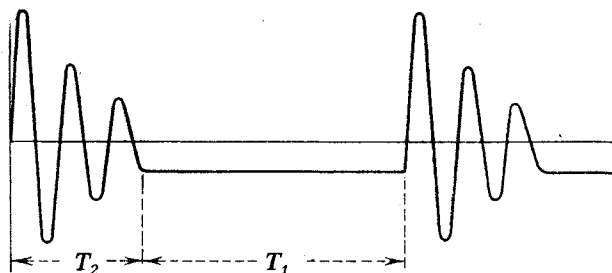



Fig. 221

tenza ricavabile in un circuito oscillante corrisponde al semiprodotto di R per il quadrato dell'ampiezza della componente alternata i, si conclude subito che converrà far sì che tale ampiezza sia la massima compatibile con la voluta forma di corrente. Per ciò occorre far funzionare

l'arco in guisa che essa uguagli I_0, cioè si dovrà operare al limite fra le oscillazioni di prima e di seconda specie. In tali condizioni il rendimento si avvicina a 0,5.

La frequenza è al solito determinata dai valori di L e di C; ma non riesce agevole raggiungere frequenze molto elevate essenzialmente perchè, a causa dell'inerzia termica degli elettrodi costituenti l'arco, la resistenza equivalente di questo non è capace di seguire le variazioni imposte dal regime oscillatorio quando la frequenza superi un certo limite.

Il Poulsen ha potuto superare tale difficoltà usando particolari accorgimenti e precisamente:

a) sostituendo all'ambiente ordinario una atmosfera di idrogeno (o di idrocarburi), che è ottimo conduttore del calore e facilita la diffusione degli ioni;

b) facilitando il movimento degli ioni stessi con l'imprimere loro una certa velocità mediante un intenso campo magnetico disposto trasversalmente all'arco, come schematicamente indicato in fig. 222;

c) costruendo l'anodo di rame e raffreddandolo con circolazione interna di acqua;

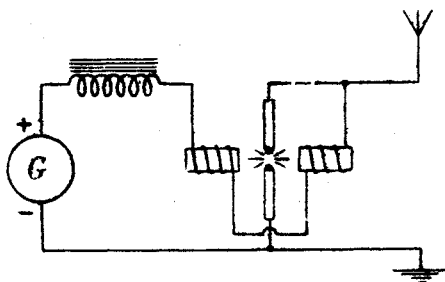
d) imprimendo al catodo, di carbone, un rapido moto rotatorio, diretto a regolarizzarne il consumo.

Con tali artifici — che tuttavia richiedono dispendi di energia e quindi danno origine a minorazione del rendimento globale — si possono effettivamente generare correnti oscillatorie di frequenze elevate, ma non oltre 300 kHz (1).

L'alimentazione di un'antenna mediante le correnti oscillatorie ottenute con l'arco può farsi, sia utilizzando l'antenna come circuito R, L, C, come indicato nella fig. 222, sia accoppiandola magneticamente alla L concentrata del circuito dianzi considerato.

Fig. 222

Parecchie stazioni r.t. sono state costruite utilizzando generatori ad arco Poulsen. Tra queste citiamo quella di Lafayette (Francia), nella quale due generatori ad arco provvedono ad inviare circa 500 kW al circuito d'antenna, alla frequenza di 12 a 15 kHz, quella di Leafield che lavora su una lunghezza di onda di 12 500 metri, quella di Croix d'Hins (Bordeaux).

Tali generatori ad arco Poulsen vanno ormai perdendo di importanza

(1) In qualche caso si è arrivati fino a circa 500 kHz.

pratica dopo che, coi metodi che apprenderemo nel prossimo capitolo, i tubi elettronici hanno consentito di costituire assai più semplicemente degli efficienti sistemi capaci di generare correnti alternate di frequenza praticamente qualunque.

6. Alternatori ad alta frequenza. — Prima di passare allo studio di tali apparecchi, vogliamo qui accennare che, almeno nel campo delle onde relativamente lunghe, il problema può essere risolto anche per via elettromeccanica, cioè con alternatori.

Se si vuole aumentare la frequenza delle tensioni fornite da un alternatore, non v'è che aumentare il numero dei poli e la velocità angolare. Ma si comprende agevolmente che tali aumenti trovano una rapida limitazione in ovvie necessità costruttive, per cui non è possibile, imitando gli ordinari alternatori, giungere a frequenze superiori a poche centinaia di Hz.

Tuttavia, ricorrendo ad opportune modificazioni di principio, si possono elevare sensibilmente tali limiti. A questi concetti sono informati gli alternatori ad alta frequenza di Béthenot-Latour e di Alexanderson.

Lo statore dell'alternatore di Béthenot-Latour funge da induttore a due poli, cioè tale da presentare polarità eteronime lungo ciascuna delle due metà dello spessore assiale della periferia interna. All'uopo l'avvolgimento di eccitazione e è disposto come in fig. 223 *a*) ed è percorso da corrente continua in guisa che le linee magnetiche, in ogni sezione trasversale della macchina, presentino un andamento come quello segnato in figura. Sulla periferia interna dello statore sono fissate le spire indotte, e la variazione di flusso attraverso esse è ottenuta foggiando a denti la periferia del rotore.

È evidente che, rispetto ad ogni spira indotta, il flusso passa così da un massimo, quando la spira è affacciata a un dente e quindi è minima la riluttanza del circuito magnetico con essa concatenato, ad un minimo quando davanti alla spira passa l'intervallo fra due denti. La variazione del flusso è dunque pulsante, anzichè alternativa come avviene negli ordinari alternatori. Essa pertanto potrà rappresentarsi con una espressione del tipo $\Phi_0 + \Phi_1$, dove Φ_0 è costante e Φ_1 ha variazione alternativa, di periodo corrispondente al tempo occorrente affinchè un dente sia sostituito dal successivo. La f. e. m. indotta nei fili risulterà proporzionale a $-\frac{d\Phi_1}{dt}$, ed avrà dunque quello stesso periodo.

Siccome i denti non portano avvolgimenti, si possono ad essi assegnare dimensioni assai ridotte, per modo che, spingendo al massimo la velocità angolare, si riesce agevolmente a realizzare frequenze di ordine abbastanza elevato, fino ad alcune decine di kHz. Se non che bisogna osservare che, come risulta dalla fig. 223 *b*), che rappresenta schematica-

mente lo sviluppo della superficie cilindrica interna dello statore con l'indicazione dei denti *d* del rotore, i tratti utili dei fili indotti fissati sullo statore, fra loro riuniti alternativamente sulle due fronti, debbono risultare disposti, come in ogni alternatore (El., XII, 1), a distanza di un semipasso, che nel caso attuale corrisponde a metà della distanza fra due denti rotorici. Da ciò segue che lo spessore dei denti riesce in definitiva limitato dallo spessore dei conduttori costituenti l'avvolgimento indotto. Tale limitazione può tuttavia venire ridotta mediante

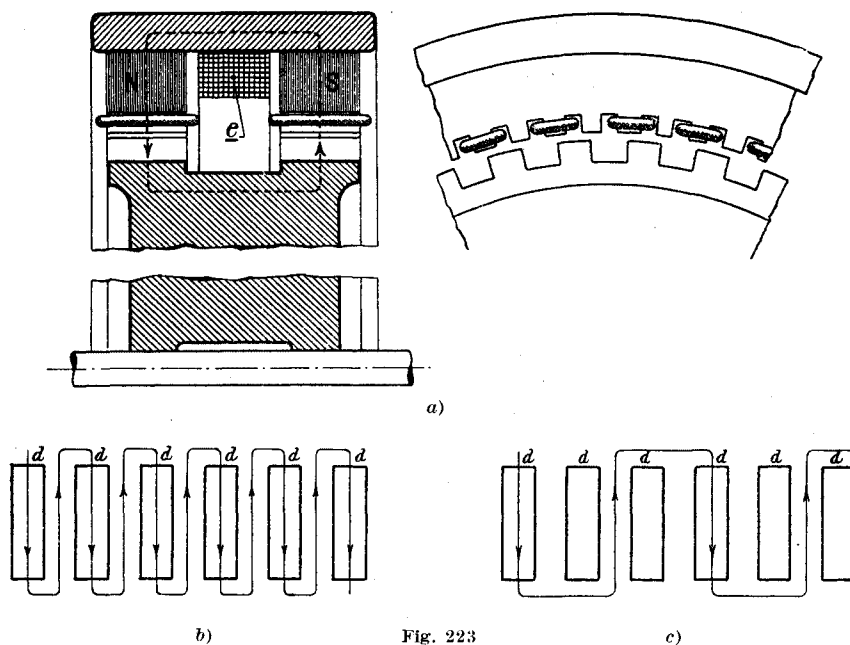



Fig. 223

l'artificio indicato in fig. 223 *c*), che consiste nel collocare i successivi tratti utili del filo indotto a distanze di tre (oppure cinque, sette, ecc.) semipassi anzichè uno solo.

Il tipo Alexanderson non differisce sostanzialmente dal Béthenot-Latour e si può anzi ritenere derivato da questo mediante una semplice modificazione di ordine meccanico, in quanto che la disposizione dell'interferro è in essa assiale anzichè radiale. Il rotore (fig. 224) è foggiato a solido di uguale resistenza rispetto alla forza centrifuga ed i denti sono ottenuti praticando, presso la periferia, delle finestre che vengono poi riempite di materiale (non magnetico) per diminuire la resistenza del mezzo.

Per elevare il rendimento di tali tipi di alternatori occorre manifestamente spingere al massimo la laminazione dello statore, onde diminuire

le perdite per correnti parassite, e ridurre al minimo tutte le resistenze passive, in particolare gli attriti e le resistenze del mezzo. A tale ultimo scopo la carcassa è generalmente chiusa ed il rotore viene fatto girare in un'atmosfera estremamente rarefatta.

A titolo di esempio, citiamo l'alternatore Béthenot-Latour installato alla stazione r.t. di Sainte Assise (Parigi), della potenza di 500 kW. Il

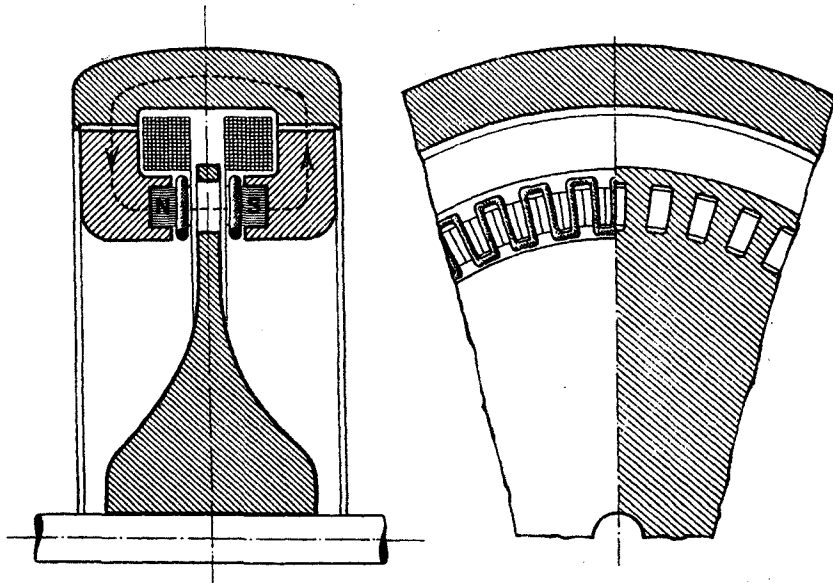



Fig. 224

rotore ha 360 denti e ruota con la velocità angolare di 2500 giri/min cui corrisponde la notevolissima velocità periferica di 150 m/sec. La frequenza risulta pertanto di:

$$\frac{2500 \cdot 360}{60} = 15\,000 \text{ Hz} ;$$

l'interferro è di un mm, e lo spessore delle lamine statoriche è di 0,1 mm.

7. - Moltiplicatore di frequenza Goldschmidt. — Per realizzare meccanicamente elevate frequenze, il Goldschmidt ha proposto un artificio diverso, fondato sulla proprietà fondamentale delle macchine asincrone, di operare, fra lo statore ed il rotore, trasformazione di frequenza secondo un rapporto uguale allo scorrimento (El., XIV, 3). In particolare, facendo girare il rotore con scorrimento 2, cioè con velocità uguale ed opposta a quella del campo statorico, si ottiene la duplicazione della frequenza, e, senza superare quel valore della velocità di rotazione, si possono poi ottenere anche le frequenze tripla, quadrupla, ecc., della fondamentale.

La disposizione all'uopo necessaria corrisponde allo schema di fig. 225. S è un alternatore ordinario, per es. bipolare, il cui statore è eccitato con corrente continua, e nel cui rotore si generano correnti polifasi di una certa frequenza f, se f giri/sec è la sua velocità di rotazione. Con queste correnti si va ad alimentare lo statore di una macchina asincrona polifase M_1 il cui rotore è meccanicamente collegato a quello di S, e le connessioni statoriche sono fatte in modo che il campo statorico giri in senso opposto a quello del rotore. Con le correnti ricavate dal rotore,

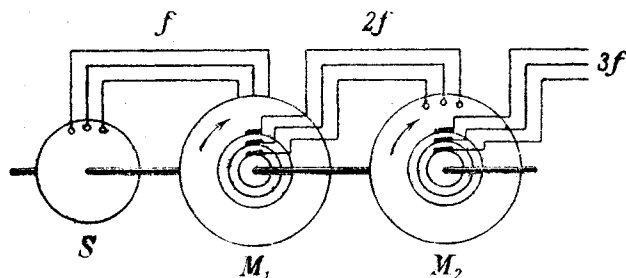



Fig. 225

che avranno frequenza $2f$, si va ad alimentare lo statore di un'altra macchina asincrona M_2, il cui rotore è meccanicamente connesso ai precedenti, e quindi gira alla stessa velocità di f giri/sec, ed anche per esso la rotazione avviene in senso opposto a quella del relativo campo statorico. In tale rotore si avranno quindi correnti di frequenza $3f$, e così via.

Si può pervenire allo stesso risultato anche usando una sola macchina monofase, ed ecco come.

Ricordiamo che un campo magnetico alternato bipolare, di frequenza f, equivale a due campi rotanti in senso opposto con la velocità di f giri/sec. Ciò premesso, supponiamo di avere un ordinario alternatore monofase, per es. bipolare, ad induttore fisso, con avvolgimento distribuito (per fissare le idee, si pensi ad un avvolgimento induttore tipo turbo). Se nell'induttore inviamo corrente continua, ed il rotore è fatto girare a velocità di f giri/sec, in esso si genereranno delle correnti di frequenza f, cui corrisponde un campo alternato, decomponibile in due campi, che rispetto al rotore ruotano con velocità f e $-f$, e quindi nello spazio — cioè rispetto allo statore — con le velocità $2f$ e 0. Il primo di questi genera negli avvolgimenti statorici tensioni di frequenza $2f$ e le relative correnti producono due campi rotanti nello spazio con velocità $2f$ e $-2f$. Rispetto a questi, il rotore ha le rispettive velocità f e $-3f$, e pertanto nei suoi avvolgimenti verrà ad agire anche una tensione di frequenza $3f$. Le correnti corrispondenti a questa producono sul rotore due campi rotanti aventi le velocità $3f$ e $-3f$ rispetto al rotore stesso, e quindi $4f$ e $-2f$ rispetto allo statore. A questi conseguono negli avvolgimenti

statorici tensioni di uguale frequenza. Così continuando, si vede che nei circuiti statorici si avranno tutte le frequenze multiple pari di f, nel rotore tutte le multiple dispari.

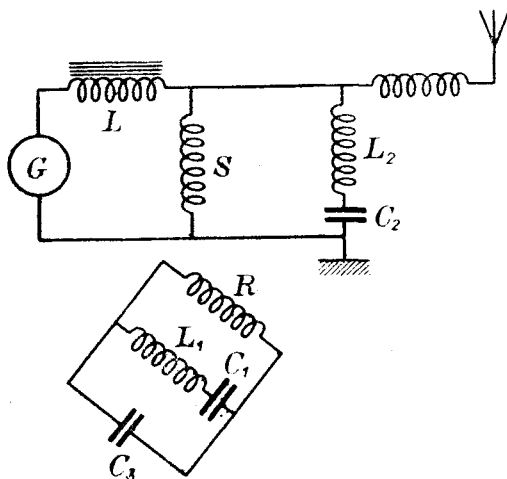
Tutto ciò in effetto avviene in qualunque alternatore; senonchè, in generale, a causa della notevole induttanza dei circuiti, le frequenze armoniche non danno luogo a correnti apprezzabili.

Nel dispositivo Goldschmidt si procura invece di favorire la produzione delle correnti di frequenze multiple, offrendo ad esse vie di minima impedenza in opportuni circuiti accordati sulle frequenze stesse.

La disposizione schematica di tali circuiti, per ottenere la quadruplicazione della frequenza, è quella indicata nella fig. 226. S è l'avvolgimento statorico alimentato dal generatore di tensione continua G attraverso una bobina strozzatrice L di forte induttanza, il cui ufficio è quello di impedire che G sia attraversato da correnti di alta frequenza. Il circuito del rotore R è chiuso su un sistema (L_1, C_1) accordato sulla frequenza f, con che viene assicurato un elevato valore della corrente di frequenza f e quindi la possibilità di indurre notevoli tensioni di frequenza $2f$ nel circuito statorico. In questo le correnti di tale frequenza si chiudono sul sistema (L_2, C_2) accordato sulla frequenza $2f$, mentre, a causa di L, non invadono G. Il condensatore C_3, disposto in derivazione su (L_1, C_1), è calcolato in modo che il sistema (R, C_3) sia risonante per la frequenza $3f$, il che consente il passaggio negli avvolgimenti rotorici di una conveniente corrente di tale frequenza, e di conseguenza la creazione nello statore di correnti di frequenza $4f$. Queste infine trovano la loro chiusura in un circuito derivato su (L_2, C_2) e risonante per la frequenza $4f$, pel quale generalmente si utilizza addirittura l'antenna trasmittente.

Fig. 226

Se ad es. la macchina ha 400 poli e la velocità angolare di 3000 giri/m, la frequenza fondamentale f è di 10 kHz, e così si realizza la possibilità di inviare in antenna correnti di 40 kHz ($\lambda = 7500$ m).

Tanto per gli alternatori descritti al n. prec., quanto per la macchina del tipo Goldschmidt che potrebbe chiamarsi « moltiplicatore elettromeccanico di frequenza », occorre, per realizzare la costanza della frequenza,

assicurare una perfetta regolazione della velocità angolare. A ciò generalmente si provvede facendo azionare gli organi di regolazione da relais il cui funzionamento è comandato dalla stessa frequenza generata, sfruttando le proprietà dei circuiti (R, L, C) ad elevato coefficiente di risonanza.

8. - Moltiplicatori statici di frequenza. — La macchina Goldschmidt può in sostanza considerarsi un apparecchio col quale si realizza, per via rotativa, la moltiplicazione della frequenza.

Ma tale obbiettivo può anche essere raggiunto con metodi statici, fondandosi sul peculiare comportamento magnetico del ferro.

Abbiansi due nuclei di ferro eccitati con corrente continua di tale intensità da portare il materiale in vicinanza del ginocchio della curva di magnetizzazione, ed a tale eccitazione se ne aggiunga un'altra dovuta

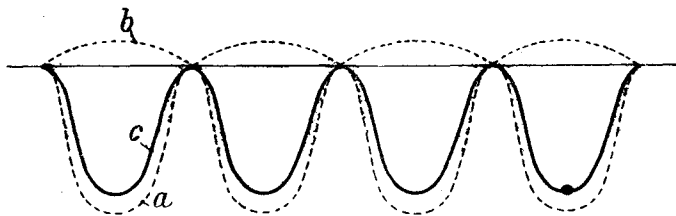



Fig. 227

ad una corrente alternata di frequenza f, disponendo i relativi avvolgimenti in senso contrario sui due nuclei. Il flusso magnetico, nel primo nucleo, subirà variazioni periodiche intorno al valore corrispondente alla magnetizzazione fissa provocata dalla corrente continua, ma, data la forma della caratteristica di magnetizzazione, le variazioni in aumento saranno meno importanti di quelle in diminuzione. Contemporaneamente nell'altro nucleo si verificheranno variazioni analoghe, ma con spostamento di fase di 180° rispetto alle prime. In definitiva, l'andamento dei due flussi sarà rappresentabile con diagrammi dei tipi indicati con a, b in figura 227. Se allora pensiamo disposti su entrambi i nuclei un terzo circuito avvolto nello stesso senso per entrambi, esso si troverà complessivamente concatenato con un flusso la cui parte variabile segue la legge rappresentata dal diagramma c, ottenuto sommando i due diagrammi a e b, e quindi (App., A, 8, nota) presenta frequenza doppia di f. Pertanto la f.e.m. generata in tale avvolgimento avrà pure frequenza $2f$. In generale saranno in essa presenti anche armoniche superiori, ma sarà facile esaltare la fondamentale $2f$ completando il circuito in modo che esso risulti accordato sulla frequenza $2f$.

Con un'altra successiva duplicazione si potrà pervenire alla frequenza $4f$, con un'altra ancora ad $8f$, e così via.

Oltre alla moltiplicazione per 2, si può generalmente effettuare anche quella per un qualunque numero intero *dispari* fondandosi sul seguente principio.

Se su un nucleo di ferro si dispone un avvolgimento nel quale si manda una corrente di frequenza f di intensità sufficientemente elevata, si potrà ottenere che il flusso risulti praticamente costante durante buona parte di ciascuno dei due semiperiodi e che il raccordo fra i due opposti valori di esso abbia luogo con una variazione all'incirca lineare rispetto al tempo. In altre parole, l'andamento del flusso durante un periodo sarà del tipo indicato nella fig. 228 *a*) (1). Se sullo stesso nucleo si avvolge un secondo circuito, in questo si genererà per induzione una f. e. m. i cui valori corrispondono, come è noto, a quelli di $-\frac{d\Phi}{dt}$, e pertanto tale f. e. m. sarà praticamente nulla durante gli intervalli come AB, CD, pressochè costante ma di segni opposti, negli intervalli come BC, rispettivamente DE (fig. 228 *b*)).

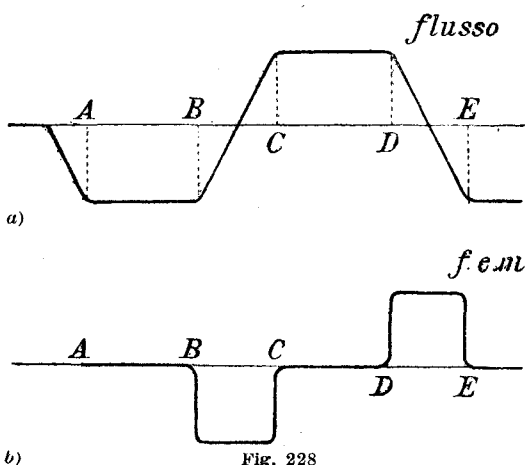



Fig. 228

Decomponiamo nelle sue armoniche una tale f. e. m. Come è noto, (App., *A*, 8), nello sviluppo di Fourier compaiono solo le armoniche dispari, e l'ampiezza della n^{ma} è proporzionale ad:

$$a_n = \frac{\text{sen } n\theta}{n} .$$

Si comprende pertanto che, disponendo opportunamente di θ, si può far assumere ad a_n il valore massimo di cui è suscettibile, cioè $\frac{1}{n}$ (basterà all'uopo prendere $\theta = \frac{\pi}{2n}$). Se ora si fa agire tale f. e. m. in un circuito accordato sulla frequenza nf, si realizzerà esaltazione dell'armonica n^{ma}, e in pari tempo depressione delle altre, cioè praticamente si verrà ad isolare la frequenza nf.

(1) Ciò equivale a ritenere che la curva di magnetizzazione si componga di un tratto rettilineo inclinato, cui fa seguito una parallela all'asse delle ascisse.

Partendo, ad es., da una frequenza fondamentale di 9 kHz, con due successive moltiplicazioni per 9 si può arrivare alla frequenza di 729 kHz (λ = circa 410 m). È interessante notare che i corrispondenti apparecchi risultano poco ingombranti e di rendimento relativamente elevato. Citiamo a tale proposito che si costruiscono 9-plicatori di circa 15 kW, da 9 a 81 kHz, con meno di 2 kg di ferro a finissima laminazione (0,05 mm) funzionanti con un rendimento dell'85 %. Per una successiva 9-plicazione (da 81 a 729 kHz) bastano pochi ettogrammi di ferro, ma occorre spingere la laminazione a 0,008 mm; il rendimento risulta del 65 %.

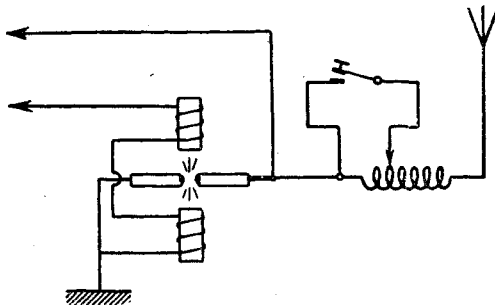



Fig. 229

9. - Manipolazione. — In vari modi può effettuarsi la manipolazione per l'ottenimento dei segnali Morse, cioè la interruzione più o meno lunga (punti e linee) del circuito destinato ad alimentare il sistema radiante.

Il principio cui essi si informano è quello di realizzare, nelle pause della manipolazione — cioè a tasto manipolatore alzato — il disaccordo del circuito predetto, il quale normalmente è accordato in guisa da essere, a tasto abbassato, risuonante alla frequenza di servizio. Così facendo, l'alzata del tasto produce adeguato aumento dell'impedenza, in misura tale da rendere l'emissione praticamente nulla.

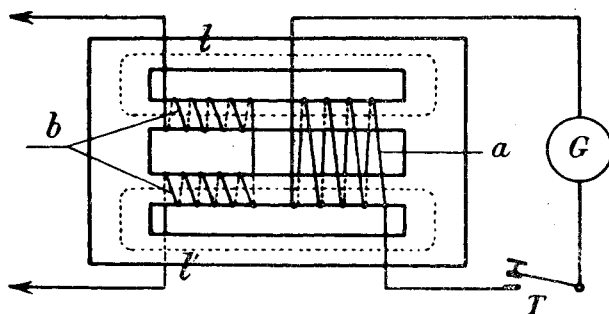



Fig. 230

Coi generatori ad arco ciò può ottenersi facilmente cortocircuitando col tasto manipolatore una parte dell'induttanza del circuito oscillatorio fondamentale (fig. 229). Tale corto circuito può anche effettuarsi sul secondario di un trasformatore di cui la predetta induttanza costituisce il primario.

Un altro metodo di disaccordo particolarmente adatto pel caso di alternatori ad alta frequenza è fondato su ciò, che la reattanza offerta al passaggio di corrente alternata da un circuito avvolto su un nucleo di ferro può farsi variare modificando le condizioni iniziali di magnetizzazione del nucleo.

Su tale principio è fondato l'apparecchio di Alexanderson. Esso è costituito da un nucleo foggiato come a fig. 230; gli avvolgimenti a sono percorsi dalla corrente continua proveniente dalla sorgente G e danno luogo ad un flusso costante le cui linee sono indicate con l, l', invece gli avvolgimenti b determinano un flusso alternato perchè essi fanno parte di un circuito accoppiato al circuito di carico del generatore ad alta frequenza — od anche addirittura all'antenna — e così calcolato da essere in risonanza con la frequenza di emissione soltanto quando in a non circola corrente continua, mentre, quando a è chiuso, il modificato valore della reattanza lo porta fuori di risonanza. Se dunque nel circuito a si dispone un tasto T, il circuito sarà capace di assorbire energia quando T è alzato, mentre a tasto abbassato l'assorbimento è praticamente nullo.

CAPITOLO DECIMOPRIMO

GENERATORI DIFFERENZIALI (CONVERTITORI) A TRIODI

1. - Generalità. — Nel Cap. VII abbiamo osservato che il sistema costituito da un generatore a tensione costante chiuso su una resistenza variabile nel tempo, può in generale ritenersi un organo capace di erogare correnti aventi componenti variabili con una certa legge che dipende da quella con la quale viene fatta variare nel tempo la resistenza. Ed abbiamo anche rilevato che un sistema siffatto è sostanzialmente un apparecchio atto a convertire parte dell'energia elettrica, erogata sotto tensione costante dal generatore, in energia elettrica a fattori — tensione e corrente — variabili nel tempo.

Un modo assai semplice ed efficace di costituire una resistenza variabile è quello di usare il circuito anodico di un tubo a tre elettrodi, nel cui circuito di griglia venga fatta agire una opportuna tensione variabile. Il triodo in sostanza viene, in tali condizioni, a compiere le funzioni di un relais, nel senso che gli impulsi di tensione applicati alla griglia provocano corrispondenti variazioni della resistenza equivalente allo spazio anodo-catodo. Ciò che vi è di particolarmente importante si è che si tratta di relais di elevatissima sensibilità ed estremamente pronto, per cui riesce possibile risentire, nel circuito anodico, gli effetti di cause introdotte nel circuito di griglia anche quando queste siano assai piccole e variino nel tempo in modo estremamente rapido, come ad es. avviene quando, le tensioni applicate essendo alternative, la loro frequenza raggiunga anche parecchi milioni di Hz.

Si comprende quindi la funzione fondamentale e decisamente essenziale che i tubi elettronici hanno nella tecnica delle alte frequenze e quindi in quella delle radiocomunicazioni.

In generale, ogni qualvolta nel circuito di griglia di un triodo si applica una tensione variabile, si hanno nel circuito anodico delle correnti, la cui variazione è legata a quella; e, come vedremo, scegliendo opportunamente le condizioni di funzionamento e la costituzione dei circuiti connessi al tubo, si possono ritrovare in questi ultimi delle correnti aventi

stretta relazione di *forma* con le tensioni immesse nel circuito di griglia. Siccome però tali correnti sono in effetto erogate dal generatore anodico, il processo che ne segue è essenzialmente di *conversione* di forma dell'energia elettrica erogata dal generatore anodico stesso.

Salvo esaminare in dettaglio nel corso di questo Capitolo i particolari teorici e tecnici del processo accennato, possiamo per ora ritenere di massima che, eccitando convenientemente la griglia con una certa tensione alternata di pulsazione ω, si possono ottenere nel circuito anodico correnti aventi la medesima frequenza, *costringendo*, per così dire, il generatore anodico ad erogarle.

Un sistema così funzionante può in certo modo paragonarsi ad una dinamo ad eccitazione separata, nella quale, per effetto di correnti inviate nel circuito di eccitazione, si mette l'indotto in condizione di *convertire* in energia elettrica di corrente continua la *energia meccanica* ad esso ceduta dal motore di comando.

Nel caso che qui ci occupa, si ha invece la possibilità di riprodurre, a spese del generatore anodico, la frequenza, e, sotto certe condizioni, anche la forma dell'impulso impresso al circuito di griglia.

È questo quanto comunemente si chiama far funzionare il triodo come amplificatore, di corrente o di tensione, o, con riguardo all'elemento energetico, come amplificatore di potenza. Ma tali denominazioni, quantunque assai usate, non possono certo dirsi rispondenti alla intima essenza del processo descritto.

Inoltre, come in una dinamo si può provvedere alla eccitazione colla stessa corrente da essa generata, anche per un sistema come quello indicato si può pervenire ad una autoeccitazione, utilizzando cioè le tensioni ricavabili nel circuito anodico per eccitare quello di griglia. Sia con questo artificio, sia con altri fondati su altri principi, si può dunque costituire un vero e proprio sistema atto a funzionare come generatore ad alta frequenza, sempre ben inteso, per via di conversione. Sono questi i generatori che, nella moderna tecnica delle stazioni radiotrasmittenti, hanno sostituito quelli di cui ci siamo occupati nel Cap. prec.

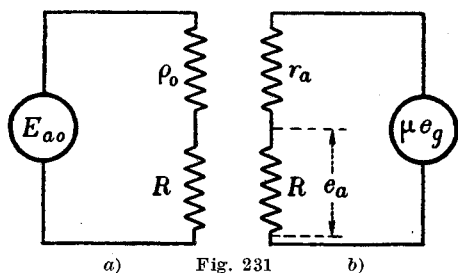
Sistemi di tale tipo non trovano soltanto applicazione nelle stazioni trasmittenti, bensì anche in quelle riceventi. In tal caso gli impulsi raccolti da un'antenna ricevente potranno utilizzarsi per eccitare degli acconci generatori coi quali si andranno ad alimentare i successivi apparecchi destinati a tradurre i segnali in forme percettibili dai sensi dell'operatore.

A seconda degli scopi da raggiungere, saranno diversi i requisiti richiesti, e pertanto nei nn. segg. andiamo ad occuparci partitamente dei diversi tipi (o *classi*) di sistemi di generatori a tubi elettronici i quali, pur discendendo tutti dallo stesso principio, si distinguono gli uni dagli altri per talune peculiari condizioni di funzionamento.

A) Generatori a triodi funzionanti in classe A.

2. - Principio dei generatori a triodi. — Al circuito di griglia di un triodo applichiamo una d. d. p. costante E_{g0} in serie con una e_g variabile col tempo, e supponiamo che il circuito anodico, oltre ad una sede di f. e. m. costante E_{a0}, contenga un apparecchio di carico che per ora riterremo rappresentato da una semplice resistenza R.

Supponiamo inoltre che la tensione $E_{g0} + e_g$ complessivamente così applicata fra catodo e griglia sia tale che la griglia non diventi mai positiva rispetto al filamento; anzi, più esattamente, sia tale da non aversi mai corrente di griglia (per il che occorre che $E_{g0} + e_g$ rimanga al di sotto di circa -1 volt); ed infine che ogni condizione di funzionamento del sistema corrisponda a punti del diagramma rappresentativo compresi entro la zona in cui le caratteristiche sono rettilinee e parallele, e quindi il funzionamento del triodo è completamente determinato dalle costanti g_a, conduttanza differenziale (o $r_a = \frac{1}{g_a}$, resistenza differenziale anodica), e μ, coefficiente d'amplificazione, cui, occorrendo, aggiungeremo la g_m, conduttanza mutua, legata a quelle della nota relazione $g_m = \mu g_a$.

In tali condizioni il circuito anodico diverrà sede di una corrente, decomponibile in una parte fissa I_{a0} ed una variabile i_a, le quali, per quanto sappiamo, sono quelle stesse che percorrerebbero i due circuiti fittizi già considerati in VIII, 11, ed ivi illustrati nelle figg. 161 *a*), *b*), che qui, per comodità, abbiamo ripetuto (fig. 231). Giova ricordare che la ρ_0 indicata in fig. 231 *a*) corrisponde alla resistenza equivalente allo spazio anodo-catodo nella condizione iniziale.

a) Fig. 231 *b*)

Le considerazioni generali da noi svolte nel Cap. VII ci consentono senz'altro di concludere che le valutazioni delle correnti I_{a0}, i_a possono farsi senz'altro mediante lo studio dei circuiti fittizi predetti. Siccome poi la f. e. m. μe_g che compare nel secondo, anzichè una f. e. m. effettiva, è l'equivalente (VIII, 11) delle variazioni di conduttanza dello spazio catodo-anodo del triodo provocate dalla applicazione di e_g nel circuito di griglia, possiamo anche asserire che, mentre dal lato elettrico il circuito differenziale *b*) rende perfettamente conto dei fatti elettrici, dal lato energetico invece occorre pensare che la potenza erogata (o assorbita) dalla f. e. m. μe_g del « generatore differenziale » corrisponda a minore (o maggiore) potenza dissipata nel tratto r_a del circuito stesso.

Ecco dunque che, con riferimento al circuito differenziale, abbiamo

realizzato un vero e proprio generatore — da intendersi tale con le restrizioni anzidette — il quale opera nel circuito anodico come farebbe una sede di f. e. m. μe_g avente resistenza interna uguale ad r_a, mentre la resistenza R simboleggia l'apparecchio di utilizzazione.

3. - Correnti e tensioni anodiche. - Rapporto di amplificazione della tensione. - Conservazione della forma. — La tensione utilizzata ai capi del carico R, che indicheremo con e_a, valutandola al solito positivamente quando il capo connesso all'anodo è a potenziale più elevato dell'altro, si ottiene immediatamente dividendo la totale tensione μe_g in parti proporzionali alle resistenze r_a ed R e considerando la seconda. Si ha cioè:

$$e_a = -\mu e_g \frac{R}{R + r_a}.$$

Analogamente, per avere la intensità della corrente i_a, cioè della parte variabile della corrente anodica effettiva, basterà (I, 12) dividere in parti proporzionali alle conduttanze $g_a = \frac{1}{r_a}$, $G = \frac{1}{R}$ la corrente $g_m e_g$ corrispondente all'assenza di R (corrente di corto circuito del sistema generatore-triodo) e considerare la seconda. Si ha così:

$$i_a = g_m e_g \frac{G}{G + g_a}.$$

Alle espressioni precedenti si potranno dare le equivalenti forme seguenti:

$$e_a = -Ri_a = -\frac{\mu R e_g}{r_a + R} = -\frac{g_m R e_g}{1 + R g_a} = -\frac{g_m e_g}{G + g_a}, \tag{1}$$

$$i_a = \frac{\mu e_g}{r_a + R} = \frac{g_m e_g}{1 + R g_a} = g_m e_g \frac{G}{G + g_a}. \tag{2}$$

Un tale sistema, con riferimento al fatto che, mercè esso, si può, da una tensione e_g applicata all'*entrata*, ricavare una tensione e_a in *uscita*, viene comunemente chiamato *amplificatore*, ed effettivamente esso può realmente considerarsi tale, in quanto è atto a modificare la tensione secondo il rapporto:

$$A = -\frac{e_a}{e_g} = \frac{g_m}{g_a + G} = \frac{\mu R}{r_a + R} = \mu \frac{\frac{R}{r_a}}{1 + \frac{R}{r_a}}, \tag{3}$$

che può correttamente chiamarsi *rapporto di amplificazione*.

Ovviamente però la denominazione di amplificatore perde ogni senso quando si consideri il sistema nel suo complesso, in quanto che da esso

non si ricava soltanto una tensione, ma si realizza anche una corrente nel circuito d'uscita, mentre quella nel circuito d'entrata è nulla (1); ed è inoltre consentita una estrinsecazione di potenza per un importo istantaneo Ri_a^2 senza che ne venga immessa nel circuito d'entrata.

La amplificazione di tensione A ottenuta è evidentemente legata al valore della resistenza R costituente il carico, e va costantemente crescendo col crescere di questa, tendendo a μ, coefficiente d'amplificazione del triodo, per $R \to \infty$. Per valori di R sufficientemente piccoli in confronto a r_a, l'ultimo membro della (3) mostra che $\frac{A}{\mu}$ cresce conservandosi sensibilmente uguale ad $\frac{R}{r_a}$, mentre, per elevati valori di $\frac{R}{r_a}$, le variazioni di $\frac{A}{\mu}$ divengono via via più lente, come chiaramente può vedersi nel diagramma disegnato in fig. 232, che è manifestamente un ramo di

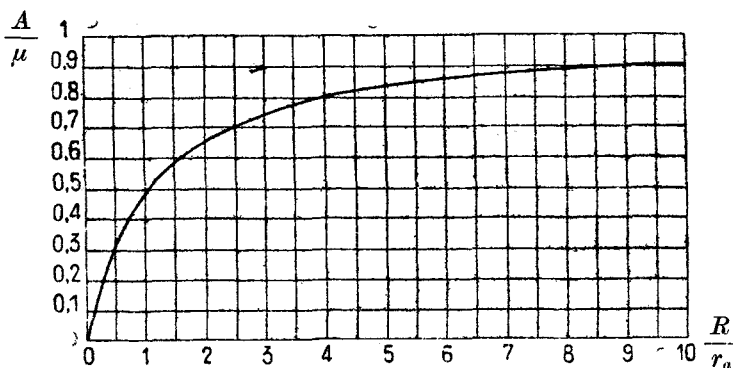



Fig. 232

iperbole. Da esso, ad esempio, si rileva che per raggiungere una amplificazione $A = 0{,}9\,\mu$; $0{,}8\,\mu$ ecc., occorre attribuire a $\frac{R}{r_a}$ i valori 9, 4, ...

La potenza erogata nell'apparecchio di carico anodico proviene, come sappiamo, dal generatore anodico e pertanto è da quest'ultimo che il nostro generatore differenziale attinge energia. In definitiva dunque, come già rilevammo nel n. prec., l'apparecchio non è che un *convertitore* e la tensione e_g non ha altro ufficio che quello di imprimere la propria *forma* agli elementi elettrici (tensione e corrente) d'uscita.

Nelle condizioni in cui ci siamo posti, la riproduzione di tale forma è assolutamente perfetta in quanto la e_a e la i_a sono rigorosamente proporzionali ad e_g. In particolare, se e_g è alternativa sinusoidale, tali saranno

(1) Ciò è vero soltanto approssimativamente (cfr. il successivo n. 11).

anche e_a ed i_a, e la loro frequenza sarà la stessa di quella di e_g. Questo caso è anzi uno di quelli che più di frequente ricorrono nelle applicazioni, ma, come vedremo in seguito, non è il solo.

La perfetta conservazione della forma rende prezioso il sistema considerato in quei casi in cui tale requisito è essenziale per gli scopi da raggiungere, come per es. avviene quando, la tensione di entrata essendo di carattere fonico, il circuito di utilizzazione sia destinato ad alimentare apparecchi per la ricostruzione dei suoni che hanno determinato la successione delle tensioni entranti (amplificazione di bassa frequenza); oppure, in generale, quando la tensione di entrata sia quella indotta in un'antenna ricevente da segnali in arrivo (amplificazione di alta frequenza), pei quali, come vedremo a suo tempo, è essenziale la riproduzione fedele della forma nei circuiti o *stadi* successivi.

4. - Funzionamento in classe A. - Impedenza di carico. — Quando il funzionamento del sistema come generatore differenziale è delimitato nel modo descritto al principio del n. 2, cioè in guisa che, tracciata la famiglia delle caratteristiche, i punti di funzionamento cadano tutti nella zona di linearità, talchè, in particolare, si operi in assenza di correnti di griglia, si dice che si verifica il funzionamento in classe A.

La trattazione dei vari problemi ad esso inerenti riesce particolarmente perspicua se si ricorre alla rappresentazione grafica, seguendo cioè il funzionamento sulle caratteristiche del triodo.

Supporremo che gli elementi variabili (correnti, tensioni) abbiano tutti variazione alternativa sinusoidale di una data pulsazione ω. Quanto all'apparecchio di carico, che finora abbiamo rappresentato con una resistenza R, dovremo supporre che esso consista in una generica impedenza $\mathbf{Z}$, la quale poi sarà da intendersi in senso lato, in quanto che il circuito anodico potrebbe ad es. essere il primario di un trasformatore al cui secondario è connesso un carico effettivo, e questo alla sua volta potrà essere un qualunque organo capace di causare uscite di potenza attiva e reattiva (nel qual caso la $\mathbf{Z}$ corrisponderà alla impedenza equivalente al primario del trasformatore così caricato); oppure il carico potrebbe essere rappresentato da un'antenna trasmittente, nel qual caso la parte reale di $\mathbf{Z}$ comprenderà la resistenza di radiazione, ecc.

In ogni caso, occorre aver presente che, anche quando la tensione d'eccitazione di griglia è alternativa di pulsazione fissa ω, la corrente anodica effettiva avrà in generale una componente continua, cioè *di frequenza zero*. Per tale ragione ci occorre considerare, insieme all'impedenza $\mathbf{Z}$, anche la resistenza R' a cui essa si riduce per $\omega = 0$.

Se ad esempio, la $\mathbf{Z}$ comprende una resistenza R in serie con una induttanza L, si avrebbe $\mathbf{Z} = R + jL\omega$ ed $R' = R$. Se $\mathbf{Z}$ fosse composta di due rami in parallelo, uno del tipo L, R, l'altro del tipo C, si

avrebbe:

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{\dfrac{1}{R + jL\omega} + jC\omega} \quad \text{ed} \quad R' = R\,;$$

ed in particolare, alla risonanza:

$$\mathbf{Z} = \frac{L}{RC} = \varepsilon^2 R\,,$$

essendo ε il coefficiente di risonanza (III, 7) del sistema R, L, C considerato in serie. Per un sistema (ideale) composto di tre rami R, L, C in parallelo si avrebbe $R' = 0$ e, alla risonanza:

$$\mathbf{Z} = R\,.$$

In regime alternativo sinusoidale, le formole fondamentali (1) e (2) si possono ancora scrivere riferendole ai valori complessi $\mathbf{E}_g$, $\mathbf{E}_a$, $\mathbf{I}_a$ degli elementi elettrici in esse interessati, come segue:

$$(1') \qquad -\mathbf{E}_a = \mathbf{Z}\mathbf{I}_a = \frac{g_m \mathbf{Z}\mathbf{E}_g}{1 + \mathbf{Z}g_a} = \frac{g_m \mathbf{E}_g}{\mathbf{Y} + g_a}\,,$$

$$(2') \qquad \mathbf{I}_a = \frac{\mu \mathbf{E}_g}{r_a + \mathbf{Z}} = \frac{g_m \mathbf{E}_g}{1 + \mathbf{Z}g_a} = g_m \mathbf{E}_g \frac{\mathbf{Y}}{\mathbf{Y} + g_a}\,,$$

mentre i circuiti di fig. 231 si modificano soltanto in ciò, che nel circuito di riposo comparirà la R' ed in quello differenziale la $\mathbf{Z} = \dfrac{1}{\mathbf{Y}}$.

Dalle (1') (2') si deduce che $\mathbf{E}_a$ ed $\mathbf{I}_a$ possono non essere in fase con $\mathbf{E}_g$, in quanto che i loro rapporti a questa non saranno in generale reali.

Al rapporto A definito dalla (3) si sostituisce il numero complesso

$$\mathbf{A} = \frac{g_m}{\mathbf{Y} + g_a} = \frac{\mu \mathbf{Z}}{r_a + \mathbf{Z}}\,,$$

il cui modulo A potrà ancora chiamarsi *amplificazione di tensione*. E si avrà, posto $\mathbf{Y} = G - jB$,

$$(3') \qquad A = \frac{g_m}{\sqrt{(g_a + G)^2 + B^2}}\,.$$

5. - Caratteristiche di funzionamento con impedenza ohmica. — È particolarmente importante per le applicazioni il caso in cui la impedenza $\mathbf{Z}$ è ohmica [1]. Se con R ne indichiamo il valore, le (1), (2), (3) possono ritenersi valide non solo per i valori istantanei e_g, e_a, i_a, ma per le corrispondenti ampiezze E_g, E_a, I_a.

---

[1] Intendiamo con ciò dire che, alla pulsazione ω considerata, la $\mathbf{Z}$ si riduce ad equivalere a una pura resistenza.

Per studiare il funzionamento di un tale sistema, cominciamo col tracciare la famiglia delle curve (i_a, e_g) che rappresentano il variare della corrente anodica in funzione della tensione di griglia per ogni valore costante della tensione anodica [1].

Innanzi tutto occorre identificare il punto di riposo O. Esso si dovrà trovare all'incontro della verticale di ascissa corrispondente alla tensione fissa E_{g0} applicata alla griglia — o, come si dice, alla tensione di *polarizzazione* di griglia — con la caratteristica che corrisponde, non alla tensione E_{a0} del generatore anodico, ma bensì alla differenza $E_{a0} - R'I_{a0}$, perchè è evidente che, in assenza di tensione variabile e_g, la tensione anodica uguaglia la differenza fra E_{a0} e la caduta di tensione dovuta al passaggio attraverso R' della corrente stessa di riposo I_{a0}. La determinazione di O potrà dunque farsi semplicemente conducendo per il punto di ascissa E_{g0} (vedi fig. 233 dove $E_{g0} = -20$ V) una retta la cui inclinazione sull'asse i_a sia $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{R'}{\mu}$, fino ad intersecare la caratteristica E_{a0} in un punto M; il punto O si troverà all'incontro della orizzontale per M con la verticale per E_{g0}. Infatti, la corrente x misurata dall'ordinata di O è quella che si ha nel circuito anodico col dato valore E_{g0} della tensione di griglia e con una tensione anodica uguale alla differenza fra E_{a0} ed il prodotto di μ per MO [2], cioè $E_{a0} - \mu \dfrac{R'}{\mu} x = E_{a0} - R'x$. Dunque x equivale alla corrente I_{a0} cercata, e pertanto O gode della proprietà enunciata.

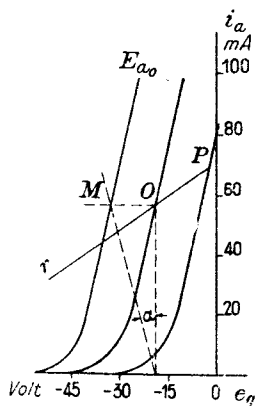



Fig. 233

Al variare di e_g, la (2) rappresenta precisamente l'equazione del luogo del punto di funzionamento rispetto ad una coppia di assi paralleli ai fondamentali ed aventi l'origine in O. Tale luogo è dunque ovviamente una retta passante per O, la cui inclinazione sull'asse delle tensioni di griglia è definita dal coefficiente angolare:

$$\frac{\mu}{R + r_a} = \frac{g_m}{1 + Rg_a} . \tag{4}$$

---

[1] Per tensione anodica intendiamo qui e nel seguito quella che risulta applicata fra anodo e filamento, cioè la $E_{a0} + e_a$, essendo e_a la tensione variabile ai capi del carico.

[2] Ricordiamo che (VIII, 15), passando da una caratteristica all'altra, la variazione della tensione anodica corrisponde al prodotto di μ per la distanza fra le due, misurata parallelamente all'asse delle tensioni di griglia.

L'esame di questa espressione mostra che tale retta r coinciderebbe con la caratteristica statica qualora fosse $R = 0$, e, mano a mano che R aumenta, risulta via via meno inclinata rispetto all'asse e_g.

Il rapporto A, cioè l'amplificazione di tensione, si ottiene secondo la (3), moltiplicando la resistenza di carico R per la espressione (4).

Per ogni valore di e_g, la corrispondente variazione di tensione e_a ai capi di R si ottiene moltiplicando per μ la distanza orizzontale fra la caratteristica di partenza e quella passante per quel punto P della retta r la cui ascissa vale $E_{g0} + e_g$.

Queste considerazioni geometriche mettono chiaramente in evidenza il modo di variare del rapporto d'amplificazione al variare di R.

Se poi si confronta la (2) con la equazione fondamentale del triodo a tensione anodica costante:

$$r_a i_a = \mu e_g ,$$

si può asserire che la corrente i_a coincide con quella che si avrebbe, a parità di eccitazione di griglia, per un triodo sottoposto a costante tensione anodica ed avente lo stesso coefficiente d'amplificazione del dato, ma resistenza anodica uguale ad $R + r_a$.

Alle rette come r si dà da taluni il nome di « caratteristiche dinamiche », ma tale denominazione non ci sembra opportuna. Piuttosto, trattandosi di diagrammi legati alla natura del carico ed il cui ufficio è di mettere in evidenza le relazioni fra correnti erogate e tensioni ai capi, con un determinato carico, essi sarebbero da considerarsi delle particolari *caratteristiche esterne* (del sistema costituito dal generatore anodico associato al triodo e caricato con R).

L'andamento delle rette come r ci rende conto che, al variare di e_g, varia di conserva la tensione anodica, e precisamente in guisa tale che il punto di funzionamento percorre un certo segmento di una delle rette r stesse, interessando così tutto un gruppo di caratteristiche statiche, ma occupando ovviamente una sola posizione su ognuna.

6. - Risoluzione grafica dei problemi inerenti al funzionamento in classe A. — Per realizzare un funzionamento di classe A con un dato carico R occorrerà fissare i valori di E_{a0} ed E_{g0}, e delimitare le escursioni di e_g in guisa che il segmento della retta r che viene interessato non esca dalla zona di linearità; in particolare esso dovrà essere tutto a sinistra della verticale la cui ascissa è di circa -1 volt, ed al di sopra di una orizzontale tracciata in modo da non investire i tratti curvi inferiori delle caratteristiche statiche.

Se e_g è alternativa ed è data la sua ampiezza E_g, nel fissare gli elementi essenziali del sistema, cioè E_{a0}, E_{g0} ed R, si dovrà procedere come segue: delimitato sull'asse e_g un segmento di lunghezza $MN = 2E_g$ par-

tente dal punto N di ascissa -1 (fig. 234), si traccerà la orizzontale $M'N'$ in guisa che il tratto compreso fra le due verticali per M ed N non investa i ginocchi inferiori delle caratteristiche statiche. Fatto ciò, si può asserire che qualunque retta uscente da M' e limitata alla verticale per N' può essere utilizzata come retta r. Se la resistenza di carico è pure data, la direzione di tale r risulta determinata, e quindi la r stessa è completamente conosciuta. Se essa è la $M'N''$, il punto medio del segmento $M'N''$ determinerà la E_{g0} e le «quote» delle caratteristiche statiche passanti per M' ed N'' dànno il massimo ed il minimo valore della tensione anodica, la cui media corrisponde ad $E_{a0} - R'I_{a0}$.

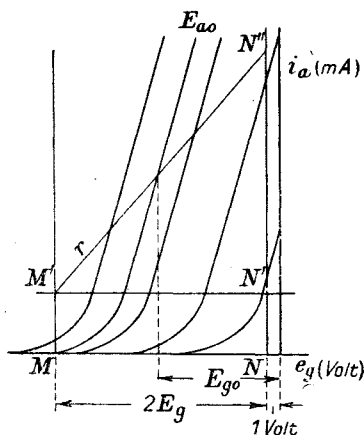



Fig. 234

Per lo più sarà assegnato il massimo valore della tensione anodica, e pertanto occorrerà disporre le cose in modo che esso non venga superato. Ciò equivale a fissare che il punto M' deve giacere sulla caratteristica corrispondente a quella tensione. In tal caso resta pure fissato un limite superiore per la ampiezza E_g, la quale non dovrà superare $\frac{M'N'}{2}$.

Se invece è dato il massimo di tensione anodica E'_{a0} sopportabile dal triodo in modo continuo (1), cioè il massimo di $E_{a0} - R'I_{a0}$, le limitazioni agli altri elementi si determineranno così: partendo dal punto Q (fig. 235) situato all'incontro di $M'N'$ con la caratteristica E_{a0} si conduca una retta avente il coefficiente angolare $\operatorname{tg} \alpha$ spettante al carico R, fino ad incontrare la verticale per N', e si congiunga poi N' col punto medio P del segmento così determinato fino ad incontrare la caratteristica E_{a0}. L'intersezione sarà il punto iniziale O di funzionamento, in quanto che, sulla retta r condotta per esso parallelamente a QP, cioè con la direzione spettante al carico, le rette $M'N'$ e $N'S$ staccano un segmento $M'S$ di cui O è il punto medio. Pertanto tale r sarà la retta di funzionamento, dopo di che è ovvia la determinazione della polarizzazione di griglia e della massima E_g consentita dalle condizioni poste.

Ad esempio, le caratteristiche del tubo essendo quelle disegnate in fig. 235, supponiamo che il carico anodico consista in un sistema $R' = 2{,}5\Omega$, $L = 125\,\mu$H, in parallelo con una capacità $C = 2\,$mμF, essendo $2 \cdot 10^6$ la pulsazione ω della tensione eccitatrice di griglia. È facile vedere che, a

(1) Spesso questo dato è fissato dal costruttore.

tale frequenza, l'impedenza anodica ha carattere ohmico con $R = 25000\Omega$. Dato l'esiguo valore di R' rispetto ad R, riterremo E'_{a0} coincidente con E_{a0}. Applicando la costruzione generale, nell'ipotesi che il prefissato valore di $E'_{a0} \cong E_{a0}$ sia 250 volt, si trova per E_{g0} il valore -16 volt, e (quindi) per il massimo di E_g il valore 15 volt. La corrente I_{a0} risulta

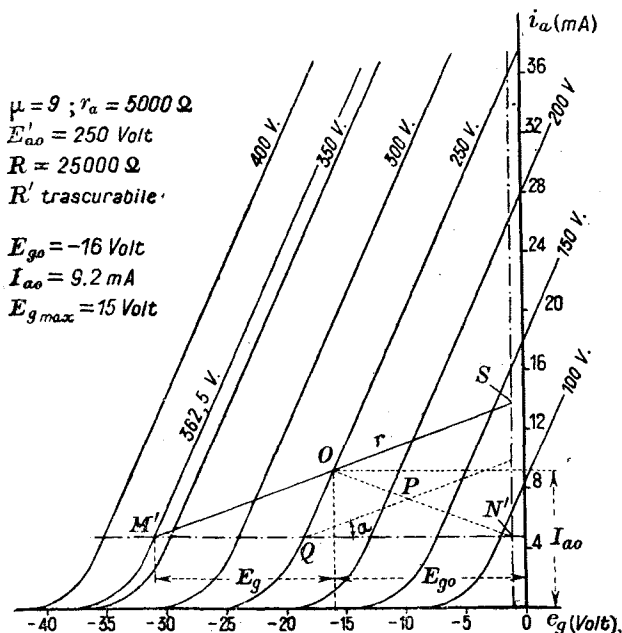



Fig. 235

di 9,2 mA, e così si può verificare che la caduta $R'I_{a0} = 2{,}5 \cdot 9{,}2 \cdot 10^{-3} =$ $= 0{,}023$ volt è veramente trascurabile in confronto di $E_{a0} = 250$ volt, come s'era supposto.

Per studi di tale tipo, è assai comodo servirsi della famiglia delle caratteristiche (i_a, e_a) per ogni valore costante della tensione di griglia, operando come segue.

Per la determinazione del punto di riposo, basterà considerare il punto P di ascissa E_{a0} (fig. 236) e condurre per esso una retta PM inclinata sulla verticale verso sinistra di un angolo la cui tangente vale R' [1]. L'incontro M di questa con la caratteristica corrispondente alla polarizzazione E_{g0} di griglia, determina la corrente I_{a0} e la tensione anodica di riposo, che sono misurate dalle coordinate di M. Se ora per questo

[1] Questa costruzione non è che un caso particolare di quella indicata in VII, 3.

punto si conduce una retta s la cui inclinazione rispetto all'asse delle ordinate è uguale all'impedenza (ohmica) di carico, tale retta s è, come facilmente si riconosce, il luogo dei punti di funzionamento del sistema quando il carico ha il dato valore R.

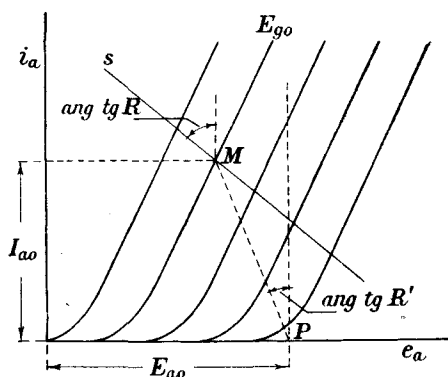



Fig. 236

La delimitazione relativa al funzionamento in classe A si farà fra la caratteristica corrispondente ad $E_g = -1$ e la regione in cui le caratteristiche tracciate hanno andamenti rettilinei con scostamenti relativi proporzionali alle variazioni e_g.

7. - Potenza. - Condizioni di massimo. — La potenza istantanea ricavata nel circuito di utilizzazione vale evidentemente, per la sola parte differenziale:

$$-e_a i_a ,$$

e quindi, in regime alternativo sinusoidale, il corrispondente valor medio P è misurato da:

$$P = -\frac{1}{T}\int_0^T e_a i_a dt = \frac{E_a I_a}{2}\cos\varphi .$$

essendo φ l'angolo di sfasamento tra $-\mathbf{E}_a$ ed $\mathbf{I}_a$.

Esprimendo E_a ed I_a per l'ampiezza della tensione d'entrata E_g con le formole (1) e (2), si trova, pel caso in cui l'impedenza di carico è ohmica e quindi $\cos\varphi = 1$:

$$P = \frac{1}{2}R\left(\frac{\mu E_g}{R + r_a}\right)^2 = \frac{\mu^2 E_g^2 R}{2(R + r_a)^2} .$$

Applicando nozioni ben note, si ha che il massimo di P si verifica per $R = r_a$. E tale massimo vale:

$$P_{\max} = \frac{1}{8} E_g^2 \mu^2 g_a ; \tag{5}$$

esso cioè risulta proporzionale al quadrato della tensione di eccitazione ed al prodotto $\mu^2 g_a = \mu g_m$, cui per questa ragione è stato proposto di attribuire il nome di *coefficiente di bontà* [1] del triodo.

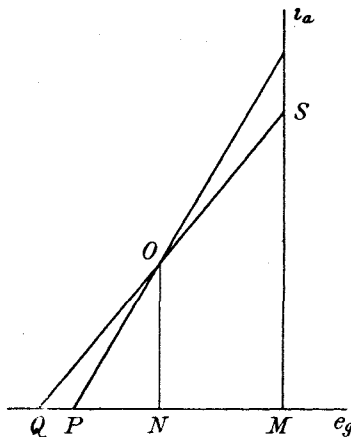
---

[1] Non si tratta però di un coefficiente numerico, giacchè esso, al pari di g_m, si misura in $\frac{1}{\text{ohm}}$ o amp./volt, in quanto che μ è un numero puro.

La potenza misurata dalla espressione (5) è effettivamente la massima ricavabile nel circuito di utilizzazione quando sia data l'ampiezza E_g e si possa disporre a piacere della tensione di alimentazione anodica E_{a0} e di quella di polarizzazione di griglia, che d'ora in poi indicheremo con $-E_{g0}$.

Ma quando queste sono fissate, esiste per E_g un massimo — compatibilmente col funzionamento in classe A —, il quale dipende essenzialmente da E_{a0} e da E_{g0}. Si può chiedere allora se, fissato che sia E_{a0}, si possa, disponendo opportunamente di E_{g0} e del carico R, realizzare un massimo di potenza.

Fig. 237

In primo luogo osserviamo che il massimo attribuibile ad E_g per dati valori di E_{g0} ed E_{a0} è determinabile mediante la costruzione esatta indicata al n. 5. Se, per semplificare, riteniamo nulla (trascurabile) la resistenza R', cioè E_{a0} coincidente con la tensione anodica allo stato di riposo, ed inoltre supponiamo che le caratteristiche siano rettilinee fino all'incontro con l'asse delle ascisse, e che il funzionamento in classe A possa estendersi fino al valore nullo della tensione di griglia, è facile scrivere la relazione che lega I_{a0} ad E_{g0} ed E_{a0}. All'uopo riflettiamo che il punto O (fig. 237) avente per coordinate $NM = -E_{g0}$ ed $ON = I_{a0}$, deve giacere sulla caratteristica PO di quota E_{a0}, e che, per l'ipotesi semplificativa posta, la quota di tale caratteristica vale:

$$\mu \cdot PM = \mu(E_{g0} + PN) = \mu E_{g0} + \mu \cdot PN .$$

Ora, siccome il coefficiente angolare (tg $\widehat{OPN}$) delle caratteristiche è $\frac{\mu}{r_a}$, si avrà $\mu \cdot PN = r_a \cdot ON = r_a I_{a0}$, quindi la relazione cercata è:

$$E_{a0} = \mu E_{g0} + r_a I_{a0} .$$

Siccome abbiamo supposto che il punto di funzionamento possa estendersi fino all'asse delle ordinate, la massima ampiezza consentibile per la tensione E_g di eccitazione sarà uguale alla stessa E_{g0}; e quando ad E_g si attribuisca precisamente tale valore, la corrispondente retta r coinciderà evidentemente con la QS, essendo $QN = E_{g0}$. Il coefficiente angolare di questa retta, come si deduce dalla figura, vale $\frac{I_{a0}}{E_{g0}}$; d'altra parte,

per la (2), esso vale $\frac{\mu}{R + r_a}$. Abbiamo cioè che, operando con la massima E_g consentita dalla data E_{g0}, risulta soddisfatta la relazione:

$$\mu E_{g0} = RI_{a0} + r_a I_{a0} .$$

Confrontando con la precedente si deduce:

$$I_{a0} = \frac{E_{a0}}{R + 2r_a} .$$

Come si vede, data la E_{a0} ed il carico R, restano determinate tanto la E_{g0} quanto la I_{a0}, e, siccome tale I_{a0} corrisponde all'ampiezza I_a della componente alternata della corrente anodica, si conclude che riesce determinata anche tale ampiezza, cioè in definitiva tutto il funzionamento del sistema.

In particolare, altrettanto sarà della potenza raccolta in R, per la quale si ha l'espressione:

$$\frac{RI_{a0}^2}{2} = E_{a0}^2 \frac{R}{2(R + 2r_a)^2} .$$

Al variare di R, tale potenza presenta un massimo, e precisamente questo si verifica per $R = 2r_a$.

8. - Carico non ohmico. — Nel caso in cui il carico anodico **Z** non equivalga, alla frequenza di lavoro, ad una resistenza, il luogo descritto dal punto di funzionamento non sarà più una retta; bensì, come ora dimostreremo, una ellisse il cui centro è lo stesso punto O che fu definito e determinato (n. 5) con riferimento alla resistenza R'. Infatti, quando **Z** non è ohmica, le grandezze i_a ed e_a, pur avendo variazione sinusoidale, non saranno in fase, e pertanto le loro espressioni sono del tipo:

$$i_a = I_a \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) , \quad e_a = E_a \operatorname{sen} \omega t .$$

Tali i_a, e_a possono, come nel caso contemplato al n. 5, considerarsi le coordinate del punto di funzionamento rispetto ad una coppia di assi passanti pel punto O, e le uguaglianze precedenti costituiscono quindi le equazioni parametriche del luogo cercato.

Se si immagina sostituito a sen $(\omega t + \varphi)$ il suo valore sen ωt cos φ + + cos ωt sen φ, e si risolvono le due precedenti rispetto a sen ωt, cos ωt, si troveranno per queste quantità espressioni lineari omogenee rispetto ad e_a, i_a, talchè, eliminando poi ωt mediante la relazione:

$$\operatorname{sen}^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1 ,$$

si riconosce subito che l'equazione cui si perviene è di secondo grado rispetto alle variabili i_a, e_a, e manca dei termini lineari. La curva cercata è dunque una conica col centro in O, e siccome essa si svolge tutta al finito, è necessariamente un'ellisse [1].

Al limite, quando **Z** tende a ridursi ad una pura resistenza, φ tende a zero, e l'ellisse si riduce al suo asse maggiore il quale coincide col segmento di retta r considerato al n. 5.

9. - Dipendenza dell'amplificazione dalla frequenza. — In generale, quando il carico anodico è una impedenza **Z**, ohmica oppure no, l'amplificazione di tensione, cioè il rapporto dei moduli $A = \frac{E_a}{E_g}$, è essenzialmente dipendente dalla frequenza, come si riconosce subito pensando che G e B sono delle funzioni di ω. Questo fatto deve essere tenuto presente quando si tratti di operare con tensioni d'entrata comprendenti contemporaneamente più frequenze, perchè ovviamente ad esso consegue una *deformazione* rispetto alla tensione d'entrata.

Pertanto, qualora interessi che per una certa gamma di frequenze il rapporto predetto si serbi sensibilmente costante [2], occorrerà studiare opportunamente la costituzione del circuito di carico, come a suo tempo verrà spiegato.

In altri casi invece può interessare il contrario, cioè di conseguire, attraverso la variazione di detto rapporto, una selezione, all'uscita, fra le varie frequenze comprese nella tensione d'entrata. In particolare — come meglio vedremo successivamente — questo si verifica nei generatori delle correnti destinate ad alimentare i sistemi trasmittenti. In tal caso invero è desiderato che le tensioni disponibili agli estremi delle impedenze di carico non risentano di eventuali impurità di cui fosse affetta la tensione di eccitazione, e la variabilità del rapporto A consente appunto di favorire talune frequenze componenti in confronto di altre, contribuendo così alla purificazione predetta.

Un cospicuo vantaggio che si ha costituendo il carico anodico con una impedenza — eventualmente ohmica — consiste nella possibilità di realizzare elevati valori di **Z** pur avendo una R' molto piccola. Se si ha presente il doppio circuito equivalente di fig. 231, ciò corrisponde a rendere piccolissima la manifestazione energetica corrispondente alla cor-

---

[1] Si suole dire che tale ellisse, in questo caso, rappresenta la «caratteristica dinamica».

[2] Ciò avviene, ad es., nella così detta amplificazione a bassa frequenza ed in quella di segnali ad alta frequenza modulati.

rente I_{a0}, perchè questa circola nel solo circuito di riposo (pel quale **Z** si riduce ad R') e contemporaneamente ad assicurare, con l'elevato valore di **Z**, una cospicua utilizzazione nel circuito differenziale. È infatti chiaro che, come in qualunque circuito elettrico formato da un generatore avente una certa impedenza interna, ed una impedenza di carico, la utilizzazione della tensione del generatore ai capi del carico è tanto maggiore quanto maggiore è la impedenza di carico rispetto a quella interna.

10. - Rendimento di conversione. — In molte applicazioni (ad es. amplificatori telefonici, amplificatori in ricezione, ecc.) interessa realizzare il massimo valore della potenza resa senza tener conto della spesa energetica all'uopo occorrente. Ma in altri casi, come ad es. in tutti i generatori destinati ad erogare potenze elevate, è, come in tutti i generatori industriali, importante rendere elevato il rapporto fra la potenza erogata e quella spesa.

Intendiamo qui alludere alla potenza spesa a mezzo del generatore anodico, e pertanto il rapporto predetto corrisponde a quello che si chiama il *rendimento anodico*, o più propriamente *rendimento di conversione*. Non sarebbe invero il caso di confrontare la potenza utilizzata all'uscita con quella spesa per alimentare il circuito d'entrata — cioè il circuito di griglia — sia perchè, nelle ipotesi in cui ci siamo posti, tale ultima potenza è nulla ([1]), sia perchè, quand'anche ciò non sia, si tratta di una spesa energetica a carattere accessorio. La si potrebbe paragonare a quella che si ha nel circuito di eccitazione di una dinamo o di un alternatore. Ed il paragone calza a perfezione, in quanto che anche per una tale macchina si ha a considerare un vero e proprio rendimento di conversione, cioè il rapporto fra la potenza W erogata in forma elettrica e la potenza meccanica spesa, dappoichè la W è veramente dedotta da questa attraverso un processo fondamentale di *conversione* di energia meccanica in elettrica.

La potenza erogata dal generatore anodico è sempre misurata da $E_{a0}I_{a0}$; e la potenza P raccolta nel carico uguaglia il prodotto scalare $-\frac{\mathbf{E}_a \times \mathbf{I}_a}{2}$. La differenza fra le due corrisponde alla perdita di conversione, e siccome, ritenendo trascurabile la caduta di tensione attraverso la resistenza R', essa equivale al valor medio del prodotto di $E_{a0} - Ri_a$ per $I_{a0} + i_a$ ([2]), si deduce che la perdita è dovuta al passaggio della cor-

---

([1]) Vedremo fra poco che ciò non è sempre esatto. Non solo, ma in seguito anzi tratteremo di una classe di generatori il cui circuito di griglia deve necessariamente assorbire energia dal generatore che lo alimenta.

([2]) Infatti è:

$$\frac{1}{T}\int_0^T (E_{a0} - Ri_a)(I_{a0} + i_a)dt = E_{a0}I_{a0} - \frac{1}{T}\int_0^T Ri_a^2 dt = E_{a0}I_{a0} - P\,.$$

rente anodica effettiva $I_{a0} + i_a$ attraverso il tubo, ai capi del quale la corrispondente tensione vale appunto $E_{a0} - Ri_a$. Essa dunque coincide con la dissipazione interna del tubo elettronico, ed il suo corrispettivo energetico è il calore svolto sulla placca.

Possiamo dunque concludere che la dissipazione anodica vale ad ogni istante:

$$v_a (I_{a0} + i_a)\,,$$

avendo indicato con $v_a = E_{a0} - Ri_a$ la tensione anodica istantanea. Detto P_d il suo valore medio in un periodo, il rendimento di conversione vale:

$$\eta = 1 - \frac{P_d}{E_{a0} I_{a0}} = \frac{E_a I_a}{2 E_{a0} I_{a0}} = \frac{1}{2} \frac{E_a}{E_{a0}} \frac{I_a}{I_{a0}}\,.$$

Si può osservare che, nel funzionamento in classe A, il rendimento predetto non può superare $\frac{1}{2}$. Infatti, siccome la corrente anodica non può divenire negativa, l'ampiezza della parte variabile di essa non può superare I_{a0}; d'altra parte l'ampiezza E_a non può superare E_{a0}, in quanto che la tensione anodica non deve scendere sotto lo zero, onde si ha certamente $\eta < \frac{1}{2}$.

Il rendimento totale del sistema è in ogni caso inferiore al rendimento di conversione, perchè fra le potenze spese si debbono computare anche quelle occorrenti per il riscaldamento del catodo e quelle eventualmente assorbite dal circuito di griglia (cfr. nota (1) di pag. prec.).

Giova infine osservare il peculiare comportamento energetico di questi generatori a triodo quando, come di consueto avviene, il sistema di carico è costituito da una impedenza che alla frequenza di lavoro ha carattere ohmico con elevato valore della resistenza equivalente R, mentre alla frequenza zero presenta resistenza trascurabile.

In tale caso la potenza erogata dal generatore anodico è sempre misurata dal prodotto $E_{a0} I_{a0}$, dove I_{a0} rappresenta la corrente anodica di riposo (cioè in assenza di tensione alternata applicata alla griglia), e ciò *sia in assenza che in presenza di* $\mathbf{E}_g$, dal che si deduce che la eventuale presenza di $\mathbf{E}_g$ non fa che distrarre, per così dire, una parte di tale potenza costante, e precisamente quella che va ed estrinsecarsi nella impedenza di carico (cfr. VIII, 11). In altre parole si ha che, mentre in assenza di $\mathbf{E}_g$ tutta quella potenza viene necessariamente dissipata sull'anodo, la presenza di $\mathbf{E}_g$ fa sì che la dissipazione anodica diminuisca di tanto, quanto è l'importo della estrinsecazione energetica nella impedenza di carico. Per contro, se un sistema di tale tipo è stato studiato per funzionare regolarmente per una data $\mathbf{E}_g$ e quindi per una certa erogazione energetica W, si ha che, qualora si andasse a sopprimere tale $\mathbf{E}_g$, la dissipazione

anodica verrebbe senz'altro ad accrescersi di W; e di questo occorrerà tener conto nei casi concreti, verificando in particolare che ciò non adduca a valori della dissipazione anodica intollerabili dal tubo elettronico usato.

Un tale comportamento è del tutto simile a quello che si verifica per un generatore ordinario; anche in questo infatti, quando si sopprimesse (cortocircuitandolo) il sistema di carico, ne seguirebbe la chiusura del generatore sulla sua resistenza propria e quindi aumento della dissipazione interna. Senonchè, nel caso che ci occupa, è particolarmente notevole osservare che, grazie alla peculiare costituzione del circuito di carico, la soppressione di questo può verificarsi *indirettamente* mediante la soppressione della tensione eccitatrice di griglia.

11. - Impedenza d'entrata e suoi effetti. — Abbiamo fin qui considerato i circuiti di placca e di griglia come completamente indipendenti; ma ciò non corrisponde alla realtà, a causa della capacità anodo-griglia che determina una connessione fra i due circuiti, come fu in generale rilevato in VIII, 14.

Per studiare con precisione gli effetti di tale capacità C_{ag}, basterà che noi completiamo opportunamente il circuito differenziale equivalente al triodo, tenendo conto anche di essa, che nello schema di fig. 238 è segnata (tratteggiata) esternamente al triodo, per maggiore chiarezza. L'effettivo circuito differenziale del sistema si ottiene al solito escludendo le tensioni e le correnti fisse; esso si presenterà pertanto come allo schema di fig. 239,

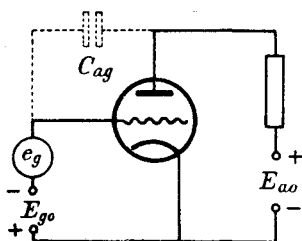
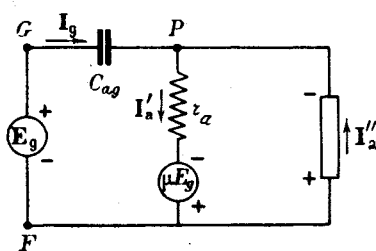



Fig. 238 Fig. 239

dove la indicazione del generatore di f. e. m. μE_g agente fra il catodo F e l'anodo P è perfettamente corretta, in quanto qui intendiamo esaminare le cose dal solo punto di vista dell'andamento delle correnti. Il senso positivo della f. e. m. e_g è quello indicato dalla freccia (dal catodo F alla griglia G), e pertanto ad un valore positivo di μe_g corrisponderà una tensione diretta, come indicato nella stessa figura, dall'anodo al catodo, in quanto che ad ogni valore positivo di e_g corrisponde, nel circuito anodico, una corrente differenziale positiva, cioè diretta, *nell'interno del tubo*, dalla placca al catodo.

Per completare lo schema, occorrerebbe tener conto anche delle capacità C_{fg}, C_{fa}, che invece per semplicità non sono indicate in figura, intendendo che la prima costituisca un carico (reattivo) fisso sul generatore di griglia, mentre la seconda potrà intendersi conglobata col carico anodico.

Indicando con $\mathbf{I}_g$ la corrente attraverso C_{ag}, intesa positiva nel senso della freccia, avremo che tale $\mathbf{I}_g$ si ripartirà fra i rami colleganti P con F, nei quali così verranno ad aversi due correnti $\mathbf{I}'_a$ e $\mathbf{I}''_a$, in generale diverse, in luogo dell'unica $\mathbf{I}_a$ che si avrebbe in assenza della connessione C_{ag}. Fra tali tre correnti sussiste ovviamente la relazione:

$$\mathbf{I}_g = \mathbf{I}'_a - \mathbf{I}''_a\,, \quad \text{da cui} \quad \mathbf{I}''_a = \mathbf{I}'_a - \mathbf{I}_g\,.$$

Applicando la seconda legge di Kirchhoff alla maglia interessante $\mathbf{I}'_a$, $\mathbf{I}''_a$, ed alla GPF, si ha:

$$\mu\mathbf{E}_g = r_a\mathbf{I}'_a + \mathbf{Z}(\mathbf{I}'_a - \mathbf{I}_g)\,,$$

$$\mathbf{E}_g = \frac{\mathbf{I}_g}{j\omega C_{ag}} - \mathbf{Z}\,(\mathbf{I}'_a - \mathbf{I}_g)\,,$$

dalle quali, eliminando $\mathbf{I}'_a$, si deduce, con facili passaggi:

$$\frac{\mathbf{I}_g}{\mathbf{E}_g} = \frac{1}{j\omega C_{ag}} \cdot \frac{r_a + \mathbf{Z} + j\varrho\mathbf{Z}\omega C_{ag}}{r_a + (\mu + 1)\mathbf{Z}}\,.$$

Il secondo membro, che sarebbe infinitamente grande in assenza della connessione capacitiva C_{ag}, misura la *impedenza d'entrata* del triodo (ben inteso nelle supposte condizioni di lavoro), cioè il carico cui, per effetto del funzionamento del sistema, è sottoposto il generatore che alimenta il circuito di griglia.

Alla espressione della impedenza d'entrata, che indicheremo con $\mathbf{Z}_g$, si può dare l'aspetto:

$$\mathbf{Z}_g = \frac{1}{j\omega C_{ag}} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{\mu\mathbf{Z}}{r_a + \mathbf{Z}}} + \frac{1}{\dfrac{1}{\mathbf{Z}} + \dfrac{\mu + 1}{r_a}}\,.$$

con che essa appare equivalente al risultato della connessione in serie delle due impedenze rappresentate dai due termini del secondo membro.

Ora si può osservare che, in generale, il modulo del secondo è molto inferiore a quello del primo, in quanto che esso corrisponde all'impedenza di due rami in parallelo, l'uno di impedenza $\mathbf{Z}$, l'altro di resistenza $\dfrac{r_a}{\mu + 1}$; e pertanto è dell'ordine di una frazione di Z, laddove il modulo del primo si ottiene moltiplicando la reattanza $\dfrac{1}{\omega C_{ag}}$ (in generale molto grande)

offerta dalla capacità C_{ag} per un fattore che è per lo più dell'ordine dei decimi o dei centesimi.

Per esempio, per un triodo avente le seguenti caratteristiche: $\mu = 9$, $r_a = 7500\ \Omega$, $C_{ag} = 2{,}5\ \mu\mu F$, caricato con un'impedenza equivalente ad una resistenza $R = 15\,000\ \Omega$, essendo $\omega = 10^6$, si avrebbe:

$$\frac{1}{\dfrac{1}{R} + \dfrac{\mu + 1}{r_a}} \cong 750\ \Omega\,, \qquad \frac{1}{\omega C_{ag}} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{\mu R}{r_a + R}} \cong 57\,200\ \Omega\,.$$

Possiamo dunque ritenere approssimativamente:

$$\mathbf{Z}_g = \frac{1}{j\omega C_{ag}} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{\mu \mathbf{Z}}{r_a + \mathbf{Z}}}\,.$$

Per discutere questa formola conviene scriverla sotto la forma:

$$\mathbf{E}_g + \frac{\mu \mathbf{Z}}{r_a + \mathbf{Z}}\,\mathbf{E}_g = \frac{\mathbf{I}_g}{j\omega C_{ag}}\,,$$

cui si può anche dare l'aspetto:

$$\mathbf{I}_g = j\omega C_{ag}\,(\mathbf{E}_g - \mathbf{E}_a)\,,$$

essendo $\mathbf{E}_a$ la tensione definita dalla (1′) [1].

Essa ci dice che la corrente $\mathbf{I}_g$ costituente il carico di griglia coincide con quella che si avrebbe in un circuito presentante la sola reattanza $\dfrac{1}{j\omega C_{ag}}$, ed alimentato dalla d. d. p. corrispondente alla somma vettoriale di $\mathbf{E}_g$ con $-\mathbf{E}_a$.

Ora si osservi che $-\mathbf{E}_a = \mu \mathbf{E}_g \dfrac{\mathbf{Z}}{r_a + \mathbf{Z}}$ risulta in fase, in ritardo o in anticipo rispetto ad $\mathbf{E}_g$ a seconda che $\mathbf{Z}$ è ohmica, capacitiva o induttiva rispettivamente [2]; pertanto in tali tre casi la somma vettoriale predetta si presenterà come agli schemi *a*), *b*), *c*) della fig. 240, ed il vettore della corrente $\mathbf{I}_g$, il quale anticipa di 90° rispetto a tale somma, si disporrà come indicato nelle figure stesse.

---

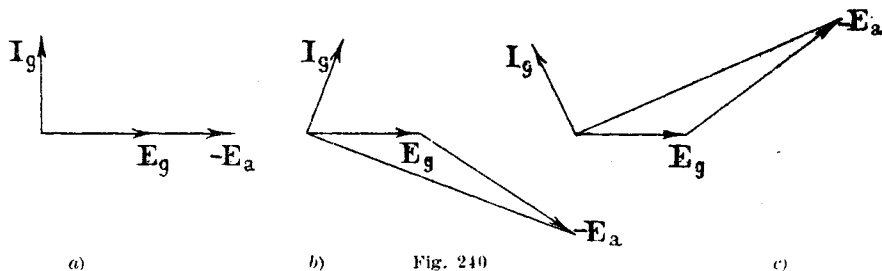
[1] La formola scritta sarebbe esatta, se in essa al posto della $\mathbf{E}_a$ definita dalla (1′) si ponesse l'effettiva tensione ai capi di $\mathbf{Z}$. Anzi ad essa potevamo pervenire immediatamente scrivendo l'equazione del circuito *GFP* nell'ipotesi che la tensione ai capi di $\mathbf{Z}$ si potesse calcolare con la (1′), cioè come se non esistesse la connessione capacitiva C_{ag}. Pertanto con ciò resta chiarito in che cosa consiste l'approssimazione indicata nel testo.

[2] Invero l'argomento di $\mathbf{Z}$ è sempre in valore assoluto maggiore di quello di $r_a + \mathbf{Z}$ e quindi l'argomento di $\dfrac{\mathbf{Z}}{r_a + \mathbf{Z}}$ ha lo stesso segno di quello di $\mathbf{Z}$.

Si conclude che, se **Z** è capacitiva, la impedenza $\mathbf{Z}_g$ ha positiva la parte reale, e pertanto il generatore $\mathbf{E}_g$ deve erogare corrente attiva e quindi potenza; mentre, se **Z** è induttiva, la parte reale di $\mathbf{Z}_g$ è negativa, con che il carico energetico di $\mathbf{E}_g$ muta segno, il che significa che il sistema anodico cede energia al circuito di griglia. In ogni caso poi il generatore $\mathbf{E}_g$ risulta caricato reattivamente.

Il fatto che la f. e. m. $\mathbf{E}_g$ risulti caricata è sempre causa di inconvenienti. In primo luogo, siccome il generatore corrispondente avrà una certa impedenza interna, ne conseguono certamente delle variazioni nella tensione applicata alla griglia, e quindi delle variazioni di efficienza del sistema.

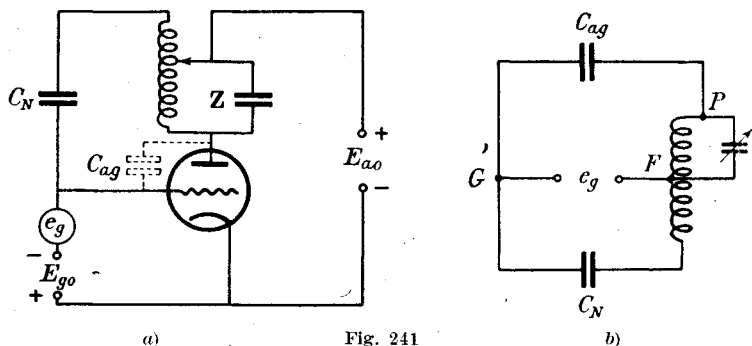
In secondo luogo poi, se, come talora accade, il generatore è di quelli la cui frequenza dipende dalle costanti circuitali, la esistenza di un carico reattivo equivale in sostanza ad una modificazione di tali costanti, da cui consegue una modificazione della pulsazione di risonanza. E se inoltre

Fig. 240

la parte attiva del carico di $\mathbf{E}_g$ risulta positiva, ciò equivale ad una variazione della resistenza d'entrata, e pertanto, insieme ad una diminuzione della E_g utile, si ha diminuzione del coefficiente di risonanza del circuito in cui si genera la $\mathbf{E}_g$ stessa e conseguente peggioramento della sua selettività. Se poi la parte reale di $\mathbf{Z}_g$ è negativa, nel circuito sede della $\mathbf{E}_g$ vengono in generale a formarsi correnti alternate di frequenza indipendente da quella degli impulsi dovuti alla $\mathbf{E}_g$ di comando (e quindi per lo più indesiderata), corrispondente al modificato valore delle costanti circuitali, mentre alle conseguenti dissipazioni deve sopperire il circuito anodico con evidente danno sia dal lato del rendimento che da quello della regolarità del funzionamento.

12. - Neutralizzazione degli effetti della capacità C_{ag}. — La via più semplice per mettere riparo a tali inconvenienti è quella di ridurre al minimo il valore della capacità stessa, ed all'uopo, come già abbiamo appreso, si provvede a schermare la griglia dalla placca munendo il tubo di una seconda griglia (tetrodi a griglia schermante, VIII, 20). Con ciò

la capacità residua si riduce effettivamente a valori assai tenui, e tale espediente riesce sufficiente in taluni casi (per es. amplificazione di segnali di media frequenza). Ma in certi altri casi — segnatamente per frequenze molto elevate, cioè per onde corte — esso non basta più, ed allora giova ricorrere a speciali artifici diretti a *neutralizzare* gli effetti che la capacità anodo-griglia può esercitare sul circuito di griglia.

Questi consistono sostanzialmente nel fare sì che ai capi dello spazio catodo-griglia la tensione anodica $\mathbf{E}_a$ non sia in grado di far sentire i suoi effetti, per modo che il circuito di griglia si trovi ad essere comandato dalla sola $\mathbf{E}_g$.

Ricordando le considerazioni a suo tempo (VI, 3) svolte sui circuiti a ponte, si può senz'altro asserire che lo scopo può raggiungersi disponendo

a) Fig. 241 *b)*

le cose in guisa che il tratto *GF* del circuito equivalente costituisca la diagonale di un ponte in equilibrio. Per es., a ciò si può pervenire derivando fra catodo e griglia un ramo comprendente una sede di f. e. m. $\mathbf{E}'_a$ ed una impedenza $\mathbf{Z}'$, il cui rapporto uguagli quello fra $\mathbf{E}_a$ e la reattanza $\frac{1}{jC_{ag}\omega}$, in quanto che, come ci è noto, in tali condizioni il tratto *FG* non risente alcuna influenza elettrica per parte di $\mathbf{E}_a$. Il modo più semplice per realizzare un tale stato di cose consiste nell'usare una f. e. m. $\mathbf{E}'_a$ che, intesa positiva se affluente ad *F*, sia in fase con $\mathbf{E}_a$, costituendo $\mathbf{Z}'$ con una capacità C_N tale che sia $C_N E'_a = C_{ag} E_a$. In particolare potrà farsi $C_N = C_{ag}$ ed $E'_a = E_a$.

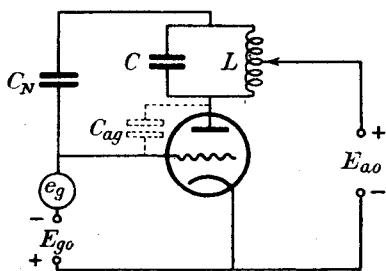



Fig. 242

Se, per fissare le idee, il carico **Z** ai capi del quale si localizza la $\mathbf{E}_a$ è costituito da una capacità in parallelo con una induttanza (con resistenza), si

potrebbe « allungare » il sistema con una identica induttanza, il cui estremo libero si connetterà ad una armatura di C_N, l'altra essendo connessa alla griglia, come indicato nella fig. 241 *a*), mentre in fig. 241 *b*) è disegnato il corrispondente circuito differenziale. Non è sostanzialmente diverso il dispositivo rappresentato in fig. 242, in cui la connessione della induttanza L al catodo è fatta in un suo punto intermedio, mentre l'estremo è connesso con una armatura di C_N, l'altra essendo poi connessa alla griglia. Oppure ancora, anzichè decomporre in due parti la L, si potrebbe invece decomporre la C, secondo lo schema di fig. 243.

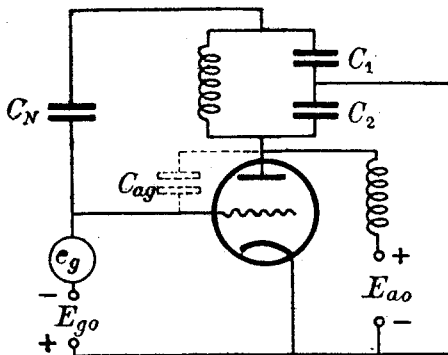



Fig. 243

Nel caso di un sistema composto di due tubi connessi in push-pull (VIII, 26), le f. e. m. utili pel conseguimento dell'effetto desiderato (secondo la disposizione di fig. 241) sono già necessariamente presenti nel sistema, e pertanto la neutralizza-

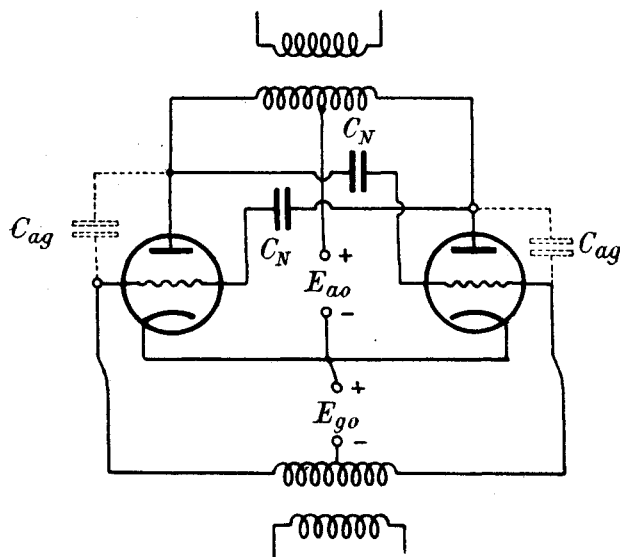



Fig. 244

zione si raggiunge connettendo ogni griglia con l'anodo dell'altro tubo attraverso ad un condensatore C_N di capacità uguale a C_{ag} (fig. 244).

In ogni caso occorrerà, naturalmente, disporre le cose in modo che la

neutralizzazione sia efficiente a tutte le frequenze con le quali si prevede di dovere alimentare il sistema. Ciò in particolare può ottenersi, nel caso di fig. 242 dividendo la L (da cui non è mai assente una certa resistenza) in due parti uguali, mentre nel caso di fig. 243 la decomposizione di C potrà essere fatta a piacere, se, come di consueto, si può ritenere che C_1, C_2, C_N, C_{ga} siano delle capacità pure (condensatori senza perdite).

13. - Influenza dei valori delle costanti del triodo. — Con i sistemi considerati nei nn. prece. si tende in generale ad ottenere, per una data E_g di eccitazione, un elevato valore della corrente I_a (o, ciò che è lo stesso, della tensione E_a ai capi del carico, se questo è pure dato) con la condizione che essa conservi la forma della $\mathbf{E}_g$. A tale scopo, come s'è detto, si opera per lo più con impedenze anodiche che, alla data frequenza, abbiano carattere ohmico. La corrente I_a è in generale data da:

$$I_a = - g_a E_a + g_m E_g ,$$

come si deduce dalla (2′) introducendo la d. d. p. E_a che il carico mette in giuoco nel circuito anodico e la cui espressione è fornita dalla (1′) ([1]). Il termine sottrattivo $g_a E_a$ è quello cui è dovuta la minore inclinazione delle rette r (n. 5) rispetto alle caratteristiche statiche; invero, per $g_a = 0$ si avrebbe $I_a = g_m E_g$ come in assenza di carico.

Da ciò discende la utilità di operare con triodi aventi, insieme ad un elevato valore di g_m, un piccolo valore di g_a. A tale scopo si presentano particolarmente indicati i tetrodi ed i pentodi. Con tali tubi invero la influenza del termine $g_a E_a$ è in generale tanto piccola, da potersi ritenere le rette come r assai poco discoste dalle caratteristiche statiche ([2]).

Operando con tali tubi, dato che essi presentano piccolissima g_a ed elevata g_m, non conviene realizzare le condizioni di massima potenza, cioè fare la resistenza equivalente al carico uguale alla resistenza interna. Anzi si rimane generalmente notevolmente al di sotto di tale limite, con evidente scapito del rendimento di conversione, ma tuttavia con la possibilità di raccogliere ugualmente ai capi di **Z** valori elevati di E_a, come agevolmente si riconosce con uno sguardo al diagramma generale di fig. 232 (pag. 457).

Invero, mentre per un tubo avente $g_m = 1$ mA/V, $g_a = 10^{-1}$ mA/V, cioè $\mu = 10$, $r_a = 10\,000\ \Omega$, occorre spingere il rapporto $\frac{R}{r_a}$ a circa 4

([1]) O, più semplicemente, osservando che la relazione stessa coincide nel caso attuale con l'equazione generale fra i_a, e_a, e_g e che, per essere e_a in opposizione di fase rispetto ad e_g, il passaggio dai valori istantanei alle ampiezze comporta un mutamento di segno del termine relativo ad e_a.

([2]) Basta pensare che in tale caso le caratteristiche statiche sono molto ravvicinate fra loro.

ossia fare $R = 40\,000\ \Omega$, per realizzare una amplificazione di tensione $A = 8 \left(\frac{A}{\mu} = 0{,}8\right)$; se si avesse invece $g_m = 1{,}05$ mA/V, $g_a = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$ mA/V, cioè $\mu = 420$, $r_a = 400\,000\ \Omega$, basterebbe fare $\frac{R}{r_a} = 0{,}10$ (cioè ancora $R = 40\,000$) per ottenere il valore 0,091 del rapporto $\frac{A}{\mu}$. Tale valore è in senso assoluto assai modesto, tuttavia ad esso corrisponde un valore rilevante ($A \cong 38{,}2$) del rapporto d'amplificazione.

14. - Funzionamento in classe A′. — Se la escursione della tensione eccitatrice di griglia è tale da invadere, a destra, il campo delle tensioni positive, avvicinandosi, a sinistra, al potenziale di interdizione, le caratteristiche di funzionamento non saranno più rettilinee, vale a dire non si avrà perfetta proporzionalità fra i valori istantanei di e_g ed i_a, onde seguirà *distorsione* all'uscita. Alle rette come r si sostituiscono delle linee che potranno sempre facilmente costruirsi per punti per ogni dato valore del carico anodico (ohmico) R. Esse partono da un punto dell'asse delle ascisse e raggiungono, con un tratto incurvato, una regione rettilinea (quella dei segmenti r considerati al n. 5) seguita alla sua volta da un tratto incurvato verso il basso che si inizia in corrispondenza dell'ascissa alla quale si manifestano correnti di griglia.

I sistemi che derivano da escursioni così estese del potenziale di griglia non sono più classificabili nel tipo A. Essi si denominano talvolta A′, e sono caratterizzati da ciò, che la corrente anodica, come nel caso A, fluisce per l'intero periodo della tensione eccitatrice di griglia, ma non sono evitate correnti di griglia. Ciò, come si è detto, produce alterazione nella forma della corrente anodica rispetto a quella della tensione d'entrata, ed inoltre questa tensione non ha la stessa forma di quella del generatore che alimenta il circuito di griglia, perchè durante una parte dell'alternanza positiva si ha corrente di griglia e quindi caduta di tensione attraverso l'impedenza interna del corrispondente generatore.

Tuttavia sistemi di tale tipo possono essere usati in luogo degli A puri quando sia consentita una certa percentuale di armoniche (App., *A*, 7) all'uscita [1], in quanto che, mediante opportuna costituzione del circuito d'uscita, è possibile eliminarle nella tensione ai capi del carico.

15. - Alimentazione dei circuiti del triodo. - Polarizzazione automatica (catodica) della griglia. — La alimentazione del circuito anodico viene sempre fatta con un generatore a tensione continua, il quale può essere disposto in serie col carico e col triodo, oppure in parallelo, cioè derivato ai capi del carico come indicato nella fig. 245. In quest'ultimo caso occor-

[1] Generalmente si prescrive che tale percentuale non superi il 5%.

rerà che il ramo contenente il generatore comprenda una opportuna induttanza L, il cui ufficio è quello di consentire che la tensione ai capi del carico — o del triodo, il che in questo caso equivale —, possa compiere le sue variazioni senza provocare apprezzabili correnti variabili nel ramo contenente il generatore, talchè le correnti variabili stesse circolino quasi esclusivamente fra il triodo ed il carico; ed inoltre, ad evitare che il generatore possa erogare componenti costanti nel ramo contenente il carico, questo ramo dovrà in ogni caso comprendere un condensatore in serie (¹). Pertanto, qualora il carico effettivo non comporti tale organo, bisognerà aggiungere appositamente un opportuno condensatore C_b, detto *di blocco*, di capacità abbastanza elevata affinchè la corrispondente reattanza risulti piccola in confronto all'impedenza di carico.

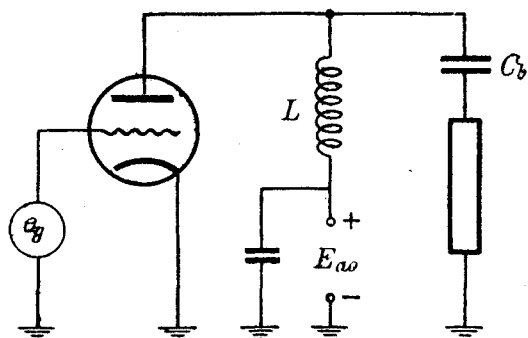



Fig. 245

La differenza sostanziale fra i due tipi di alimentazione consiste dunque in ciò, che nel tipo serie il generatore è percorso sia dalla corrente costante che da quella variabile (²), invece nel tipo parallelo soltanto dalla prima. Però nell'interno del tubo la corrente, in ognuno dei due casi, corrisponde alla somma delle due parti predette.

La polarizzazione della griglia può pure ottenersi mediante un generatore di tensione continua avente il polo negativo connesso alla griglia. Ma in molti casi si ricorre invece ad un metodo automatico, che chiameremo di *polarizzazione catodica*. Esso si realizza connettendo il generatore e_g, anzichè al catodo, alla estremità di una resistenza r il cui secondo estremo è connesso col catodo. Tale resistenza r risulta così disposta in serie col carico anodico, e pertanto in essa fluisce la corrente anodica, alla

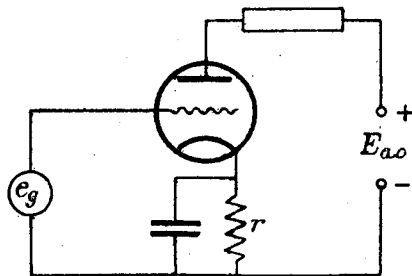



Fig. 246

(¹) A tale proposito è istruttivo il confronto con la disposizione indicata nella fig. 133 (VII, 4).

(²) Però, quando questa sia di frequenza elevata, il generatore viene in entrambi i casi shuntato con un condensatore di piccola reattanza, come indicato in fig. 245. In tal caso si dovrà più esattamente dire che la corrente totale è convogliata dal sistema costituito dal generatore e dal condensatore. (Cfr. nota a pag. 494).

quale si commisura una caduta di tensione, il cui valore medio è rI_{a0}, ed il cui senso è tale da equivalere ad una tensione E_{g0} negativa. Per evitare poi che r sia percorsa dalle componenti alternative necessariamente presenti nella corrente anodica, si dispone in parallelo ad essa un opportuno condensatore, secondo lo schema di fig. 246.

B) Generatori di classe B e C. - Moltiplicatori di frequenza.

16. - Elementi influenti sul rendimento di conversione. — Per studiare il comportamento energetico di un generatore a triodi, specialmente nei riguardi delle perdite di potenza che accompagnano il processo di conversione, giova rappresentare con un diagramma i contemporanei andamenti delle tensioni e delle correnti interessate al suo funzionamento.

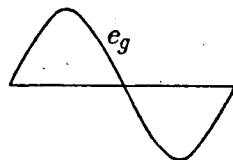
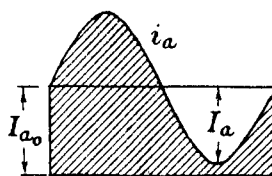
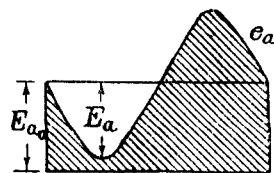
Fig. 247 *a*)

Per un generico funzionamento in classe A, in regime alternativo sinusoidale, quando il carico ha carattere ohmico, tali diagrammi si presentano come alle figg. 247 *a*) *b*) *c*), dove in *a*) è rappresentata la tensione variabile e_g d'eccitazione, in *b*) la corrente anodica i_a la cui sinusoide, di ampiezza I_a, ha per asse la retta corrispondente al valore I_{a0} della corrente di riposo, in *c*) la tensione anodica e_a, di ampiezza E_a, la quale in modo analogo si svolge attorno alla retta di ordinata E_{a0}, ma in opposizione di fase rispetto alla *b*), in quanto che i massimi di i_a corrispondono ai minimi della tensione anodica e viceversa.

Fig. 247 *b*)

Fig. 247 *c*)

La potenza erogata equivale ad ogni istante al prodotto, cambiato di segno, delle ordinate di *b*) e *c*), riferite alle rette di ordinate I_{a0} ed E_{a0} rispettivamente. La potenza dissipata sull'anodo corrisponde invece al prodotto dei valori istantanei delle ordinate degli stessi diagrammi *b*) e *c*) (parte tratteggiata) riferiti all'effettivo asse delle ascisse.

L'esame di tali diagrammi mostra chiaramente che, per diminuire la dissipazione, converrebbe limitare il funzionamento del sistema agli intervalli di tempo in cui la tensione anodica raggiunge i suoi minori valori (¹), ed operare inoltre in modo che questi siano i più piccoli possibili. D'altra

(¹) Ovviamente non si può pensare di limitare invece il funzionamento agli intervalli in cui la corrente raggiunge i suoi minori valori.

parte, per ottenere elevati valori di corrente occorrerà operare con eccitazioni di griglia relativamente ampie, anche a costo che, durante le alternanze negative, la griglia diventi, per una porzione del periodo, tanto negativa da impedire il passo alla corrente anodica, oppure che, se la polarizzazione negativa di griglia non è sufficientemente elevata, si abbia, durante una parte dell'alternazione positiva, circolazione di corrente nel circuito di griglia.

Comunque, già da questo primo sommario esame si comprende che per diminuire le perdite anodiche occorrerà in ogni caso rinunciare alla conservazione di forma che caratterizza invece il funzionamento in classe A. Bisognerà cioè contentarsi che, con eccitazione sinusoidale, si ritrovi nel diagramma della corrente anodica soltanto il *periodo* della eccitazione, ma non la completa riproduzione della sinusoide eccitatrice, e bisognerà inoltre consentire che una parte del vantaggio ottenuto sia eventualmente frustrato dalla presenza di dissipazioni nel circuito di griglia.

All'inconveniente della deviazione dalla forma sinusoidale si può porre un efficace riparo costituendo il carico anodico mediante un circuito ad elevato coefficiente di risonanza. In generale, il carico sarà costituito da un sistema L, R_1 in parallelo con uno C, R_2 (1), ed allora, anche se la corrente entrante in esso contiene delle armoniche, la tensione ai capi riuscirà semsibilmente sinusoidale di pulsazione uguale a quella sulla quale il circuito è accordato, e lo stesso carattere spetterà anche alle correnti nei rami L e C (cfr. VI, 13).

17. - Generatori di classe B e C. — Ciò premesso, ci accingeremo ora allo studio di generatori operanti nelle condizioni suaccennate, le quali corrispondono ai funzionamenti che, seguendo una proposta dei Tecnici americani, si denominano di classe B e C, secondo le definizioni seguenti.

Un generatore si dice funzionante in classe B quando la polarizzazione negativa di griglia è tale che la corrente anodica è ridotta sensibilmente a zero in assenza di eccitazione, e quindi la circolazione della corrente anodica stessa è limitata alla sola alternanza positiva della eccitazione di griglia; questa potendo poi raggiungere anche valori tali da dare luogo a corrente di griglia. Il funzionamento in classe C è caratterizzato invece da una polarizzazione di griglia tanto negativa da limitare la circolazione della corrente di placca ad una sola frazione dell'alternanza positiva della eccitazione di griglia, la cui ampiezza è generalmente tale da far raggiungere la corrente di saturazione. Tanto nell'uno quanto

(1) Per tali R, L, C devono intendersi gli elementi equivalenti al carico effettivo. Per es., se il ramo (L, R_1) è accoppiato magneticamente ad un altro circuito, si dovrà pensare alle R_1', X_1' quali furono definite in III, 16.

nell'altro caso, le inevitabili armoniche della corrente anodica si intendono normalmente eliminate all'uscita con mezzi opportuni.

Dalle definizioni precedenti si deduce che, grosso modo, la potenza uscente risulta, per la classe B, proporzionale al quadrato della tensione di griglia, in quanto che in ultima analisi il funzionamento in classe B può ritenersi differisca da quello in classe A unicamente pel fatto che, mentre in questo sono riprodotte, nella corrente anodica, entrambe le alternanze della tensione di entrata, in quella invece la riproduzione è all'incirca limitata ad una alternanza sola [1]. Invece, nel funzionamento in classe C, se la frazione di periodo in cui si ha circolazione di corrente anodica è abbastanza ristretta, e tale corrente raggiunge la saturazione, ciò significa che la tensione anodica si è in tale intervallo di tempo avvicinata allo zero, vale a dire che la tensione ai capi del carico si è avvicinata al valore della tensione d'alimentazione, e pertanto l'ampiezza E_a della tensione d'uscita uguaglia all'incirca la tensione applicata E_{a0}. Quindi la potenza, che, per un carico ohmico R, è sempre misurata da $\frac{E_a^2}{2R}$, risulta proporzionale al quadrato di E_{a0}.

A scanso di equivoci, diciamo subito che la classificazione predetta è ben lungi dall'essere completa e perfetta, in quanto che si possono avere tipi di funzionamento che non sono classificabili nè con A nè con B nè con C. Tuttavia essa può essere di qualche utilità, e comunque è giustificata dal fatto che i tipi di funzionamento denominati A, B e C corrispondono abbastanza bene a quelli che più spesso si incontrano nelle applicazioni.

Osserviamo subito che un cospicuo vantaggio dei generatori di classe B e C in confronto a quelli di classe A è dovuto al fatto che, consentendo quelli la riduzione a zero della corrente anodica in assenza dell'eccitazione, risulta automaticamente evitato il pericolo dell'aumento di dissipazione anodica, che, come abbiamo veduto al n. 10, può verificarsi nel funzionamento in classe A qualora venga soppressa la eccitazione di griglia.

18. - Determinazione della corrente anodica note le ampiezze delle tensioni di griglia e di anodo. — Lo studio di un generatore a triodi presenta, nel caso generale, difficoltà notevoli, e non è possibile condurlo col calcolo in modo preciso per il fatto che non sono note in forma analitica esplicita le relazioni fondamentali che legano le correnti e le tensioni interessate al funzionamento di un triodo.

A stretto rigore quindi, non potendosi in generale disporre che delle caratteristiche statiche, quali possono essere sperimentalmente rilevate,

(1) In generale però si tratta di riproduzione con deformazione.

qualunque problema relativo al funzionamento di un triodo non può essere trattato che graficamente.

La via per uno studio generale di tale tipo può essere tracciata come segue.

Supponiamo di possedere la completa famiglia delle caratteristiche $(i_a, e_g)_{e_a = \text{cost.}}$ ed $(i_g, e_g)_{e_a = \text{cost.}}$, che interessano il campo di funzionamento entro il quale si prevede dovrà funzionare il triodo, e proponiamoci di studiare quel che avviene quando, avendo applicato all'anodo la tensione costante E_{a0} e alla griglia una tensione di polarizzazione negativa, pure costante, il cui valore assoluto indicheremo al solito con E_{g0}, si vada ad eccitare il circuito di griglia con una tensione sinusoidale di ampiezza E_g e di pulsazione ω.

Quanto al carico anodico, supporremo sempre che esso, come di consueto avviene, sia costituito da una impedenza $\mathbf{Z}$ che alla pulsazione ω ha carattere ohmico.

Se e_g è il valore della tensione eccitatrice ad un istante generico, sarà $-E_{g0} + e_g$ la effettiva tensione di griglia. Per trovare il corrispondente valore della corrente anodica, occorrerebbe conoscere il contemporaneo valore della tensione anodica, che indicheremo con

$$v_a = E_{a0} + e_a ,$$

essendo e_a il valore, allo stesso istante, della tensione ai capi del carico. Ora si comprende che una simile determinazione non può farsi se non per tentativi, o meglio per approssimazioni successive, in quanto che la e_a dipende, oltre che dalla costituzione della impedenza di carico, anche dalla successione dei valori istantanei della corrente anodica che appunto si tratta di determinare. E comunque, per rendere il problema accessibile, occorrerà fare alcune ipotesi atte a semplificarlo.

Ad una prima semplificazione si può accedere quando la impedenza di carico sia costituita da un circuito oscillatorio del tipo g, L, C in parallelo, ad elevato coefficiente di risonanza, ed accordato sulla frequenza d'eccitazione, talchè essa presenti a tale frequenza un valore reale relativamente elevato, ed invece abbia valori praticamente nulli alle frequenze armoniche di quella (cfr. VI, 13), nonchè alla frequenza zero (corrente continua).

Una tale ammissione consente di semplificare notevolmente la questione, in quanto che, in virtù di essa, si può senz'altro prescindere dalla forma che andrà ad assumere l'effettivo diagramma della corrente anodica, e ritenere quindi che la variazione di e_a avvenga con legge sensibilmente sinusoidale e con fase opposta a quella di e_g.

Ciò premesso, cominciamo col supporre nota l'ampiezza E_a della tensione e_a e proponiamoci di determinare la corrente anodica.

Le coppie di valori istantanei corrispondenti delle tensioni di griglia

e di anodo potranno scriversi senz'altro come segue:

$$-E_{g0} + E_g \cos \omega t \qquad E_{a0} - E_a \cos \omega t\,,$$

il segno negativo al secondo termine della seconda espressione essendo dovuto al fatto che $\mathbf{E}_a$ è in opposizione di fase rispetto ad $\mathbf{E}_g$.

Partendo da tali valori siamo in grado di costruire per punti, mediante le caratteristiche, la curva che rappresenta la variazione della corrente anodica, al modo seguente.

Se, assumendo per asse una verticale di ascissa $-E_{g0}$, tracciamo la sinusoide $E_g \cos \omega t$, avente per ampiezza il dato valore di E_g, questa curva, riferita allo stesso asse considerato come asse dei tempi, dà i valori istantanei effettivi delle tensioni di griglia. Le contemporanee tensioni anodiche si ottengono assai agevolmente pensando che, ad ogni istante, lo scostamento della tensione di griglia da $-E_{g0}$ e quello della tensione anodica da E_{a0} sono fra loro proporzionali, come si vede dalle

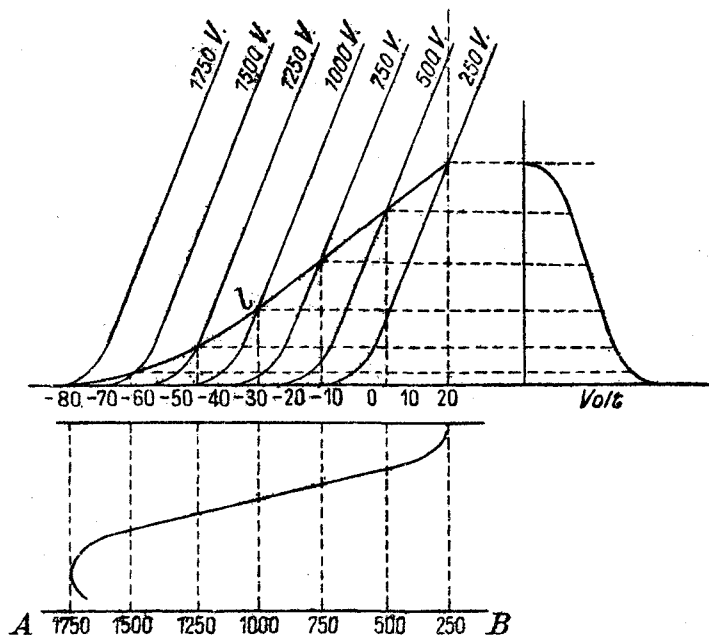



Fig. 248

precedenti espressioni. Pertanto se, preso su una retta qualunque AB un segmento limitato alle verticali $-E_{g0} - E_g$, $-E_{g0} + E_g$, lo si gradua in modo che i suoi estremi corrispondano ad $E_{a0} + E_a$ ed $E_{a0} - E_a$, si avrà che ogni verticale incontrerà l'asse delle ascisse e la retta AB in punti in cui si leggono valori *contemporanei* delle tensioni di griglia e di anodo.

Ciò fatto, se per ogni valore della prima si cerca l'intersezione della corrispondente verticale con la caratteristica statica avente per quota la seconda, si avrà una successione di punti giacenti su una linea l, la quale in fondo non è altro che la analoga delle rette del tipo r considerate al n. 5.

Con l'aiuto di tale linea sarà assai agevole costruire il diagramma della corrente anodica quale funzione $f(t)$ del tempo. Una tale costruzione è indicata in fig. 248, dove, avendosi $E_{a0} = 1000$ V, $E_{g0} = 30$ V, $E_a = 750$ V, $E_g = 50$ V, si è, per semplicità, disegnata una sola metà della curva, in quanto che l'altra è ovviamente simmetrica della prima [1].

La curva di corrente ottenuta non sarà in generale sinusoidale e quindi sarà decomponibile in successive armoniche, di cui la prima, o *fondamentale*, che indicheremo con I_{a1}, si calcolerà (App., A, 7) con la formola:

$$I_{a1} = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \omega t \, dt \, .$$

Nel caso attuale, la integrazione indicata a secondo membro dovrà pensarsi eseguita graficamente.

La costruzione precedente ci consente dunque di ottenere, una volta che siano fissati i valori di E_{a0} ed E_{g0}, l'ampiezza I_{a1} della componente fondamentale della corrente anodica per ogni data coppia di valori della tensione eccitatrice E_g e della ampiezza E_a della tensione ai capi del carico.

Dal rapporto di E_a ed I_{a1} si dedurrà poi il valore della resistenza R equivalente all'impedenza di carico.

19. - I diagrammi $(I_{a1}, E_g)_{E_{g0} = \text{cost.}}$ ed $(I_{a1}, E_g)_{R = \text{cost.}}$. — Però lo studio del funzionamento di un generatore non si presenta in generale nel modo che lo abbiamo posto.

Per lo più non sarà conosciuta la E_a, ma piuttosto il carico R, e si richiederà di determinare la I_{a1} che, col dato carico, si realizza per ogni valore di E_g.

Si comprende però agevolmente che la risoluzione di questo problema può ottenersi mediante l'applicazione del procedimento descritto, giacchè, immaginando fatta una costruzione come la precedente per tutta una

---

[1] Tale costruzione non è, in sostanza, che una estensione di quella che analogamente può pensarsi fatta nel caso del funzionamento in classe A. Senonchè per tale caso essa era resa inutile dal fatto che, essendosi supposte le caratteristiche rigorosamente rettilinee, ad essa era sostituibile un calcolo molto semplice. Ma, se si volesse ottenere maggiore precisione, tenendo conto della non perfetta rispondenza delle caratteristiche alla legge lineare, occorrerebbe applicarla anche in quel caso (in particolare, ad es., nei funzionamenti di tipo A').

serie di coppie di valori di E_g e di E_a — fermi restando ad es. i valori di E_{a0} e di E_{g0} —, si potrà volta per volta dedurne il valore di R dividendo E_a per I_{a1}, dopo di che, raccogliendo le coppie I_{a1}, E_g pertinenti ad un medesimo valore di R, si costituirà una famiglia di curve ciascuna delle quali rappresenta la legge di variazione di I_{a1} come funzione di E_g, per ogni valore costante di R, e mediante essa si potrà risolvere il problema proposto.

Fig. 249

È interessante esaminare l'andamento dei diagrammi che, con la scorta di tali risultati, si possono costruire.

In primo luogo, tenendo ferma la E_{a0}, ed il carico R, attribuiamo ad E_{g0} valori diversi ed esaminiamo le corrispondenti curve (I_{a1} E_g). Esse si presentano come alla figura 249; se E_{g0} è superiore al valore assoluto E_{gi} del potenziale di interdizione relativo alla data E_{a0} (curva *1*), per piccoli valori dell'ampiezza E_g di eccitazione si avranno valori nulli di I_{a1}; poi, a partire da una ampiezza E_g tale che le escursioni del potenziale di griglia possano giungere al di là dell'interdizione, appare la I_{a1}, dapprima con piccoli valori, perchè risulta assai limitata la porzione del periodo durante la quale si ha circolazione di corrente anodica, poi, mano mano che E_g aumenta, aumenta anche I_{a1}. Ma con l'aumentare di I_{a1} aumenta l'ampiezza E_a della tensione ai capi del carico, fino a che, per E_g sufficien-

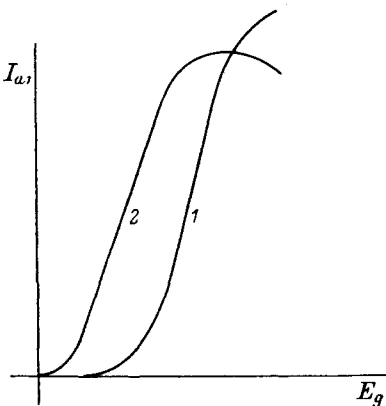
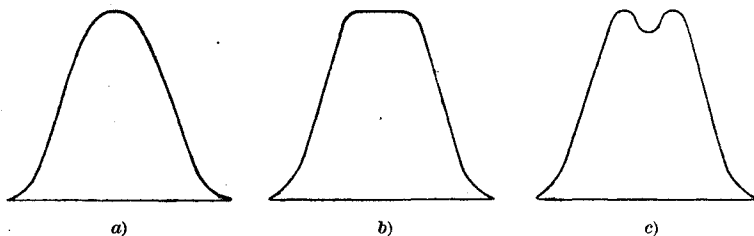



Fig. 250

temente grande, quella assume valori tali che, negli istanti in cui è massima la tensione di griglia, risulta assai piccola la tensione anodica, e pertanto viene raggiunta la corrente di saturazione. Il diagramma della corrente anodica, che per valori non molto grandi di E_g si presentava come in fig. 250 *a*), comincia allora ad appiattirsi (fig. 250 *b*)) e ne consegue un più lento aumento di I_{a1}. Se poi, nell'istante di massima tensione di griglia, la

tensione anodica scendesse al di sotto di questa, si avrebbe addirittura una depressione nel massimo della corrente anodica (fig. 250 *c*)) — perchè gli elettroni emessi dal catodo vengono assorbiti in massima parte dalla griglia —, e quindi in definitiva una depressione della ampiezza I_{a1}.

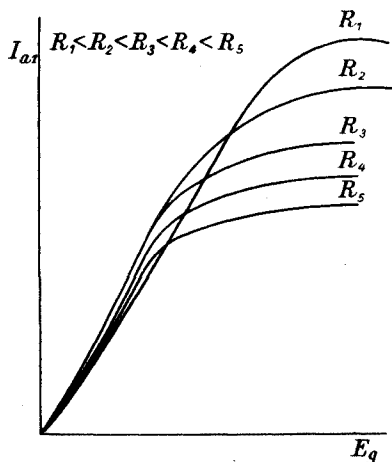



Fig. 251

Per valori di E_{g0} via via inferiori, si sposterà il punto in cui il diagramma (I_{a1}, E_g) si stacca dall'asse E_g, finchè, per valori di E_{g0} uguali o inferiori all'interdizione, la curva corrispondente parte dall'origine, come avviene per la *2* di fig. 249.

Un carattere generale comune a queste curve è quello di avere un certo tratto pressochè rettilineo, il che sta ad indicare che lungo di esso le variazioni di I_{a1} sono proporzionali a quelle di E_g, e pertanto si ha *linearità* del vincolo fra I_{a1} ed E_g. Inoltre ognuna di esse presenta un massimo, e ciò significa che, per ciascun valore di E_{g0}, v'è una tensione eccitatrice più favorevole di ogni altra.

Non meno interessante è l'esaminare l'aspetto dei diagrammi che, per valori fissi di E_{a0} ed E_{g0}, mostrano il modo di variare di I_{a1} in funzione di E_g, per ogni valore costante attribuito ad R. Essi si presentano come alla fig. 251, hanno cioè un andamento ascendente fino ad un massimo; ed i massimi corrispondenti a diversi valori di R variano in senso opposto alla R stessa, come agevolmente si spiega pensando che il massimo sta ad indicare che la corrente anodica ha, durante il periodo, raggiunto la saturazione, e siccome tale fatto è legato al valore di $E_{a0} - I_{a1}R$, esso si verificherà per valori di I_{a1} tanto minori quanto maggiore è R.

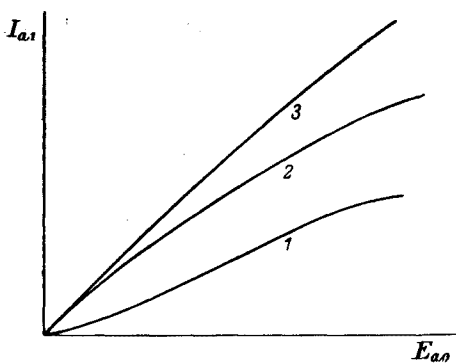



Fig. 252

È infine di grande importanza lo studio del comportamento del generatore quando, avendo attribuito determinati valori alla tensione di polarizzazione E_{g0} ed all'ampiezza E_g della tensione eccitatrice di griglia, si fa variare la tensione E_{a0} di alimentazione anodica, mantenendo fissa la

resistenza R di carico. Essi si presentano come in fig. 252, dove le tre curve *1*, *2*, *3* si riferiscono a valori di E_g via via crescenti: la prima di queste tre curve è stata ottenuta con una E_g poco inferiore ad E_{g0}, e la terza con una E_g superiore al doppio di E_{g0}. Da esse si rileva che il vincolo fra I_{a1} ed E_{a0} è assai prossimamente lineare, e, specialmente nel caso *3*, il campo di linearità è notevolmente esteso. In esso il generatore funziona per lungo tratto in classe C: come si vede, in tal campo la I_{a1} è praticamente proporzionale ad E_{a0}, e quindi la potenza ad E_{a0}^2, conformemente alla definizione (n. 17) del funzionamento in classe C.

20. - Potenza massima. — Le constatazioni precedenti consentono di asserire che, fissati i valori di E_{g0} ed E_{a0}, vi è, per ogni carico R, una E_g cui compete il massimo valore di I_{a1}, e di conseguenza il massimo valore

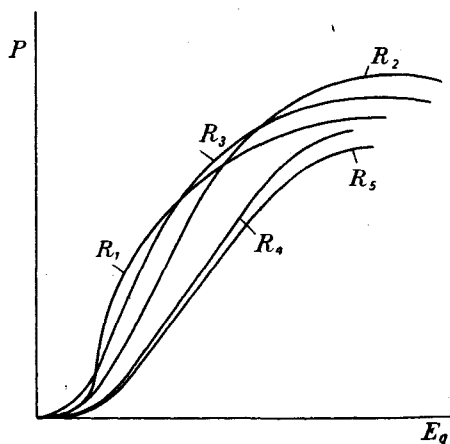



Fig. 253

della potenza erogata $P = \dfrac{RI_{a1}^2}{2}$. Pertanto, se si costruiscono i diagrammi (P, E_g) per ogni valore di R, ciascuno di essi presenterà un massimo in corrispondenza di quel medesimo valore di E_g pel quale si verifica il massimo di I_{a1}. Senonchè i massimi corrispondenti ai diversi valori di R non saranno più decrescenti col crescere di R, perchè il computo della potenza si fa moltiplicando il quadrato delle ordinate dei precedenti diagrammi di fig. 251 per la quota (valore di R) di ciascuno, e le quote pertinenti ai diagrammi più elevati sono via via più piccole.

In effetto tali diagrammi si presentano come in fig. 253, e la loro disposizione accusa l'esistenza di una potenza massima, corrispondente a certi ben determinati valori di R e di E_g.

Naturalmente, per altri valori di E_{a0} ed E_{g0}, si avranno altre serie di diagrammi e quindi altri valori dei massimi.

Lasciandosi guidare dalle considerazioni svolte nel caso del funzionamento in classe A, si potrebbe essere indotti a credere che la R corrispondente alla potenza massima fosse uguale alla r_a del triodo. Ma ciò non è, perchè, nel caso A, per definizione, il funzionamento è limitato a zone in cui r_a è costante, mentre, nel caso generale, essendo interessati tratti delle caratteristiche che raggiungono ed oltrepassano il ginocchio superiore, si ha a che fare con una specie di r_a media, la quale alla sua volta è legata alle tensioni E_{a0} ed E_g (nonchè al valore della corrente di saturazione I_s), e che è in generale superiore a quella r_a (quale fu definita in VIII, 9) che corrisponde al minimo valore della resistenza differenziale anodica.

Si può anche avere un'idea del valore della più favorevole R considerando che in ogni caso la ampiezza massima della tensione anodica non può oltrepassare E_{a0} e che le oscillazioni della corrente anodica debbono essere comprese fra 0 e la corrente di saturazione I_s, per cui, nelle migliori condizioni, il valore medio della corrente potrà corrispondere ad una $I_{a0} = \frac{I_s}{2}$ e dovrebbe pure essere uguale ad $\frac{I_s}{2}$ l'ampiezza della sua oscillazione attorno a quel valore medio.

In tale ipotesi si avrebbe come valore più favorevole di R il rapporto

$$E_{a0} : \frac{I_s}{2} = 2\,\frac{E_{a0}}{I_s}\,,$$

il quale è senza dubbio sensibilmente maggiore della r_a del triodo.

La potenza P in tali condizioni avrebbe il valore:

$$P = \frac{1}{2}\left(\frac{I_s}{2}\right)^2 \frac{2E_{a0}}{I_s} = \frac{E_{a0}I_s}{4}\,,$$

e siccome la corrispondente potenza spesa vale $\frac{1}{2}E_{a0}I_s$, il rendimento di conversione risulterebbe del 50 %.

In realtà, il rendimento corrispondente alla massima potenza risulta alquanto inferiore, e precisamente varia fra il 40 e il 45 %.

21. - Rendimento. - Considerazioni sul funzionamento in classe C. — Nel caso generale considerato sono compresi tanto il tipo A puro, quanto l'A′, nonchè i tipi B e C. Il tipo B corrisponde al caso in cui la E_{g0} uguaglia il potenziale di interdizione relativo alla data E_{a0}, e pertanto la circolazione della corrente anodica è limitata a mezzo periodo, cioè ad un

angolo di 180°; il caso C si ha quando, E_{g0} essendo superiore al potenziale di interdizione ed E_g sufficientemente elevata, l'angolo di circolazione della corrente anodica è $< 180°$ e questa raggiunge il valore corrispondente alla saturazione (¹).

È facile vedere che in questo ultimo caso si possono anche avere elevati valori del rendimento di conversione. Infatti, se indichiamo con 2θ l'angolo predetto e riteniamo che, durante il tempo ad esso corrispondente, la corrente anodica abbia costantemente il valore I_s, la potenza fornita dal generatore sarà data dal prodotto di $E_{a0}I_s$ per il rapporto $\frac{\theta}{\pi}$ fra la durata di erogazione ed il periodo, cioè:

$$\frac{\theta}{\pi} E_{a0}I_s .$$

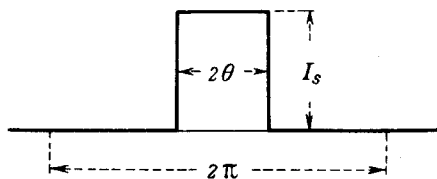



Fig. 254

Quanto alla potenza utilizzata, essa corrisponderà al semiprodotto della ampiezza E_a della tensione ai capi del carico per l'ampiezza I_{a1} della prima armonica della corrente. Il diagramma della effettiva corrente anodica, nel caso attuale, è del tipo indicato in fig. 254, e pertanto tale ampiezza vale (App., *A*, 7, 8):

$$I_{a1} = \frac{I_s}{\pi} \int_{-\theta}^{\theta} \cos \varphi \, d\varphi = \frac{2I_s \operatorname{sen} \theta}{\pi};$$

quindi la potenza utilizzata è:

$$\frac{\operatorname{sen} \theta}{\pi} E_a I_s .$$

Il rendimento di conversione sarà dunque:

$$\eta = \frac{E_a I_s \operatorname{sen} \theta}{E_{a0} I_s \theta} = \frac{E_a}{E_{a0}} \cdot \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta},$$

espressione che, col tendere di θ a zero, tende ad $\frac{E_a}{E_{a0}}$.

Siccome, con una scelta conveniente del carico, si potrà rendere E_a molto prossimo ad E_{a0} (spesso si opera con $\frac{E_a}{E_{a0}} = 0{,}9 \div 0{,}95$), il ren-

(¹) Questo è quanto si verifica ad es. nel caso del diagramma *3* di fig. 252.

dimento può risultare assai elevato riducendo opportunamente l'angolo θ (1).

Qualora si potesse ritenere $E_a = E_{a0}$, il rendimento potrebbe avvicinarsi a piacere all'unità facendo θ convenientemente piccolo.

Quantunque queste considerazioni abbiano carattere approssimativo, esse sono sufficienti a mettere in luce come si possa anche pensare a rendimenti di ordine elevato. Per conseguire tale intento, è necessario disporre le cose in modo che l'angolo θ sia piuttosto piccolo, e che nella frazione di periodo durante la quale si ha circolazione di corrente anodica, questa abbia valore praticamente costante (2).

Un tale funzionamento corrisponde sostanzialmente ad una eccitazione ad impulsi del circuito anodico, in quanto che questo riceve alimento soltanto per un breve intervallo di tempo in ogni periodo, mentre per la rimanente parte del periodo stesso il mantenimento dell'oscillazione è affidato alla peculiare attitudine degli elementi L e C del carico anodico ad immagazzinare energia. In altre parole, la corrente nel circuito di carico L, C, una volta trascorso l'intervallo di alimentazione, ha andamento *smorzato*; si tratta però di smorzamento il quale si limita a far sentire i suoi effetti durante la frazione residua del periodo, cioè fino al sopraggiungere del nuovo impulso alimentatore.

La scelta di E_a dovrà, come si è detto, essere fatta convenientemente; in ogni caso in modo tale che la minima tensione anodica non riesca inferiore alla massima tensione di griglia, per evitare forti correnti di griglia, le quali oltre a compromettere questo organo, aumenterebbero sensibilmente le perdite. Tale limitazione si traduce nella disuguaglianza:

$$E_{a0} - E_a \geq -E_{g0} + E_g \, .$$

In generale si consiglia di attribuire al secondo membro un valore uguale a circa 0,8 del primo, ma non è escluso che si possa spingere quel rapporto anche a valori superiori.

Quanto all'angolo θ, esso può calcolarsi agevolmente pensando che la corrente anodica circola durante il tempo in cui la tensione di griglia supera la tensione E_{gi} di interdizione relativa ad E_{a0}; esso quindi risulta

(1) Per un giusto apprezzamento di questo risultato, conviene aver presenti i valori di $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$ per diversi θ, quali sono riportati nella seguente tabella:

$\theta =$ 0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°
$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} =$ 1	0,995	0,97	0,95	0,915	0,883	0,827.

(2) È però da osservarsi che, a parità di valore massimo della corrente anodica, il rendimento di conversione in generale aumenta se la corrente anodica, anzichè essere fissa al suo massimo durante l'intervallo di tempo in cui ne è concessa la circolazione, ha andamento crescente nella prima metà e (naturalmente, a causa della simmetria) decrescente nella seconda (cfr. nota a pag. 497).

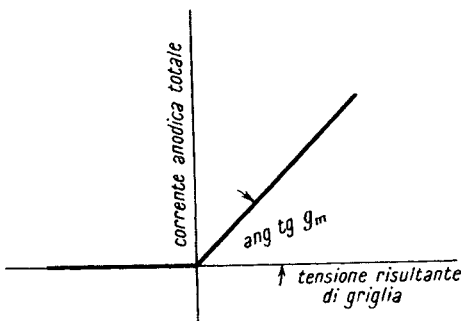
determinato dalla relazione:

$$\cos\theta = \frac{E_{g0} - E_{gi}}{E_g} \text{ (1)}.$$

22. - Studio analitico dei generatori di classe B e C. — Quanto precede contiene gli elementi essenziali per lo studio ed il progetto di un generatore soddisfacente a prefissate condizioni di funzionamento.

Siccome però la determinazione di tutti i diagrammi all'uopo occorrenti è alquanto laboriosa, può essere utile, almeno ai fini di un orientamento preliminare, sostituire ad essa una trattazione più semplice effettuabile con mezzi analitici, anche se le ipotesi semplificative che necessariamente si debbono porre a base del calcolo non siano perfettamente rispondenti alla realtà.

Fig. 255

L'ipotesi cui alludiamo consiste nel ritenere che la caratteristica globale mutua, cioè il diagramma della corrente anodica effettiva in funzione della tensione risultante di griglia (VIII, 9) sia composto della parte negativa dell'asse delle ascisse, seguita da una retta uscente dall'origine con coefficiente angolare g_m costante, cioè che la corrente anodica totale I_a (corrispondente alla somma della parte variabile e della eventuale parte fissa o di riposo) sia data dal prodotto:

$$g_m\left(-E_{g0} + e_g + \frac{E_{a0} + e_a}{\mu}\right), \tag{6}$$

ogni qualvolta il secondo membro ha valore positivo, mentre, per i valori negativi del secondo membro, sia $I_a = 0$ (fig. 255).

Con tali ammissioni, ponendo, come precedentemente:

$$e_g = E_g \cos\alpha\,, \qquad e_a = -E_a \cos\alpha \qquad (\alpha = \omega t)\,,$$

(1) Più esattamente si dovrebbe scrivere

$$\cos\theta = \frac{E_{g0} - E'_{gi}}{E_g},$$

essendo E'_{gi} (sempre $> E_{gi}$) l'ascissa del punto da cui parte la linea l di fig. 248

si avrà, pel valore istantaneo della corrente anodica, la espressione:

$$(7) \qquad I_a = g_m \left\{ -E_{g0} + \frac{E_{a0}}{\mu} + \left(E_g - \frac{E_a}{\mu}\right) \cos \alpha \right\},$$

limitatamente a quei valori di α pei quali l'espressione stessa è positiva, e valor nullo per gli altri. Pertanto il semiangolo θ che definisce la durata della circolazione di corrente anodica è dato da:

$$(8) \qquad \cos \theta = \frac{E_{g0} - \dfrac{E_{a0}}{\mu}}{E_g - \dfrac{E_a}{\mu}}.$$

L'ampiezza I_{a1} della componente fondamentale della corrente anodica sarà data da (App., A, 7):

$$I_{a1} = \frac{1}{\pi} \int_{-\theta}^{\theta} I_a \cos \alpha \, d\alpha .$$

Sostituendo ad I_a la espressione (6), osservando che è:

$$\int_{-\theta}^{\theta} \cos\alpha \, d\alpha = 2 \operatorname{sen} \theta , \quad \int_{-\theta}^{\theta} \cos^2 \alpha \, d\alpha = \frac{1}{2} \int_{-\theta}^{\theta} (1 + \cos 2\alpha) d\alpha = \theta + \operatorname{sen} \theta \cos \theta ,$$

e ponendo per $E_{g0} - \dfrac{E_{a0}}{\mu}$ il suo valore $\left(E_g - \dfrac{E_a}{\mu}\right) \cos \theta$ fornito dalla (8), si ha:

$$(9) \qquad I_{a1} = \frac{g_m}{\pi} \left(E_g - \frac{E_a}{\mu}\right) (\theta - \operatorname{sen} \theta \cos \theta) = \frac{g_m}{\beta} \left(E_g - \frac{E_a}{\mu}\right),$$

dove si è posto:

$$\beta = \frac{\pi}{\theta - \operatorname{sen} \theta \cos \theta} .$$

Per la componente costante, che chiameremo I_{a0} (1), con procedimento analogo si trova:

$$I_{a0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\theta}^{\theta} I_a \, d\alpha = \frac{g_m}{\pi} \left(E_g - \frac{E_a}{\mu}\right) (\operatorname{sen} \theta - \theta \cos \theta) ,$$

cioè

$$(10) \qquad I_{a0} = I_{a1} \frac{\operatorname{sen} \theta - \theta \cos \theta}{\theta - \operatorname{sen} \theta \cos \theta} = \frac{\beta}{\pi} (\operatorname{sen} \theta - \theta \cos \theta) I_{a1} .$$

(1) Tale I_{a0} è la somma della (eventuale) corrente anodica di riposo propriamente detta (cioè quella che si ha in assenza di eccitazione di griglia) e della componente continua di quella parte variabile della corrente anodica che sorge in conseguenza della e_g.

Siccome è $E_a = RI_{a1}$, e $\frac{g_m}{\mu} = g_a = \frac{1}{r_a}$, alle (9) e (10), con facili passaggi, si può dare l'aspetto:

$$I_{a1} = \frac{\mu E_g}{R + \beta r_a}, \tag{9'}$$

$$I_{a0} = \frac{\mu E_g}{R + \beta r_a} \frac{\beta}{\pi} (\text{sen}\,\theta - \theta \cos\theta). \tag{10'}$$

Se si vuol mettere in evidenza il valore massimo I_m della corrente anodica, cioè quello corrispondente ad $\alpha = 0$, basta osservare che dalle (7) e dalle (8) si deduce subito:

$$I_m = g_m \left(E_g - \frac{E_a}{\mu}\right)(1 - \cos\theta),$$

dopo di che dalle (9) e (10) si ha:

$$I_{a1} = \frac{I_m}{\beta(1 - \cos\theta)} = \frac{I_m}{\pi} \frac{\theta - \text{sen}\,\theta\cos\theta}{1 - \cos\theta}, \tag{9''}$$

$$I_{a0} = \frac{I_m}{\pi} \frac{\text{sen}\,\theta - \theta\cos\theta}{1 - \cos\theta}. \tag{10''}$$

Se la polarizzazione di griglia E_{g0} è regolata esattamente all'interdizione (funzionamento in classe B), si avrà $E_{a0} = \mu E_{g0}$, quindi $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\beta = 2$, e le (9'), (10') divengono:

$$I_{a1} = \frac{\mu E_g}{R + 2r_a}, \qquad I_{a0} = \frac{2\mu E_g}{\pi(R + 2r_a)}.$$

La prima di queste formole mette chiaramente in evidenza il carattere *lineare* del funzionamento di classe B, in quanto che per esso, come per il tipo A, si verifica che l'ampiezza della fondamentale della corrente anodica è proporzionale all'ampiezza della tensione eccitatrice, cioè il diagramma (I_{a1}, E_g) è una retta uscente dall'origine, il cui coefficiente angolare $\frac{\mu}{R + 2r_a}$ dipende dal carico [1].

---

[1] La linearità del funzionamento di classe B è tuttavia assai diversa da quella del tipo A. In questo invero la relazione di proporzionalità riguarda la intera successione dei valori delle grandezze variabili interessate; invece nel tipo B una tale proporzionalità completa non si ha fra la tensione eccitatrice e la *corrente* anodica, ma fra quella e la *tensione* ai capi del carico (e, di conseguenza, anche per la corrente circolante nei rami del circuito di carico). In altre parole, la deviazione dalla linearità *istantanea* viene corretta dalle peculiari proprietà *filtranti* (VI, 13) del circuito di carico.

Queste deduzioni sono però limitate al campo di validità della (6). In particolare esse cessano di essere esatte per valori di E_g tanto elevati che il potenziale anodico scenda a zero. Del resto la discussione dei nn. precc. ci ha insegnato che le curve (I_{a1}, E_g), se pur si iniziano con andamento all'incirca rettilineo, successivamente si incurvano.

Fig. 256

23. - Generatori di classe B′. — Tuttavia la zona di validità della (6) può, in certo qual modo, essere allargata, aumentando il valore di E_{g0} durante le elevate escursioni positive del potenziale di griglia, alle quali consegue una corrente di griglia i_g. A tale aumento si perviene in modo automatico disponendo in serie sul circuito di griglia una resistenza, la quale, venendo attraversata dalla i_g, determina un aumento di polarizzazione corrispondente alla caduta di tensione attraverso di essa. Tale resistenza verrà in generale shuntata con un condensatore attraverso il quale si fa strada la componente di elevata frequenza della i_g stessa (fig. 256) [1]. Con tale dispositivo si costituisce automatica-

---

[1] La corretta interpretazione dello scopo cui tendono dispositivi di tale genere, che spesso si incontrano nei circuiti radio, è un po' meno semplice di quello che non sembri a prima vista. Ad es., se un sistema resistenza-capacità in parallelo venisse alimentato con una *data* tensione (variabile), è evidente che ciascuno dei due elementi non risentirebbe alcuna influenza dalla presenza dell'altro. Invece una differenza sostanziale si avrebbe qualora l'alimentazione venisse fatta *a intensità costante*. In tale caso invero, se la corrente d'alimentazione comprende una componente costante ed una a variazione sinusoidale, è evidente che la prima non potrà fluire che attraverso il ramo resistenza, mentre la seconda si ripartirà fra i due rami in ragione inversa delle relative impedenze; in particolare, se la reattanza della capacità è sufficientemente piccola rispetto alla resistenza dell'altro ramo, per questo passerà una piccola frazione della componente medesima, cioè, in definitiva, il dispositivo consente di far disertare dal ramo resistenza le componenti variabili presenti nella corrente alimentatrice.

Nelle applicazioni pratiche non si verifica nè l'uno nè l'altro caso, ma si ha a che fare con alimentazioni le quali, in certo modo, partecipano della natura di entrambi i tipi fondamentali ricordati.

In particolare, avviene quasi sempre che un tale sistema (R, C) fa parte di un circuito alimentato a tensione costante $\mathbf{E}$, ma in serie con una impedenza $\mathbf{Z}$ (che, come nel caso attuale, potrà essere la resistenza equivalente allo spazio griglia-catodo di un triodo, in altri casi potrà essere quella dello spazio anodo-catodo più l'impedenza di carico) il cui valore è assai elevato in confronto a quello di (R, C), ed allora il corrispondente comportamento si avvicina molto a quello del tipo a intensità costante. Nel modo più semplice ci si convince di ciò se si fa uso della trasformazione circuitale indicata in I, 12, intendendo che la $\mathbf{Z}$ rappresenti la impedenza *interna*, ed il sistema (R, C) la impedenza *esterna* $\mathbf{Z}_e$. Un tale circuito si comporta cioè come se le $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{Z}_e$ fossero disposte in parallelo e l'alimentazione fosse fatta con una corrente $\mathbf{I} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}}$, la quale, per essere

mente una polarizzazione supplementare [1], la quale però non è da confondersi con quella (polarizzazione catodica) di cui si è parlato al n. 15.

Quest'ultima può utilmente essere impiegata anche nel caso attuale, allo scopo di consentire che θ possa rimanere costante anche con valore diverso da $\frac{\pi}{2}$, con che, come la (9′) insegna, si avrebbe ancora relazione di linearità fra I_{a1} ed E_g.

Per dimostrare tale possibilità, basterà far vedere che, indicando con r tale resistenza catodica, si può determinare r in guisa da ottenere lo scopo che ci siamo prefissi.

Nelle formole precedenti sarà intanto da sostituirsi $E_{g0} + rI_{a0}$ ad E_{g0}. Con ciò la (8), scrivendo RI_{a1} al posto di E_a, diviene:

$$\cos\theta = \frac{E_{g0} - \dfrac{E_{a0}}{\mu} + rI_{a0}}{E_g - \dfrac{RI_{a1}}{\mu}},$$

Esprimendo I_{a0} ed I_{a1} per E_g secondo le (9′), (10′), con facile calcolo si riconosce che essa assume l'aspetto:

$$\cos\theta = r\alpha + \frac{E_{g0} - \dfrac{E_{a0}}{\mu}}{\gamma E_g},$$

dove α e γ dipendono da θ e dagli elementi del triodo, *ma non* da E_g.

Pertanto se, come precedentemente, la polarizzazione fissa E_{g0} è regolata all'interdizione, il secondo termine si annulla, e la relazione che ne risulta, in quanto vincola soltanto le grandezze r e θ, mette in evidenza la possibilità di determinare r per un dato valore di θ, con che l'asserto è dimostrato.

Si realizza così un funzionamento che, quantunque per ogni valore particolare di E_g non possa classificarsi nel tipo B, perchè l'angolo di circolazione della corrente anodica è diverso di 180°, ha tuttavia in comune col B la importantissima proprietà di fornire correnti I_{a1} proporzionali ad E_g, cioè di essere, come si dice, *lineare*.

Tale funzionamento si denomina talvolta di classe B′.

Z_e piccola in confronto di Z, è sensibilmente uguale alla corrente effettiva $\dfrac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z} + \mathbf{Z}_e}$. D'altra parte, siccome, per la stessa ragione, la impedenza dei due rami $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}_e$ in parallelo non differisce sensibilmente dalla sola $\mathbf{Z}_e$, si conclude che il sistema funziona come se il gruppo (R, C) fosse alimentato a intensità costante $\mathbf{I}$.

[1] Occorre rilevare che, siccome tale polarizzazione equivale ad un aumento della impedenza interna del generatore che alimenta il circuito di griglia, essa viene in definitiva ad accentuare la deformazione della tensione d'entrata che, come già si è osservato, è inevitabile quando si ha corrente di griglia.

Tuttavia da tale deformazione è lecito prescindere, potendosi far assegnamento sull'effetto correttivo del circuito accordato costituente il carico anodico.

24. - Potenza. - Rendimento. - Dissipazioni anodiche e di griglia. — Per un generico funzionamento in classe B e C se, col sussidio della (9′), si va a calcolare la potenza utile $\frac{RI_{a1}^2}{2}$, si trova che essa, per un dato valore di E_g, è massima per $R = \beta r_a$; in particolare per $R = 2r_a$ se si tratta di funzionamento in classe B. (In pratica però, per le ragioni già esposte, la R corrispondente al massimo si ottiene moltiplicando r_a per un coefficiente un po' diverso da 2).

In generale, quando si possano utilizzare le (9′) e le (10′) o le equivalenti (9″) e (10″), si ha che la potenza erogata dal generatore anodico è misurata da

$$E_{a0}I_{a0} = E_{a0}I_m \frac{\operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta}{\pi(1-\cos\theta)},$$

e quella raccolta nel circuito di utilizzazione da

$$\frac{E_aI_{a1}}{2} = E_aI_m \frac{\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta}{2\pi(1-\cos\theta)},$$

da cui segue per il rendimento di conversione η il valore

$$\eta = \frac{E_a}{E_{a0}} \frac{\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta}{2(\operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta)}.$$

Queste formole ci permettono di confermare che il rendimento η cresce col diminuire dell'angolo θ di circolazione della corrente anodica. Si può infatti constatare che la frazione

$$\frac{\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta}$$

è, nell'intervallo $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, funzione decrescente di θ [1].

---

[1] Invero la derivata di tale frazione, a meno di un fattore essenzialmente positivo, equivale a

$$(1-\cos 2\theta)(\operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta) - \theta(\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta)\operatorname{sen}\theta,$$

e questa espressione, per essere $1 - \cos 2\theta = 2\operatorname{sen}^2\theta$ e $\operatorname{sen}\theta > 0$, ha lo stesso segno della funzione:

$$f(\theta) = 4\operatorname{sen}\theta(\operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta) - \theta(2\theta - \operatorname{sen}2\theta) = 2 - 2\theta^2 - 2\cos 2\theta - \theta\operatorname{sen}2\theta.$$

Derivando successivamente, si ottiene:

$$f'(\theta) = -4\theta + 3\operatorname{sen}2\theta - 2\theta\cos 2\theta, \qquad \frac{1}{4}f''(\theta) = -1 + \cos 2\theta + \theta\operatorname{sen}2\theta,$$

$$\frac{1}{4}f'''(\theta) = -\operatorname{sen}2\theta + 2\theta\cos 2\theta,$$

e proseguendo, si verifica che, per $\theta = 0$, tanto la $f(\theta)$ quanto le sue prime cinque derivate sono nulle, mentre la derivata sesta ha valore negativo. Ciò significa che, per θ convenientemente piccolo, $f(\theta)$ ha valori negativi, quindi la frazione predetta è certamente decrescente per $\theta = 0$. Ora, è facile inoltre verificare che la $f(\theta)$ si conserva nega-

Invece la potenza utile diminuisce, come può rilevarsi osservando il comportamento della frazione

$$\frac{\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta}{1-\cos\theta},$$

in quanto che, per dati valori di I_m e di R, la potenza predetta è proporzionale al quadrato di tale frazione ([1]).

Per un rapido apprezzamento quantitativo di questi risultati giova esaminare la tabella seguente in cui sono riportati i valori effettivi delle frazioni dianzi studiate.

θ	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°
$\frac{\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta}{2(\operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta)}$	1	0,999	0,997	0,993	0,988	0,98	0,97	0,96	0,95
$\frac{\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta}{1-\cos\theta}$	0	0,12	0,23	0,35	0,46	0,57	0,68	0,78	0,88

θ	45°	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	90°
$\frac{\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta}{2(\operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta)}$	0,93	0,92	0,91	0,90	0,88	0,86	0,84	0,82	0,80	0,78
$\frac{\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta}{1-\cos\theta}$	0,98	1,06	1,14	1,23	1,30	1,37	1,44	1,49	1,54	1,57

---

tiva in tutto l'intervallo che ci interessa. Invero, se così non fosse, dovrebbe tale $f(\theta)$ annullarsi almeno una volta nell'intervallo stesso, e di conseguenza, essendo anche $f(\theta) = 0$, si concluderebbe per l'esistenza di un θ_1 tale che $f'(\theta_1) = 0$. Lo stesso ragionamento potendosi poi ripetere per la f', f'', f''', sarebbe così dimostrata l'esistenza di un θ' appartenente all'intervallo predetto e soddisfacente alla condizione $f'''(\theta') = 0$, che, tenuta presente l'espressione di f''', equivale a:

$$\operatorname{tg} 2\vartheta' = 2\vartheta' .$$

Ora ciò è impossibile, perchè nessun arco inferiore a π è uguale alla sua tangente. Dunque, al decrescere di θ, il rendimento aumenta.

[1]) Invero, tale frazione ha valore nullo per $\theta = 0$ e la sua derivata ha il segno del trinomio

$$4\operatorname{sen}\theta - 2\vartheta - \operatorname{sen} 2\theta ,$$

il quale per $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ è costantemente positivo. Infatti, dalle note disuguaglianze (App., *A*, 1):

$$\operatorname{sen}\theta > \theta - \frac{\theta^3}{6}, \qquad \operatorname{sen} 2\theta < 2\theta - \frac{4}{3}\theta^3 + \frac{\theta^5}{15},$$

La differenza fra la potenza spesa e quella utilizzata nel carico corrisponde, come sappiamo, alla potenza dissipata sull'anodo, e converrà, volta per volta, verificare che essa non superi i limiti imposti dal costruttore.

Ed infine occorrerà calcolare anche la potenza richiesta dal circuito di griglia, sia per dedurne la prestazione richiesta al generatore che lo alimenta, sia per valutare il rendimento complessivo. A tal proposito è necessario osservare che, siccome la tensione applicata alla griglia è alternativa, tale computo energetico dovrà farsi mettendo in conto la sola componente armonica fondamentale della corrente stessa.

Tutte queste valutazioni potranno opportunamente effettuarsi per via grafica qualora gli effettivi diagrammi della corrente anodica e di griglia siano stati costruiti col sussidio delle caratteristiche del tubo impiegato, conformemente a quanto fu indicato al n. 18.

È interessante confrontare il diverso comportamento dei circuiti di anodo e di griglia, nei riguardi della ripartizione dell'erogazione energetica dei rispettivi generatori. Nel circuito anodico invero, dove la potenza è data da un generatore di corrente continua, si ha che la potenza spesa si commisura alla componente continua, mentre la parte utilizzata nel carico è quella riferentesi alla componente variabile; nel circuito di griglia l'alimentazione è invece fatta a tensione alternata, ed anche per esso la corrente erogata si può decomporre in una parte continua (valor medio della corrente di griglia durante un periodo) ed una parte variabile; senonchè, a differenza del circuito anodico, mentre la prima può essere utilizzata ai fini della polarizzazione, la seconda viene invece dissipata sulla griglia stessa [1].

---

si deduce

$$4 \operatorname{sen} \theta - 2\theta - \operatorname{sen} 2\theta > -\frac{4}{15}\theta^5 + \frac{2}{3}\theta^3 = \frac{2}{3}\theta^3\left(1 - \frac{2}{5}\theta^2\right),$$

ed il secondo membro essendo positivo per $\theta^2 < \frac{5}{2}$, lo sarà a fortiori per $\theta < \frac{\pi}{2}$. Resta pertanto dimostrato che la potenza utile diminuisce col diminuire dell'angolo θ.

Se poi si osserva che la disuguaglianza $f(\theta) < 0$, come facilmente si verifica, equivale all'altra:

$$\frac{\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta}{2(\operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta)} > \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta},$$

si può concludere che, a parità di E_a, E_{a0} (e quindi di I_m) e di θ, il rendimento η, nel caso che il diagramma della corrente anodica sia costituito da tratti di cosinusoide, è superiore a quello che si avrebbe se la corrente anodica, durante gli intervalli in cui è diversa da zero, fosse costantemente uguale ad I_s (cfr. nota a pag. 490).

[1] Più precisamente, se con I_{g0}, I_{g1} si indicano la componente continua e la componente armonica fondamentale della corrente di griglia, la potenza $\frac{E_g I_{g1}}{2}$ fornita dal sistema eccitatore si divide in due parti, di cui l'una, di valore $E_{g0} I_{g0}$, è *assorbita* dal generatore della tensione di polarizzazione (che è sempre *contraria* alla I_{g0}), mentre la parte residua viene effettivamente dissipata dalla griglia.

25. - Esempio di calcolo di un generatore. — Per ben comprendere come tutte le precedenti considerazioni debbano utilizzarsi nei casi concreti, gioverà riferirsi ad un esempio effettivo.

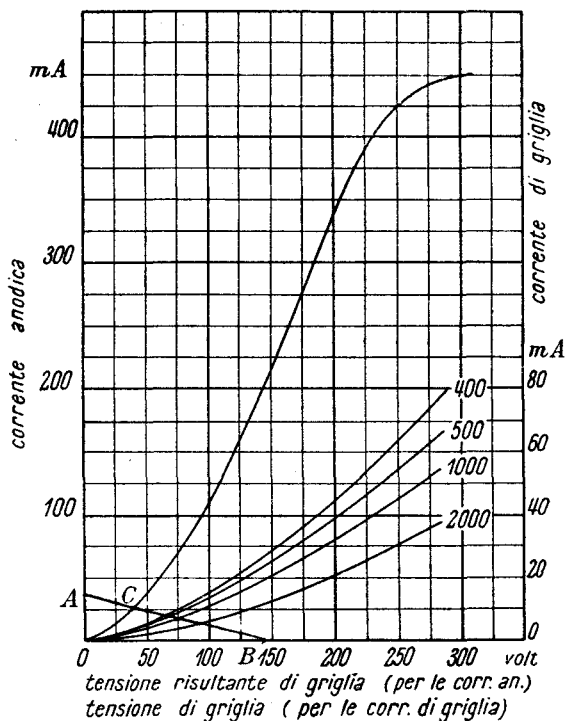
Proponiamoci di costituire un generatore di classe C capace di erogare una potenza utile di 300 watt alla frequenza di $\frac{5 \cdot 10^6}{2\pi}$ Hz.

Ci varremo all'uopo di un tubo Philips TA 4/250 i cui dati fondamentali sono i seguenti: tensione di accensione 12,5 volt, corrente di accensione 5,5 amp., corrente di saturazione 450 mA, tensione anodica 4000 volt, dissipazione anodica ammissibile 250 watt, coefficiente di amplificazione medio 30. In fig. 257 è disegnata la caratteristica mutua globale media del tubo, cioè la curva che fornisce i valori della corrente anodica in funzione della tensione risultante di griglia, essendosi constatato che l'intera famiglia delle caratteristiche mutue può sensibilmente ottenersi da essa mediante semplici traslazioni parallele all'asse delle ascisse. È questa una ipotesi semplificativa senza dubbio assai più aderente alla realtà che non

Fig. 257

quella di cui ci siamo valsi al n. 22. Nella stessa figura sono anche riportate le curve delle correnti di griglia, per diverse tensioni anodiche, in funzione delle tensioni *effettive* di griglia.

Assunto $E_{a0} = 4000$ V, fisseremo la tensione E_a in 3600 volt, con che la minima tensione anodica sarà di 400 volt; talchè, se disporremo le cose in guisa che la massima tensione positiva di griglia sia ad es. di 250 volt, si avrà come massimo della tensione risultante di griglia il valore:

$$250 + \frac{400}{30} = 263,3 \text{ V},$$

più che sufficiente per assicurare il raggiungimento di una punta di corrente anodica quasi uguale alla corrente di saturazione senza che, negli istanti corrispondenti ai minimi di tensione anodica, si verifichino eccessive intensità della corrente di griglia capaci di creare depressioni sensibili nel diagramma della corrente anodica stessa.

Fissati così tali elementi, ne risulta pel rapporto $\frac{E_{a0}}{E_a}$ il valore 0,9 e per I_m il valore 435 mA; dopo di che, esaminando la tabella a pag. 497, possiamo in prima approssimazione dedurne, che, per ottenere la potenza utile P_u richiesta, occorrerà attribuire all'angolo θ un valore prossimo a 60°. Adotteremo pertanto $\theta = 60°$, con che, effettuando il calcolo nell'ipotesi di caratteristica rigorosamente lineare, cui appunto si riferisce la tabella predetta, si avrebbe:

$$P_u = 306 \text{ W}, \qquad \eta = 0{,}81 .$$

Un tale rendimento di conversione adduce senza dubbio ad una prudente utilizzazione del tubo, in quanto che la potenza dissipata sull'anodo, per un carico utile di 306 watt, verrebbe ad essere di

$$306 \left(\frac{1}{0{,}81} - 1\right) = 72 \text{ W} .$$

La (8), per $\cos\theta = 0{,}5$, fornisce la relazione:

$$2\left(-E_{g0} + \frac{E_{a0}}{\mu}\right) + \left(E_g - \frac{E_a}{\mu}\right) = 0 ,$$

da cui, posti per E_{a0}, E_a, μ i loro valori, e tenendo conto della relazione, già fissata, $E_g = 250 + E_{g0}$, si ricavano i seguenti valori di E_{g0} ed E_g:

$$E_{g0} = 396{,}6 \text{ V}, \qquad E_g = 646{,}6 \text{ V} .$$

Con questi dati andiamo a tracciare l'effettivo diagramma della corrente anodica, procedendo, naturalmente, per via grafica. La costruzione però sarà più semplice di quella indicata al n. 18, perchè, potendosi ritenere le correnti anodiche fornite da un'unica curva caratteristica avente per ascisse i valori delle tensioni risultanti di griglia, basterà calcolare un sufficiente numero di questi e rilevare le corrispondenti correnti anodiche.

Nella tabella che segue (pag. 502) sono indicati i risultati di tali rilievi eseguiti di 5° in 5°, limitatamente a quella parte del semiperiodo che va da $\alpha = 0°$ ad $\alpha = 60°$, ed in fig. 258 è disegnato il diagramma della corrente anodica effettiva I_a in funzione dell'angolo α.

Per calcolare le ampiezze delle prime cinque armoniche sono stati valutati anche i prodotti di tale I_a per $\cos\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\cos 3\alpha$, $\cos 4\alpha$, $\cos 5\alpha$, e nella figura 258 sono disegnati i corrispondenti diagrammi.

Per la determinazione effettiva della componente costante e della ampiezza dell'armonica n^{ma}, occorre ora calcolare (App., *A*, 7) gli integrali:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi I_a d\alpha \,, \qquad \frac{2}{\pi}\int_0^\pi I_a \cos n\alpha \, d\alpha \,,$$

il che potrà farsi per via grafica valutando le aeree dei diagrammi disegnati, oppure per via numerica mediante le note formole pel calcolo

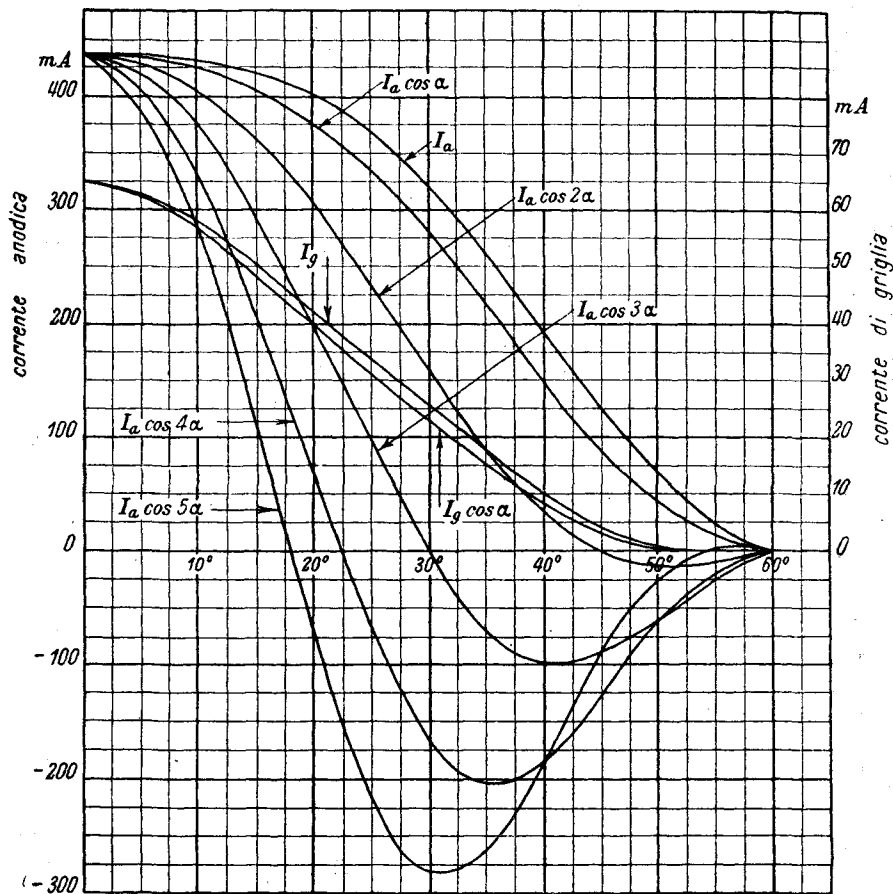



Fig. 258

approssimato degli integrali definiti. Per esempio, per calcolare I_{a0}, basterà sommare i numeri della colonna I_a dopo aver diviso il primo per 2, e dividere il risultato per 36, in quanto che ciò equivale a fare la media dei 36 numeri costituiti dalle medie dei valori che I_a assume alle estre-

α	$E_g \cos \alpha$	$E_a \cos \alpha$	$v_g = -E_{g0} + E_g \cos \alpha$	$v_a = E_{a0} - E_a \cos \alpha$	$v_g + \frac{v_a}{\mu}$	I_a	$I_a \cos \alpha$	$I_a \cos 2\alpha$	$I_a \cos 3\alpha$	$I_a \cos 4\alpha$	$I_a \cos 5\alpha$	I_g	$I_g \cos \alpha$
0°	646,6	3600	250,0	400	263,3	435	435	435	435	435	435	65	65
5°	644	3585	274,4	415	261	433	431	426	418	407	392	62	62
10°	637	3546	240,4	454	256	432	426	406	374	331	277	58	57
15°	625	3478	228,4	522	246	420	406	364	297	210	109	50	48
20°	608	3384	211,4	616	232	400	376	306	200	69	— 69	41	39
25°	586	3262	189,4	738	214	370	335	238	96	— 64	—212	34	31
30°	560	3118	163,4	882	193	325	281	163	0	—163	—281	26	23
35°	530	2948	133,4	1052	168	265	217	91	— 69	—203	—264	18	15
40°	495	2757	98,4	1243	140	195	149	34	— 98	—183	—183	10	8
45°	455	2545	60,4	1455	109	127	90	0	— 90	—127	— 90	4	3
50°	416	2315	19,4	1685	76	72	46	— 12	— 62	— 68	— 25	0	0
55°	370	2063	— 26,6	1937	38	26	15	—9	— 25	— 20	2	0	0
60°	323,3	1800	— 73,3	2200	0	0	0	0	0	0	0	0	0

mità di *ciascuno* dei 36 uguali intervalli in cui è stato diviso il semiperiodo (evidentemente, i valori di I_a per $60° < \alpha < 180°$ sono tutti nulli); e così, per calcolare $I_{a1}, I_{a2}, \ldots$ si utilizzeranno allo stesso modo i numeri delle colonne $I_a \cos \alpha$, $I_a \cos 2\alpha, \ldots$ e poi si raddoppieranno i risultati.

Così procedendo, si trova che lo sviluppo in serie di Fourier della corrente anodica si presenta come segue:

$$I_a = 91 + 166 \cos \alpha + 122 \cos 2\alpha + 70 \cos 3\alpha + 22 \cos 4\alpha - 7 \cos 5\alpha \ldots$$

Possiamo immediatamente concludere che la potenza di alimentazione P_a e la potenza utile P_u valgono rispettivamente:

$$P_a = E_{a0} I_{a0} = 4000 \cdot 91 \cdot 10^{-3} = 364 \text{ W} ;$$

$$P_u = \frac{E_a I_{a1}}{2} = \frac{3600 \cdot 166 \cdot 10^{-3}}{2} = 299 \text{ W} .$$

Il rendimento di conversione risulta dunque

$$\eta = \frac{299}{364} = 0{,}822 ,$$

in buon accordo col valore dianzi previsto.

Con la scorta delle caratteristiche di griglia potremo procedere alla determinazione dei valori delle correnti di griglia I_g nei vari istanti ed alla costruzione del relativo diagramma. A tal uopo sono stati calcolati (vedi 4ª e 5ª colonna della tabella precedente) i valori delle tensioni effettive di griglia $v_g = -E_{g0} + E_g \cos \alpha$ e delle contemporanee tensioni anodiche $v_a = E_{a0} - E_a \cos \alpha$, mediante i quali sono stati poi rilevati i corrispondenti valori di I_g e calcolati quelli di $I_g \cos \alpha$, che sono riportati nelle ultime due colonne della tabella. Mediante i primi si calcolerà la componente costante I_{g0} e coi secondi l'ampiezza della prima armonica I_{g1}. Si trova così:

$$I_{g0} \cong 9{,}4 \text{ mA} , \qquad I_{g1} \cong 18 \text{ mA} ;$$

quindi , per la potenza P_g d'eccitazione si avrà:

$$P_g = \frac{E_g I_{g1}}{2} = \frac{646{,}6 \cdot 18 \cdot 10^{-3}}{2} \cong 6 \text{ W} .$$

Di tale potenza P_g, una parte, e precisamente $396{,}6 \cdot 9{,}4 \cdot 10^{-3} = 3{,}7$ W, verrà assorbita dal sistema che fornisce la tensione E_{g0}, mentre la rimanente, cioè $6 - 3{,}7 = 2{,}3$ W, andrà dissipata sulla griglia (cfr. nota a pag. 498).

Alla polarizzazione E_{g0} della griglia si potrà provvedere con un apposito generatore avente la tensione di 396,6 volt, oppure anche a mezzo di una resistenza inserita fra il catodo ed il carico anodico (1), elevando

(1) Il primo metodo è sempre da preferirsi in quei casi in cui non si può essere sicuri della costanza degli elementi circuitali del carico anodico.

in pari tempo la E_{a0} a 4396,6 V. In questo ultimo caso tale resistenza sarebbe percorsa dalla corrente somma di I_a ed I_g, quindi, essendo $I_{a0} + I_{g0} = 100{,}4$ mA, le si dovrà assegnare il valore:

$$r = \frac{396{,}6}{100{,}4 \cdot 10^{-3}} = 3950\ \Omega\ .$$

Naturalmente, il generatore anodico dovrà erogare una ulteriore potenza P_r misurata da

$$P_r = 396{,}6 \cdot 91 \cdot 10^{-3} \cong 36\ \mathrm{W}\ ,$$

con che evidentemente ne viene a scapitare il rendimento complessivo. La resistenza stessa verrà poi shuntata con un condensatore la cui capacità C_1 dovrà essere tale che la reattanza $\frac{1}{C_1\omega}$ risulti abbastanza piccola in confronto ad r. Fissando ad es. $r = \frac{50}{C_1\omega}$, si ricaverà per C_1 il valore:

$$C_1 = \frac{50}{3950 \cdot 5 \cdot 10^6}\ \mathrm{F} = 2{,}5\ \mathrm{m}\mu\mathrm{F}\ .$$

In tali condizioni nella resistenza r, insieme ad una corrente continua di 100,4 mA, transiterà anche una componente alternata di pulsazione ω e di ampiezza $\cong \frac{166 + 18}{50} = 3{,}7$ mA.

Qualora si adotti un tale dispositivo, è necessario esaminare se, nel caso in cui per una ragione qualunque venisse a mancare la eccitazione di griglia, e quindi questa si trovasse stabilmente a potenziale nullo, vi può essere pericolo di danneggiamento per il tubo elettronico. Per lo scopo occorre calcolare la corrente anodica I corrispondente a tale eventualità. Per determinarla si osservi che, detta $i = f(v_g)$ l'equazione della curva disegnata in fig. 257, la cercata corrente I deve soddisfare all'equazione:

$$I = f\left(-rI + \frac{E_{a0} - rI}{\mu}\right),$$

il che significa che essa è misurata dall'ordinata del punto di incontro della curva predetta con la retta la cui equazione in coordinate (v_g, i) è

$$v_g = \frac{E_{a0} - ri}{\mu} - ri\ ,$$

cioè, nel caso nostro:

$$v_g = 146{,}6 - 3950\left(1 + \frac{1}{30}\right) i\ .$$

Tale retta si può facilmente tracciare osservando che le sue intersezioni A e B con gli assi hanno rispettivamente per ordinata ed ascissa $i = 36$ mA, $v_g = 146{,}6$ V. Alla intersezione C di essa con la curva caratteristica si legge così il valore cercato, che è $I = 28$ mA. La corrispondente dissipazione anodica risulta di circa 120 W.

Per calcolare il rendimento complessivo del sistema, bisognerà mettere in conto anche la potenza P_f occorrente per l'accensione del catodo, cioè:

$$P_f = 12{,}5 \cdot 5{,}5 = 69 \text{ W} .$$

Si trova così per tale rendimento il valore:

$$\frac{299}{364 + 6 + 69} = 0{,}68 ,$$

oppure, qualora la polarizzazione E_{g0} sia ottenuta con la resistenza r:

$$\frac{299}{364 + 6 + 69 + 36} = 0{,}62 .$$

Il circuito di carico anodico sarà, al solito, costituito da un sistema tipo (R, L, C) parallelo, la cui resistenza apparente alla pulsazione di servizio dovrà essere di:

$$\frac{3600}{166 \cdot 10^{-3}} = 21\,600\ \Omega .$$

Per maggiore generalità supponiamo che il circuito di carico effettivo — che potrebbe ad es. essere un'antenna trasmittente — debba essere accoppiato magneticamente al circuito anodico con un coefficiente di trasferimento (III, 24) che riterremo di 0,80. Il coefficiente di risonanza del circuito anodico sarà allora ridotto secondo il rapporto $\frac{1}{1 - 0{,}8} = 5$, e pertanto occorrerà costituire il carico anodico con un circuito avente $\varepsilon = 300$ se si vuole realizzare ad es. un coefficiente apparente di risonanza di 60. La corrente in ciascuno dei rami del carico anodico risulterà così di

$$\cong 60 \cdot 166 \cdot 10^{-3} = 10 \text{ A} ,$$

e poichè la potenza dissipata nel ramo L deve essere di

$$(1 - 0{,}8)\, 299 \cong 60 \text{ W} ,$$

ne risulta per R il valore:

$$R = \frac{2 \cdot 60}{10^2} = 1{,}2\ \Omega ,$$

da cui si deduce che deve assumersi:

$$L = \frac{\varepsilon R}{\omega} = \frac{300 \cdot 1{,}2}{5 \cdot 10^6} \text{ H} = 72\ \mu\text{H} ,$$

e conseguentemente:

$$C = \frac{1}{L\omega^2} = \frac{1}{72 \cdot 10^{-6} \cdot 25 \cdot 10^{12}} \text{ F} = 555\ \mu\mu\text{F} .$$

È appena il caso di richiamare che le potenze corrispondenti alle armoniche superiori saranno irrilevanti. Invero, eseguendone il calcolo

secondo le norme indicate in VI, 13, si troverebbero, ad es. per la seconda e terza armonica, le potenze rispettive di circa 0,02 W e 0,002 W.

All'alimentazione anodica provvederemo con un generatore di tensione continua capace di erogare la potenza di 364 watt alla tensione di 4000 volt (oppure di 400 W a 4396,6 V qualora la polarizzazione di griglia sia ottenuta con resistenza catodica). Se l'alimentazione verrà fatta in parallelo, occorrerà disporre in serie con esso una bobina la cui induttanza L' dovrà essere opportunamente dimensionata affinchè la corrente nel ramo contenente il generatore non abbia apprezzabili componenti di alta frequenza. Se, ad es., per la fondamentale di una tale componente consentiamo una ampiezza I pari al 3% della I_{a1}, cioè $I = 5$ mA, la induttanza L' dovrà essere capace di assorbire la tensione $E_a = 3600$ volt con tale I, o, ciò che è lo stesso, la resistenza equivalente al carico dovrà corrispondere al 3% della reattanza $L'\omega$. Se ne deduce:

$$0{,}03 \cdot 5 \cdot 10^6 L' = 21\,600\,, \quad \text{da cui} \quad L' = 145 \text{ mH}\,.$$

Infine, pel condensatore di blocco che separa il carico dall'alimentatore anodico, ne stabiliremo la capacità C_b ponendo la condizione che la reattanza $\frac{1}{C_b\omega}$ sia piccola in confronto alla resistenza equivalente al carico. Fissando ad es. un rapporto 100 fra le due, assumeremo:

$$C_b = \frac{100}{21\,600 \cdot 5}\,\mu\text{F} = 930\,\mu\mu\text{F}\,.$$

26. - Moltiplicatori di frequenza a triodi. — Gli studi precedenti ci hanno messo in luce che un generatore funzionante con elevati valori

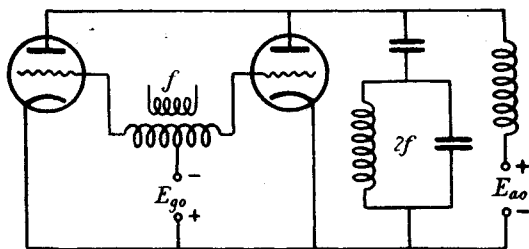



Fig. 259

della polarizzazione negativa di griglia dà luogo a correnti anodiche ricche di armoniche.

Da ciò discende la possibilità di far funzionare il generatore stesso come *moltiplicatore di frequenza*, cioè come convertitore della energia di corrente continua fornita dal generatore anodico in energia di corrente

alternata avente una frequenza multipla di quella con la quale si va ad eccitare il circuito di griglia.

Se si vuole ad es. ottenere la n-plicazione, basterà costituire il carico anodico con una impedenza accordata su una frequenza n-pla di quella f con cui è eccitata la griglia, ed avente, al solito, un coefficiente di risonanza tale che si possa ritenere trascurabile il valore della impedenza stessa a frequenze diverse da nf. In tali condizioni, la tensione che si localizza ai capi del carico sarà sensibilmente sinusoidale e di frequenza nf.

Non ci addentreremo nello studio di tali sistemi, solo ci limiteremo ad asserire che la potenza ritraibile da essi è sensibilmente inferiore a quella che si può ottenere nel funzionamento ordinario.

Fig. 260 *a*)

Fig. 260 *b*)

Fig. 260 *c*)

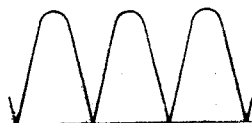
Un funzionamento assai più soddisfacente, limitatamente al caso di $n = 2$, può ottenersi costituendo un ***duplicatore di frequenza*** mediante un processo che si potrebbe chiamare di sovrapposizione di due generatori ordinari. All'uopo occorre usare due triodi uguali e sfruttare il peculiare comportamento della loro connessione in semisimmetrico (VIII, 25), secondo lo schema a fig. 259.

Se la polarizzazione fissa delle griglie è ad es. regolata all'interdizione (classe B), le correnti anodiche di ciascuno dei due triodi avranno la forma indicata nelle figg. 260 *a*) *b*), e pertanto nel circuito anodico, dove tali correnti si sommano, si avrà un diagramma di corrente della forma di fig. 260 *c*), la cui frequenza è evidentemente doppia di quella f di eccitazione.

Basterà dunque accordare il circuito di carico alla frequenza $2f$ per ottenere ai capi di questo una tensione pressochè sinusoidale di tale frequenza.

In particolare, se si suppone che ciascuna delle due curve *a*) *b*) sia una semisinusoide di ampiezza I_a, l'ampiezza della componente fondamentale a frequenza $2f$ della corrente anodica totale sarà:

$$\frac{4}{3\pi} I_a \, ,$$

come si deduce da una formola nota (App., *A*, 8).

C) Generatori autoeccitati.

27. - Principio dell'autoeccitazione. — Nei generatori fino ad ora studiati ha parte essenziale la tensione eccitatrice e_g applicata al circuito di griglia.

Ma, come è stato accennato al n. 1, a tale eccitazione è possibile provvedere con mezzi prelevati dallo stesso circuito anodico, realizzandosi così dei veri e propri generatori autoeccitati. Per lo scopo, bisognerà evidentemente creare un collegamento fra il circuito anodico e quello di griglia, cioè, come si dice, accoppiare questi due circuiti.

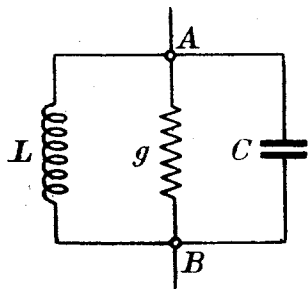



Fig. 261

Per comprendere come, per tale via, si possa pervenire ad ottenere una corrente alternata permanente nel circuito anodico, si consideri, per fissare le idee, un ordinario circuito oscillatorio tipo parallelo, a tre rami g, L, C (fig. 261). Come si è veduto al Capitolo III, se g è sufficientemente piccola, un tale sistema, una volta rimosso dalla sua condizione di equilibrio elettrico, per es. mediante una carica attribuita al condensatore, diviene sede di oscillazioni smorzate, cioè si ha che la tensione ai suoi capi varia col tempo secondo una legge del tipo:

$$e^{-\alpha t} \operatorname{sen} \omega t \, ,$$

essendo $\omega \cong \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ed α un certo numero positivo dipendente dalle costanti circuitali, che s'annulla per $g = 0$.

La ragione dello smorzamento, come a suo tempo fu avvertito, sta in ciò, che ad ogni oscillazione si dissipa in g parte dell'energia inizialmente conferita al sistema, tale dissipazione dipendendo dal fatto che in g viene a circolare una corrente, ivi mantenuta dalla d. d. p. esistente ai capi A, B del sistema stesso.

Ma se fra A e B si deriva il circuito anodico di un triodo — con relativo generatore anodico — il cui circuito di griglia sia eccitato con una d. d. p. di pulsazione precisamente uguale ad ω, di ampiezza e fase opportune, il triodo stesso viene ad obbligare il suo generatore ad erogare quella corrente e quella energia che g richiede. Ed è così che si realizza uno stato di cose a carattere permanente.

Tutto ciò, in sostanza, non è che un diverso modo di concepire il funzionamento dei generatori studiati nei nn. precc. Esso però ci conduce ad interpretare il fenomeno della permanenza della corrente alternativa come effetto di un tempestivo *rifornimento* di energia che al si-

stema g, L, C viene fatto dal gruppo triodo-generatore anodico; e la tensione di griglia non ha altro ufficio che quello di disciplinare l'entità di tali rifornimenti, assicurandone inoltre la tempestività.

Ma si può anche pensare che tale funzione venga demandata allo stesso circuito g, L, C. Questo infatti è certamente in grado di far agire nel circuito di griglia una tensione opportuna: basta all'uopo trasferire in esso tutta o parte di quella stessa che si localizza fra A e B.

Il sistema cui così si perviene può essere paragonato al pendolo di un orologio che, mediante le sue stesse oscillazioni — le quali spontaneamente si smorzerebbero — comanda, a mezzo di un opportuno congegno (scappamento), un organo che gli rifornisce ad ogni oscillazione quella energia che per effetto degli inevitabili attriti si è dissipata, prelevandola da un qualunque serbatoio energetico all'uopo predisposto (ad es. una molla caricata, un peso situato a conveniente altezza, ecc.).

Si potrebbe obbiettare che il paragone non è perfetto in quanto che nel pendolo il rifornimento di energia avviene per un tempo brevissimo in confronto alla durata dell'oscillazione, mentre nel sistema elettrico che siamo studiando il rifornimento *può* aver luogo istante per istante. Si è detto «può», ma non sempre è così. Invero, se le cose vengono disposte in guisa da realizzarsi un funzionamento in classe B oppure C, si avrà anche nel sistema elettrico un rifornimento ad impulsi (cfr. n. 21), perfettamente paragonabile al caso meccanico del pendolo.

Che un sistema elettrico siffatto sia atto a funzionare come generatore anche senza l'intervento di una tensione eccitatrice esterna, si può facilmente dedurre dalle considerazioni generali svolte al Cap. VII. Fu già avvertito (VIII, 11) che la tensione variabile μe_g che figura nel circuito differenziale anodico è da intendersi l'equivalente di una variazione della resistenza dello spazio anodo-catodo; e precisamente, quando μe_g è cospirante con la corrente i_a, si ha certo diminuzione della resistenza stessa. In altre parole, si può dire che la μe_g sta a rappresentare una resistenza di valore $-\frac{\mu e_g}{i_a}$, la quale, al pari della $\frac{1}{g_a}$, ha carattere differenziale, perchè tali sono e_g ed i_a; in definitiva dunque si può trattare il circuito come se la sua resistenza valesse $\frac{1}{g_a}-\frac{\mu e_g}{i_a}$ anzichè $\frac{1}{g_a}$.

Ora si comprende che, se la f. e. m. che si fa agire nel circuito di griglia è proporzionale ad i_a, diciamo $e_g = k i_a$, il sistema si riduce ad una resistenza *costante* di valore $\frac{1}{g_a} - k\mu$; e, se k è scelto in guisa che sia soddisfatta la relazione:

$$\frac{1}{g_a} - \mu k = -\frac{1}{g},$$

la resistenza complessiva del circuito differenziale riuscirà nulla. Il sistema (g, L, C) può pertanto divenire sede di una corrente alternata permanente anche in assenza di una vera e propria d. d. p. applicata fra A e B.

La frequenza di tale corrente alternata parrebbe indeterminata, ma se si pensa che deve risultare nullo anche il fabbisogno reattivo del sistema, si conclude subito che la pulsazione non potrà differire da $\frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Quando un generatore a triodo è fatto funzionare nel modo descritto, si suol dire che il triodo ad esso interessato compie le funzioni di oscillatore [1].

28. - Condizioni per l'autoeccitazione. — Veduto così quale sia il principio su cui si fonda l'autoeccitazione dei generatori a triodi, andiamo ad esaminare con quali mezzi e sotto quali condizioni si possa far agire nel circuito di griglia una tensione appropriata, dalla quale consegua lo stato di cose sopra delineato.

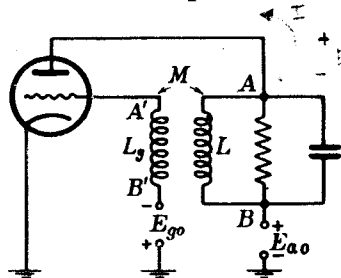



Fig. 262

Supporremo che, come sopra, l'impedenza anodica del triodo sia costituita da un sistema (g, L, C) in parallelo.

Un modo per raggiungere lo scopo consiste nell'inserire nel circuito di griglia una tensione ricavata trasformatoricamente da quella esistente ai capi dell'impedenza anodica. All'uopo, basterà accoppiare magneticamente la L anodica con una L_g i cui capi vengano connessi col circuito di griglia in serie con la sorgente della tensione di polarizzazione E_{g0}. La tensione ai capi di L_g riprodurrà in una certa scala la tensione ai capi del carico anodico, e sarà approssimativamente in fase con questa [2].

Una tale tensione potrà benissimo utilizzarsi per la eccitazione della griglia purchè le connessioni siano effettuate in modo tale che e_a ed e_g risultino in opposizione di fase.

[1] Anche questa è una di quelle denominazioni che, quantunque assai diffusa, non è a ritenersi raccomandabile, in quanto che non giova ad avvicinare la mente alla essenza del fenomeno. Si potrebbe correttamente denominare *oscillatore* tutto il sistema costituito dal triodo, in unione al generatore anodico, al carico, ed agli organi di accoppiamento, ma non è esatto attribuire tale denominazione ad una parte sola del sistema stesso.

[2] Lo sarebbe esattamente se L ed L_g fossero induttanze pure, e si potesse ritenere rigorosamente nullo il carico sul secondario L_g (impedenza d'entrata infinita).

Che tale relazione di fase sia necessaria risulta senz'altro da quanto è stato esposto nella prima parte di questo Capitolo, in cui la e_g era data, mentre la e_a prendeva origine come conseguenza di essa. Nel caso attuale, in cui il rapporto di causa ad effetto deve in certo qual modo ritenersi invertito, si può ragionare così: riferendosi allo schema di fig. 262, si rifletta che quando ad es. e_a è *positiva*, cioè diretta da B ad A, la corrente che da essa viene originata attraverso g è *negativa*; ed affinchè questa possa essere *fornita* dal generatore anodico, occorre che la resistenza equivalente allo spazio anodo-catodo *aumenti*, cioè che la e_g sia negativa.

Per verificare se è possibile un regime permanente, basterà esprimere che è nulla la impedenza totale del sistema (riferita agli elementi elettrici differenziali), o, ciò che è lo stesso, che nel circuito differenziale anodico è soddisfatta la legge di Ohm per le correnti alternate, quando al posto di e_g si ponga il valore dipendente dal supposto accoppiamento.

Supponiamo il problema risoluto, per modo che nel circuito anodico si abbia una corrente alternata $\mathbf{I}_a$, di pulsazione ω. La d. d. p. $\mathbf{E}_a$ ai capi del carico vale $-\frac{\mathbf{I}_a}{\mathbf{Y}}$, essendo:

$$\mathbf{Y} = g + j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right).$$

Pertanto la corrente nel ramo L sarà rappresentata da $\frac{j\mathbf{I}_a}{\mathbf{Y}L\omega}$. La f. e. m. $\mathbf{E}_g$ indotta in L_g si otterrà moltiplicando questa espressione per $-jM\omega$; essa cioè vale $\frac{M}{\mathbf{Y}L}\mathbf{I}_a$, essendo M il coefficiente di m. i. fra L ed L_g, i cui sensi positivi riterremo fissati in modo tale che, alle onde di tensione ai capi di L aventi la direzione da B verso A (dal catodo all'anodo), corrispondano in L_g onde di tensione dirette da A' a B' (dalla griglia al catodo) (1).

La f. e. m. agente nel circuito differenziale vale dunque $\frac{\mu M}{\mathbf{Y}L}\mathbf{I}_a$, e, poichè è proporzionale ad $\mathbf{I}_a$, la impedenza che essa sostituisce vale precisamente $-\frac{\mu M}{\mathbf{Y}L}$.

La impedenza totale del circuito differenziale è dunque:

$$-\frac{\mu M}{\mathbf{Y}L} + \frac{1}{g_a} + \frac{1}{\mathbf{Y}}. \tag{11}$$

---

(1) Ciò equivale a dire che le linee magnetiche dovute a correnti positive in L ed L_g hanno sensi opposti.

Affinchè un tal sistema possa funzionare in regime permanente in assenza di alimentazione, dovrà risultare nulla la espressione (11), e quindi dovranno annullarsi separatamente la sua parte reale ed il coefficiente di j. In particolare intanto dovrà Y ridursi alla sua parte reale g, dal che segue:

$$C\omega - \frac{1}{L\omega} = 0\,, \quad \text{cioè} \quad \omega^2 = \frac{1}{LC}\,. \tag{12}$$

Possiamo dunque in primo luogo concludere che la sola pulsazione possibile è quella di risonanza del sistema di carico anodico.

A tale pulsazione la impedenza (11) si riduce ad una pura resistenza, il cui valore R è:

$$R = -\frac{\mu M}{gL} + \frac{1}{g_a} + \frac{1}{g} = \frac{1}{g_a} - \frac{1}{g}\left(\frac{\mu M}{L} - 1\right). \tag{13}$$

Distinguiamo ora tre casi, a seconda che R ha valore positivo, nullo, o negativo.

Se R è positiva, si può concludere che l'aggiunta, al carico g, L, C, del sistema costituito dal triodo e dall'accoppiamento M, non ha fatto altro che modificare $\frac{1}{g}$, in più o in meno a seconda delle circostanze, portadola al valore R. Il risultato sarà che, per $R < \frac{1}{g}$, il sistema avrà diminuito il suo smorzamento; per $R > \frac{1}{g}$ lo avrà aumentato. Dunque, se il sistema g, L, C viene rimosso dalla sua condizione di equilibrio, i fatti elettrici che in esso prendono origine andranno spegnendosi più rapidamente o più lentamente di dianzi secondo che è $R > \frac{1}{g}$ oppure $R < \frac{1}{g}$.

In questo ultimo caso si dice che l'accoppiamento ha determinato una *retroazione* (1) del circuito anodico su quello di griglia. Nel primo caso si potrebbe dire che si ha invece una retroazione negativa.

Se R risulta nulla, il sistema si trova nelle condizioni di avere nulla la impedenza. Pertanto se, ad es. mediante una carica anche piccolissima attribuita al condensatore, lo si sottrae dalla sua condizione di equilibrio, il processo oscillatorio che così prende origine, non avrà più carattere smorzato. Si ha cioè un regime di corrente alternata *permanente*, la cui ampiezza dipenderà ovviamente dalla carica iniziale. In generale però, siccome lo stato di permanenza si verifica non appena l'equilibrio è turbato, si tratterà di ampiezza piccolissima.

Si dice che in tale caso il processo oscillatorio *si innesca*.

(1) Comunemente detta anche, con locuzione impropria, *reazione*.

Se infine R è negativa, l'oscillazione non solo si innesca, ma va continuamente aumentando di ampiezza, e questa teoricamente potrebbe raggiungere valori infinitamente grandi, se non intervenissero altri fatti a limitarla.

Nei vari casi considerati, le oscillazioni della tensione ai capi del carico si presenteranno come indicato schematicamente nelle figg. 263 *a*) *b*) *c*) *d*), la prima delle quali si riferisce al circuito da solo, la seconda al caso in cui R risulti positiva ma $< \frac{1}{g}$, la terza al caso $R = 0$, la quarta al caso $R < 0$.

Possiamo dunque concludere che il funzionamento del sistema in autoeccitazione è subordinato alla condizione $R \leq 0$, dove il segno di uguaglianza corrisponde alla condizione limite d'innesco.

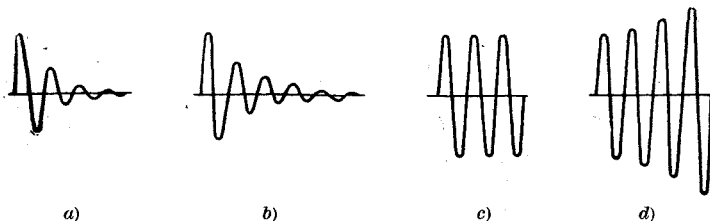



Fig. 263

Queste deduzioni sono generali. Si può cioè sempre asserire che, qualunque sia il sistema di carico e qualunque sia il metodo seguito per accoppiare il circuito di griglia a quello di placca, cioè per rendere il sistema indipendente da eccitazioni esterne, esso sarà capace di funzionare in modo permanente ogni qualvolta la impedenza totale del relativo circuito differenziale abbia nulla la parte immaginaria, e nulla (innesco) oppure negativa la parte reale; avvertendo però che in questo ultimo caso non potremo parlare di regime permanente finchè non avremo mostrato l'intervento di elementi atti a stabilizzare il funzionamento.

Le *due* relazioni cui si perviene scrivendo che l'impedenza totale è nulla, sono quelle che in ogni caso permettono di determinare la pulsazione alla quale può avere luogo il funzionamento, nonchè gli elementi quantitativi dell'accoppiamento all'uopo occorrente.

Per es., nel caso dianzi esaminato quelle relazioni sarebbero:

$$C\omega - \frac{1}{L\omega} = 0\,, \qquad M = L\frac{g_a + g}{\mu g_a} = \frac{L(g_a + g)}{g_m} = \frac{L}{\mu}\left(1 + \frac{g}{g_a}\right),$$

nelle quali, per così dire, si legge che il nostro sistema può funzionare come generatore autoeccitato alla sola pulsazione $\frac{1}{\sqrt{LC}}$, e che per lo scopo è necessario attribuire ad M un valore almeno uguale ad $\frac{L(g_a + g)}{g_m}$.

Il valore positivo di M, per la convenzione fatta sui sensi positivi di L ed L_g, sta ad indicare che l'inserzione di L_g deve essere fatta in guisa tale che la f. e. m. da essa introdotta nel circuito di griglia risulti in opposizione di fase rispetto a quella esistente ai capi del carico, come già precedentemente avevamo asserito.

Se M ha esattamente quel valore, si avrà, è vero, innesco, ma le condizioni di funzionamento non saranno stabili, perchè, se per una qualunque causa M o g_a diminuissero oppure g aumentasse, dall'esame dell'ultimo membro di (13) si vede subito che ne seguirebbe $R > 0$, ed allora il processo si smorzerebbe rapidamente.

Occorrerà dunque attribuire ad M un valore maggiore di quello fornito dalla precedente. Così facendo, le oscillazioni iniziate andranno crescendo di ampiezza. Ma tale accrescimento non sarà indefinito perchè, aumentandosi l'ampiezza, vengono ad essere interessati tratti più estesi delle caratteristiche, talchè si ha a che fare con una conduttanza differenziale media generalmente inferiore a quella corrispondente ai tratti rettilinei ove supponiamo si sia iniziato il funzionamento. Inoltre, con l'aumentare dell'ampiezza della tensione e_a, aumenta quella indotta nel circuito di griglia, ed allora il sistema trasformatorico costituito da (L, L_g, M), che inizialmente non aveva carico sul secondario, viene a caricarsi per effetto della comparsa della corrente di griglia, il che in definitiva equivale ad un aumento di g. Per doppia ragione quindi la frazione $\frac{g}{g_a}$ va aumentando, e così la differenza fra M e $\frac{L}{\mu}\left(1 + \frac{g}{g_a}\right)$ tende ad annullarsi, con che l'ampiezza si stabilizza.

29. - L'amplificazione a retroazione. — È interessante esaminare quel che avviene quando M ha valore inferiore a quello necessario per l'innesco.

Al n. prec. abbiamo veduto che in tale caso la resistenza del circuito differenziale, se pur non viene annullata, riesce tuttavia diminuita in confronto al valore che le spettava in assenza di accoppiamento, e ne abbiamo quindi dedotto che, se il circuito di carico venisse rimosso dallo stato di equilibrio, si avrebbero in esso delle oscillazioni con smorzamento minore di quello che si sarebbe avuto in assenza dell'accoppiamento.

Se anzichè al regime libero, ci riferiamo al regime forzato (III, 7), possiamo esprimere lo stesso concetto dicendo che, per mantenere nell'impedenza di carico una medesima corrente alternata, occorre una minore tensione impressa. Più precisamente, la d. d. p. che occorrerà all'uopo applicare corrisponderà al prodotto della $\mathbf{I}_a$ per il valore *residuo* della resistenza, cioè per la R misurata dalla espressione (13). Pertanto possiamo concludere che la tensione da applicarsi al circuito di griglia,

anzichè

$$\left(\frac{1}{g_a} + \frac{1}{g}\right)\frac{\mathbf{I}_a}{\mu},$$

quale occorrerebbe per ottenere la corrente $\mathbf{I}_a$ nell'ordinario regime generatorico ad eccitazione indipendente, si ridurrà ad

$$\mathbf{E}_g = \left(\frac{1}{g_a} + \frac{1}{g} - \frac{\mu M}{Lg}\right)\frac{\mathbf{I}_a}{\mu}.$$

Se immaginiamo di applicare effettivamente una tale $\mathbf{E}_g$, avremo realizzato un generatore che si potrebbe chiamare *parzialmente autoeccitato* (1).

Il rapporto fra l'ampiezza della $\mathbf{E}_a$ raccolta ai capi del carico e quella della $\mathbf{E}_g$ effettivamente applicata è evidentemente maggiore di quello che, a pari $\mathbf{E}_a$, si avrebbe nell'ordinario generatore ad eccitazione indipendente; cioè, per effetto della retroazione del circuito anodico su quello di griglia, risulta aumentata l'amplificazione di tensione (2).

Per tale ragione questo sistema, considerato come amplificatore, cioè con riguardo al rapporto predetto, prende il nome di *amplificatore a retroazione*.

30. - Determinazione dell'ampiezza I_{a1}. — L'indagine accennata alla fine del n. 28 può essere condotta in modo più preciso facendo uso della curva (I_{a1}, E_g) costruita per il dato valore della resistenza di carico, e per il dato valore $-E_{g0}$ della polarizzazione fissa attribuita alla griglia.

Questa curva, la cui equazione scriveremo sotto la forma:

$$I_{a1} = f(E_g), \tag{14}$$

ha, come sappiamo, dopo un certo tratto iniziale, un andamento all'incirca rettilineo, e successivamente volge la concavità all'asse E_g fino a raggiungere un massimo. Ora, le sue ordinate possono anche essere assunte a rappresentare la tensione ai capi del carico (o più esattamente l'ampiezza dell'armonica fondamentale di tale tensione), bastando all'uopo dividerle per la conduttanza g del carico anodico; oppure anche la ampiezza della fondamentale della corrente I_L nel ramo L, mediante una ulteriore divisione per $L\omega$. Si ha cioè:

$$I_L = \frac{1}{gL\omega} I_{a1} = \frac{1}{gL\omega} f(E_g).$$

(1) Si potrebbe paragonarlo ad una dinamo il cui induttore fosse costituito da un magnete permanente non saturo (oppure fosse parzialmente eccitato con sorgente separata), sul quale fosse avvolto un circuito alimentato in serie dalla corrente stessa erogata dalla macchina, a mezzo del quale venisse provveduto un supplemento di eccitazione.

(2) Il generatore autoeccitato non è che un caso particolare di questo; per esso il rapporto di amplificazione sarebbe infinitamente grande.

D'altra parte, per effetto dell'accoppiamento M, la E_g è legata ad I_L dalla relazione:

(15) $$E_g = \omega M I_L, \quad \text{cioè} \quad I_{a1} = \frac{gL}{M} E_g .$$

Dunque, se un regime è possibile, questo si verificherà per quei valori di E_g e di I_{a1} che soddisfano contemporaneamente le due equazioni precedenti, cioè per le coordinate del punto di incontro della curva (14) con la retta (15). La condizione per l'esistenza del regime coincide dunque con quella di esistenza di un tal punto di incontro, la quale alla sua volta si traduce in ciò, che il coefficiente angolare $\frac{gL}{M}$ della retta sia inferiore a quello del tratto iniziale pressochè rettilineo della curva, se questa esce dall'origine con andamento rettilineo, o, più generalmente, inferiore a quello della tangente condotta dall'origine a questa curva.

Se la polarizzazione E_{g0} della griglia è inferiore alla tensione di interdizione, il valore di questo ultimo coefficiente angolare è (cfr. n. 5):

$$\frac{g_m}{1 + \frac{g_a}{g}},$$

in quanto che, per piccoli valori di E_g, il funzionamento avviene certamente in classe A; pertanto dovrà essere:

(16) $$M > \frac{L}{\mu}\left(1 + \frac{g}{g_a}\right) \text{ (1)}.$$

Ritroviamo così la condizione precedente, non solo, ma inoltre abbiamo veduto come possa precisarsi l'ampiezza che l'oscillazione può raggiungere quando la condizione stessa sia soddisfatta (2).

A tale precisazione siamo pervenuti supponendo che la curva (14) abbia l'andamento indicato nella fig. 264. Ma, come sappiamo (n. 19), se la polarizzazione di griglia è fortemente negativa, la curva stessa non solo non esce più dall'origine con andamento rettilineo, ma può anche avere inizio a destra dell'origine. Comunque, essa può avere due punti di intersezione con la retta (15). Ora, è facile riconoscere che corrisponde

(1) Per la precisione occorre aggiungere che per g_a si deve qui assumere il valore della conduttanza differenziale anodica relativo al punto iniziale di funzionamento.

(2) È degna di nota l'analogia di questo procedimento con quello che serve a determinare le possibilità di autoeccitazione e, in caso affermativo, le condizioni di funzionamento, per una dinamo ad autoeccitazione in serie (El., XI, 8). Anche in quel caso, la tensione ai capi e la corrente erogata sono fra loro legate da una legge dipendente dal congegno stesso dell'autoeccitazione e rappresentata dalla caratteristica della macchina; contemporaneamente fra le stesse grandezze la resistenza esterna impone un altro vincolo, di tipo lineare e quindi rappresentabile con una retta; ed il funzionamento è subordinato all'esistenza di un punto comune a questa retta ed a quella curva.

ad un andamento stabile soltanto quello, B, che è situato in quel tratto della curva (14) che volge la concavità verso l'asse delle E_g (fig. 265). Infatti per la stabilità occorre che, ad una variazione accidentale della tensione eccitatrice, corrisponda una variazione di corrente anodica tale che, per effetto dell'accoppiamento, ne consegua una variazione di E_g di senso opposto a quella accidentalmente verificatasi. Ciò evidentemente può ottenersi soltanto se, procedendo da sinistra a destra nell'intorno del

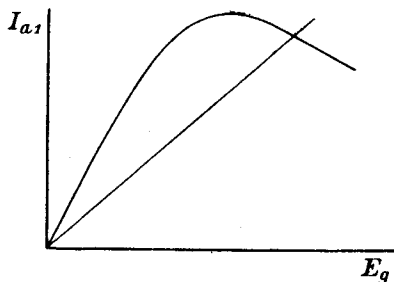
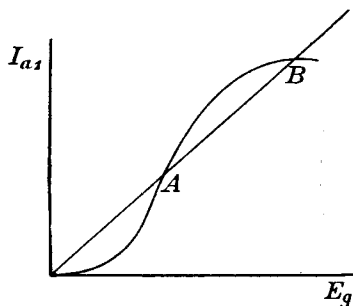



Fig. 264 Fig. 265

punto di funzionamento, le ordinate della curva (14) sono, prima di esso, superiori a quelle della retta (15), inferiori dopo. Quindi, dei due punti A e B, solo il secondo corrisponde alla stabilità. E si comprende anche che la stabilità stessa sarà tanto maggiore quanto maggiore è l'angolo che, nel punto B, la curva (14) forma con la retta (15).

31. - Regolazione. - Polarizzazione automatica della griglia con condensatore shuntato. — Affinchè il processo di autoeccitazione abbia inizio in modo deciso, conviene che M sia notevolmente maggiore del valore corrispondente al limite d'innesco, come risulta geometricamente evidente se si osserva che il coefficiente angolare della retta (15) è inversamente proporzionale ad M. Pertanto converrà operare con un accoppiamento molto stretto.

Per contro, devesi però notare che, elevando di molto M, non si realizzerebbe la massima I_{a1}, non solo, ma si perverrebbe ad un funzionamento implicante elevate escursioni della tensione di griglia cui conseguono forti correnti di griglia e, in definitiva, scarso rendimento globale.

Per evitare ciò converrebbe che, ad innesco avvenuto, la retta (15) si elevasse, cioè si facesse diminuire M. Ma se poi — come avviene ad es. in radiotelegrafia — si deve a brevi intervalli di tempo interrompere il processo e successivamente riprenderlo, tali mutamenti di M non risulterebbero di pratica effettuazione.

Si ricorre allora ad un altro espediente, cioè si provvede invece a variare la polarizzazione della griglia, e precisamente a spostare il potenziale base negativo di questa. Così facendo, la curva (I_{a1}, E_g) interessata non sarà più la (C) (fig. 266), ma un'altra, il cui andamento sarà ad es. del tipo (C') e pertanto il punto di funzionamento, che necessariamente dovrà spostarsi lungo la retta r corrispondente al *fissato* valore di M, si porterà da B in B', con che si realizza un regime assai più conveniente.

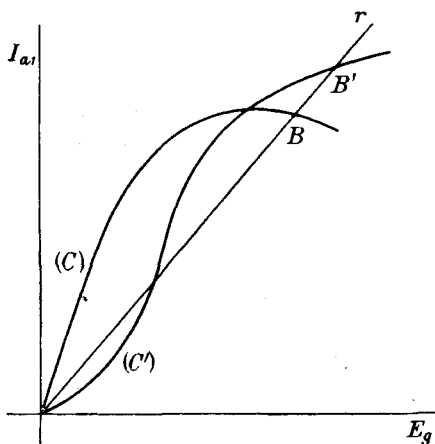



Fig. 266

A tali variazioni della polarizzazione si può provvedere in modo automatico, inserendo nel circuito di griglia un condensatore shuntato da una resistenza. Del funzionamento di un tale dispositivo ci si può rendere conto nel modo seguente.

Prescindendo per ora dalla resistenza di shunt, seguiamo quel che avviene quando, essendo inserito un condensatore fra la griglia e la induttanza sede della tensione eccitatrice, come indicato in fig. 267, si iniziano le oscillazioni di questa. Alle prime alternanze positive, si avrà passaggio di corrente di griglia, a mezzo della quale il condensatore si carica, e, se, in via schematica, supponiamo che si possa ritenere infinitamente piccola la resistenza dello spazio griglia-catodo, tale carica seguirà istantaneamente le oscillazioni del potenziale applicato, talchè al termine della prima metà dell'anzidetta alternanza, le armature del condensatore si troveranno caricate ad una d. d. p. negativa di valore assoluto esattamente uguale all'ampiezza E_1 della tensione eccitatrice. Durante la seconda metà dell'alternanza positiva e tutta l'alternanza negativa seguente, il condensatore non potrà scaricarsi perchè, essendo la griglia a potenziale minore del catodo, lo spazio griglia-catodo presenta resistenza infinita. Pertanto, durante la

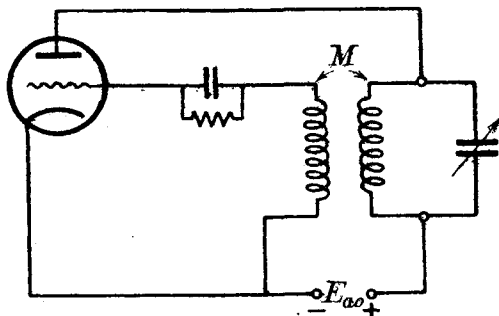



Fig. 267

parte di periodo ora esaminata, il condensatore ha funzionato come una batteria di polarizzazione di tensione — E_1. Ma la successiva alternanza si compirà con ampiezza $E_2 > E_1$, per cui, durante parte del semiperiodo positivo si avrà nuovamente corrente di griglia a mezzo della quale la tensione ai capi del condensatore raggiungerà il valore E_2, che più non abbandonerà per tutto il periodo, e così via. Si comprende che, mano a mano che le ampiezze E_1, E_2,... aumentano, si consegue un aumento di polarizzazione negativa; mentre, se per una qualunque causa intervenisse una diminuzione di ampiezza, *non* ne seguirebbe corrispondente diminuzione della polarizzazione stessa, come illustrato nel diagramma di fig. 268, dove le ordinate dalla linea punteggiata rappresentano le tensioni variabili applicate alla griglia, e quelle della linea a tratto pieno la tensione ai capi del condensatore, cioè la polarizzazione negativa equivalente a tale tensione.

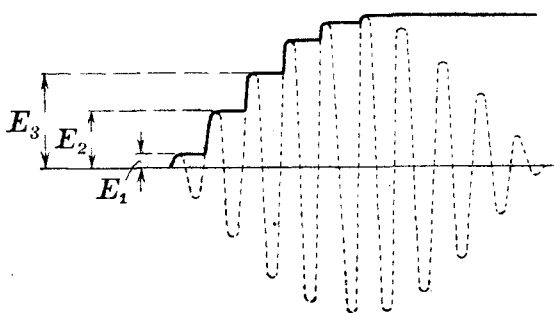



Fig. 268

Un tale stato di cose sarebbe evidentemente dannoso, e ciò per doppia ragione, sia perchè la polarizzazione ottenuta — corrispondente alla massima ampiezza toccata dalle oscillazioni del potenziale di griglia — potrebbe essere superiore a quella desiderata, sia perchè, se il processo si interrompesse, non si potrebbe più ricominciarlo se non partendo dall'ultima polarizzazione raggiunta, e pertanto verrebbe meno quell'automatismo cui si tendeva.

A tali inconvenienti può ovviarsi precisamente derivando una resistenza R, di opportuno valore, ai capi del condensatore, o fra il catodo e la griglia, il che fa lo stesso se, come di solito avviene, si può ritenere trascurabile l'impedenza interna del generatore di griglia rispetto ad R. Tale resistenza R costituisce una via attraverso la quale il condensatore, nell'intervallo fra due successive elongazioni positive del potenziale di griglia, può scaricarsi, e per tale ragione viene chiamata *di dispersione* (ingl. *grid leak*). Se la R fosse tanto piccola che la scarica potesse praticamente esaurirsi nell'intervallo predetto, tutto il processo precedentemente descritto ne risulterebbe annullato. Ma se invece ad essa si attribuisce un valore tale che nell'intervallo predetto — circa un periodo — la scarica del condensatore non possa essere che parziale, la tensione ai capi del condensatore, alla fine del primo periodo, sarà una certa frazione della ampiezza E_1 della prima elongazione, diciamo aE_1,

dove il fattore a potrà approssimativamente pensarsi coincidente col numero β definito da:

$$\beta = e^{-\frac{T}{RC}},$$

essendo T la durata del periodo, se, per semplicità, si suppone che la scarica si protragga per un intero periodo (1).

Se l'ampiezza E_2 del secondo periodo è $> E_1$ (e quindi $> aE_1$), la tensione alla fine della corrispondente scarica parziale sarà aE_2 e così via, *finchè le* E_1, $E_2, \ldots$ *vanno crescendo*. Se però ad una E_n seguisse una E_{n+1} sufficientemente minore di E_n, durante il periodo ad essa corrispondente non solo non si avrebbe nessun aumento della tensione ai capi del condensatore (pel fatto che non può aversi corrente di griglia), ma anzi, siccome la scarica del condensatore prosegue, la tensione ai capi di questo si troverebbe ridotta ad a^2E_n; ed il comportamento seguente sarebbe dominato da questo valore, così come il precedente lo era stato dal valore aE_n; si avrà cioè diminuzione della polarizzazione negativa dovuta al condensatore. E ciò fino a quando non ricompaia una E_m all'incirca superiore al valore assoluto della polarizzazione raggiunta precedentemente ad essa. In particolare, se le oscillazioni della tensione di griglia venissero interrotte quando la polarizzazione ha raggiunto un certo valore E_0, la polarizzazione stessa, in capo ad un tempo τ, subirà tante riduzioni nel rapporto a quante volte T è contenuto in τ, cioè varierà con legge esponenziale fino al valore $a^{\frac{\tau}{T}} E_0$.

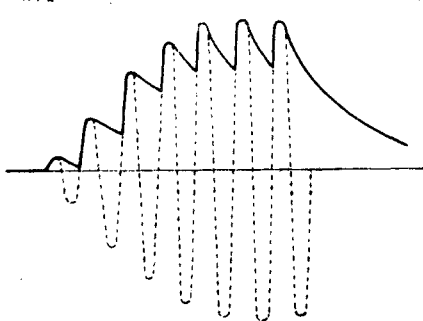



Fig. 269

Il corrispondente stato di cose è illustrato nella fig. 269, dove si è supposto che ai primi cinque periodi con ampiezza crescente, ne seguano altri due con ampiezza uguale all'ultima raggiunta, e poi le oscillazioni di e_g vengano interrotte. Da quel momento, la curva a tratto pieno, che rappresenta l'andamento della tensione ai capi del condensatore, discende con andamento esponenziale.

Da ciò si deduce che per ottenere lo scopo che ci siamo prefissi, bisognerà:

1°) che il fattore a sia opportunamente prossimo all'unità affinchè in regime ascendente si realizzi uno stato di cose simile a quello che si aveva in assenza di R;

(1) Siccome invece, in generale, la scarica occupa solo una parte del periodo, il fattore a avrà un valore alquanto minore di β.

2°) ma che tuttavia esso abbia valore tale da risultare prossima a zero la sua potenza di esponente $\frac{\tau}{T}$, dove τ indica l'intervallo fra due successive riprese del funzionamento del sistema.

Siccome è $a = e^{-\frac{T}{RC}}$, la predetta potenza vale $e^{-\frac{\tau}{RC}}$; pertanto si conclude che R e C debbono essere scelti in modo che il prodotto RC, cioè la costante di tempo del sistema costituito dal condensatore e dalla resistenza, sia convenientemente maggiore di T e molto minore di τ:

$$T < RC \ll \tau .$$

Per es. per $R = 1\ \mathrm{M\Omega} = 10^6\Omega$, $C = 200\mu\mu\mathrm{F} = 2 \cdot 10^{-10}\mathrm{F}$, si avrebbe $RC = 2 \cdot 10^{-4}$ sec, valore accettabilissimo per un funzionamento a 500 kHz a carattere intermittente (trasmissioni telegrafiche) anche se gli intervalli τ fossero dell'ordine di 0,004 sec. Invero si avrebbe in tal caso $a \cong 0{,}99$ ed $a^{\frac{\tau}{T}} < 10^{-8}$, cioè la riduzione di polarizzazione durante un periodo sarebbe del solo 1%, mentre ad es., una polarizzazione di 100 volt, in capo a 0,004 secondi, si ridurrebbe a meno di un microvolt.

Per giudicare sui più opportuni valori da assegnarsi alla costante di tempo RC, occorre riflettere che, raggiunto uno stato di cose a carattere permanente, la polarizzazione della griglia assume un valore praticamente uguale alla ampiezza E_g della tensione alternata diminuita della caduta di tensione prodotta dal passaggio attraverso R della corrente *media* di griglia, la quale corrisponde essenzialmente alla distribuzione, lungo un periodo, della carica elettrica assorbita dal condensatore nel breve intervallo in cui si è avuta effettiva circolazione di corrente di griglia. È infatti evidente che, nel tempo che segue tale intervallo e fino all'intervento di una nuova carica, il condensatore funziona appunto nel senso di *distribuire*, sotto forma di corrente di scarica, la carica assunta in precedenza. Poichè dunque, in definitiva, si perviene ad una specie di livellamento della corrente in R, ne segue che la caduta di tensione predetta si commisura al valore medio della corrente di griglia, come sopra asserito.

Riservandoci di tornare in altre occasioni su tale importante dispositivo, che riceve molteplici applicazioni nella tecnica dei circuiti radio, osserviamo ancora che alla polarizzazione automatica della griglia si potrebbe provvedere anche mediante una resistenza inserita prima del catodo e percorsa dalla componente costante della corrente anodica, come indicato al n. 15. Naturalmente però, l'applicazione di un tale metodo è subordinata alla condizione che la corrente di riposo del sistema in corrispondenza alle condizioni di innesco sia inferiore alla componente costante della corrente anodica in funzionamento normale. Occorrerà quindi in tal senso un accertamento preventivo, che potrà sempre farsi conoscendo le condizioni di carico, quelle stabilite per l'innesco, e quelle corrispondenti al regime desiderato.

32. - Altra forma della condizione di autoeccitazione. - Rapporto d'accoppiamento. — Alla condizione di funzionamento in autoeccitazione di un generatore a triodo si può dare un aspetto più espressivo, facendo intervenire il rapporto $\frac{E_a}{E_g}$ fra la ampiezza della tensione ai capi del carico e di quella che eccita il circuito di griglia.

Siccome è

$$\frac{E_g}{E_a} = \frac{M}{L} \text{ (1)},$$

la precedente (16) si scrive:

$$\frac{E_g}{E_a} \geq \frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{g}{g_a}\right). \tag{17}$$

Se ora ricordiamo che, in un generatore di classe A, il rapporto delle tensioni E_g ed E_a è precisamente dato (n. 3) dal secondo membro di questa disuguaglianza, si può esprimere la condizione cercata dicendo che, per l'autoeccitazione, l'accoppiamento fra i circuiti di placca e di griglia deve essere tale che la tensione E_g non sia inferiore a quella necessaria ad ottenere la E_a nel funzionamento in classe A definito dalle date condizioni iniziali e dal dato carico anodico.

A tale conclusione si può anche pervenire con un ragionamento diretto. Osserviamo innanzi tutto che, all'innesco, siamo certamente in classe A, e quindi il campo di funzionamento interessato può sempre considerarsi lineare. D'altra parte, l'esaltazione del processo di autoeccitazione è subordinata precisamente a ciò, che quella E_g la quale, per effetto dell'accoppiamento, consegue ad una certa E_a, non sia inferiore a quella strettamente necessaria perchè dal generatore di classe A si ricavi questa E_a stessa.

Ora, siccome $\frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{g}{g_a}\right)$ è precisamente il rapporto fra le coppie di valori E_g ed E_a fra loro corrispondenti nel funzionamento in classe A col dato carico g, risulta evidente che la condizione cercata è appunto la (17).

In quanto precede si è sempre supposto che l'accoppiamento fra i circuiti anodico e di griglia dia luogo ad un valore reale del rapporto $\frac{\mathbf{E}_g}{\mathbf{E}_a}$, nel qual caso il suo valore assoluto coincide con $\frac{E_g}{E_a}$.

Ma nei casi concreti, di cui ci occuperemo in dettaglio nel n. seg., ciò in generale non è. Basta pensare, ad es., che il ramo L (e così pure il ramo C) conterrà sempre una certa resistenza — o, ciò che è lo stesso,

(1) In effetto, al posto di E_g si dovrebbe porre la differenza fra esso e la caduta di tensione dovuta alla (eventuale) corrente di griglia.

che la g sarà praticamente conglobata parte con L e parte con C — e pertanto la corrente in esso non sarà in quadratura con la d. d. p. $\mathbf{E}_a$; quindi la $\mathbf{E}_g$, che è certamente in quadratura con quella corrente, non sarà in opposizione di fase con $\mathbf{E}_a$.

In generale cioè, il rapporto $-\frac{\mathbf{E}_g}{\mathbf{E}_a}$, che si potrà chiamare *rapporto d'accoppiamento*, anzichè reale e positivo, sarà un numero complesso, di cui indicheremo con m e φ il modulo e l'argomento, con che φ misura l'anticipo di $\mathbf{E}_g$ rispetto a $-\mathbf{E}_a$.

Alla espressione (11) si dovrà allora sostituire:

$$-\frac{\mu m}{\mathbf{Y}}(\cos\varphi + j \operatorname{sen}\varphi) + \frac{1}{g_a} + \frac{1}{\mathbf{Y}}, \tag{11'}$$

il cui annullamento, al solito, fornirà la condizione di innesco e la pulsazione di funzionamento.

33. - Generatori dei tipi Meissner, Hartley, Colpitt. — Il criterio generale esposto al n. prec. consente di esaminare il comportamento di qualunque tipo di accoppiamento fra il circuito di griglia e quello di placca.

Come s'è detto, il caso esaminato nei nn. precc., corrispondente al classico tipo di *Meissner*, è a considerarsi ideale, in quanto che ivi è supposto il circuito anodico formato con tre rami in parallelo, due dei quali costituiti da pure reattanze.

Un circuito reale sarà invece per lo più del tipo a due rami L, C con resistenze in serie, il cui valore complessivo indichiamo con R. Se tale R è localizzata nel ramo C, il rapporto d'accoppiamento vale $\frac{M}{L}$, cioè è reale, quindi la pulsazione ω di funzionamento è quella per la quale il carico assume carattere ohmico, e si ha (III, 12):

$$\frac{1}{g} = \frac{L}{RC}, \qquad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon^2}},$$

essendo $\varepsilon = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ il coefficiente di risonanza del sistema (R, L, C) considerato in serie.

Dunque la condizione di autoeccitazione è data da:

$$\frac{M}{L} \geq \frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{RC}{Lg_a}\right).$$

Ed alle stesse formole si perviene se la R è localizzata nel ramo L, qualora si ritenga trascurabile lo sfasamento fra $-\mathbf{E}_a$ ed $\mathbf{E}_g$, cioè sensibilmente nullo l'argomento del rapporto di accoppiamento [1].

---

[1] Volendo invece tener conto di tale sfasamento, il calcolo dovrà condursi nel modo seguente: alla considerazione del rapporto $\frac{M}{L} = \frac{j\omega M}{j\omega L}$ si sostituirà quella del-

Nel tipo Meissner la tensione eccitatrice di griglia è ricavata dal circuito anodico per via trasformatorica. Ma si può anche pensare di raggiungere lo scopo per via autotrasformatorica: si realizza allora lo schema di *Hartley*.

A tale scopo, basta dividere in due parti la induttanza L ed utilizzare, per la eccitazione della griglia, la tensione ricavata da una di esse. Per realizzare la necessaria opposizione di fase fra $\mathbf{E}_a$ ed $\mathbf{E}_g$, le connessioni dovranno eseguirsi come indicato in fig. 270.

Indicando con M il coefficiente di induzione mutua fra L_g ed L_a, il rapporto d'accoppiamento, trascurando lo sfasamento (o meglio, ritenendo le resistenze localizzate nel ramo C), vale $\dfrac{L_g + M}{L_a + M}$ [1], quindi

---

l'espressione $\dfrac{jM\omega}{R + jL\omega}$, per modo che, essendo:

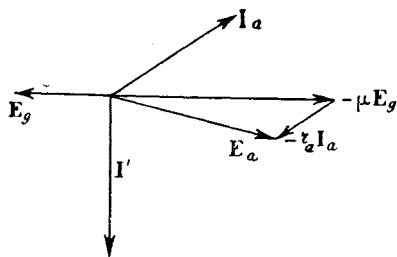
$$\mathbf{Y} = \frac{1}{R + jL\omega} + jC\omega ,$$

l'annullamento della impedenza totale del circuito differenziale equivalente porta alle relazioni:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{1 + Rg_a}, \qquad M = \frac{L}{\mu}\left(1 + \frac{RC}{Lg_a}\right).$$

Pertanto la condizione d'innesco ha ancora l'aspetto:

$$\frac{M}{L} \geq \frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{g}{g_a}\right),$$

dove $g = \dfrac{RC}{L}$ rappresenta il valore della conduttanza a cui si riduce $\mathbf{Y}$ per la pulsazione ω_r alla quale il carico ha carattere ohmico; ma la pulsazione ω di funzionamento non è più la $\omega_r = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{1 - \dfrac{1}{\varepsilon^2}}$. E precisamente, mentre tale ω_r è sempre inferiore alla pulsazione di risonanza $\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ del sistema R, L, C considerato in serie, la ω è invece a questa superiore. Pertanto il circuito di carico, alla pulsazione ω, avrà carattere capacitivo (VI, 7). Il diagramma vettoriale delle grandezze elettriche che interessano il funzionamento del sistema si presenta come in figura: la corrente anodica $\mathbf{I}_a$ anticipa rispetto a $-\mu\mathbf{E}_g$, che può interpretarsi come tensione agente nel circuito anodico; sottraendo da questa la caduta ohmica $r_a\mathbf{I}_a$ attraverso la r_a del tubo si ottiene la tensione $-\mathbf{E}_a$ ai capi del carico, rispetto alla quale la $\mathbf{E}_g$ risulta in ritardo di un angolo inferiore a 180°, come appunto deve essere perchè essa $\mathbf{E}_g$ ritarda esattamente di 90° rispetto alla corrente $\mathbf{I}'$ del ramo R, L, mentre il ritardo di questa rispetto a $\mathbf{E}_a$, essendo uguale all'argomento di $R + jL\omega$, è certamente minore di 90°.

[1] È interessante notare che, in assenza di dispersione ($M^2 = L_aL_g$), questo rapporto uguaglia quello fra i numeri di spire n_g, n_a costituenti le due parti della bobina, come agevolmente si dimostra ricordando che in tal caso (El., V, 27) è $L_g : L_a : M = n_g^2 : n_a^2 : n_gn_a$.

la condizione d'innesco si scriverà:

$$\frac{L_g + M}{L_a + M} \geq \frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{g}{g_a}\right),$$

dove al solito per g si dovrà porre la conduttanza equivalente alla impedenza anodica alla pulsazione per la quale essa assume carattere ohmico.

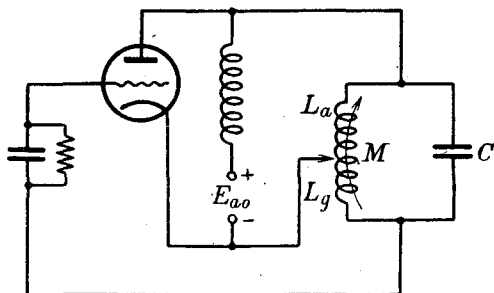
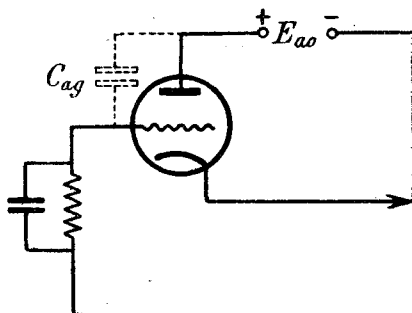



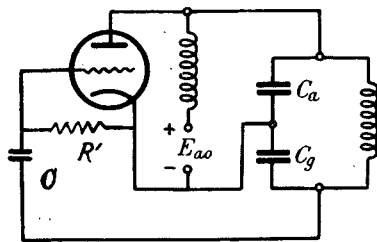
Fig. 270 Fig. 271

Pertanto, posto $L = L_g + L_a + 2M$, cioè indicando con L la induttanza complessiva del sistema (L_g, L_a, M), si avrà:

$$\omega^2 = \frac{1}{LC}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon^2}\right),$$

col solito significato di ε.

Il tipo Hartley si presta assai bene per costituire generatori ad elevatissima frequenza (onde corte). A tale scopo, lo schema si semplifica come in fig. 271, dove la capacità del carico è sostituita dalla capacità C_{ag} del triodo, e la induttanza L_a, L_g da un semplice conduttore collegante l'anodo e la griglia, mentre il catodo è connesso ad un punto intermedio di esso.

Fig. 272

Se nello schema Hartley si scambiano le funzioni della induttanza e della capacità costituenti il circuito di carico anodico, si perviene allo schema di *Colpitt*. A tal uopo la capacità C è composta con due condensatori in serie C_a e C_g, e la tensione con la quale si va ad eccitare il circuito di griglia è quella esistente ai capi di C_g (fig. 272). Per assicurare il passaggio della componente continua della corrente anodica, la alimentazione deve essere fatta in parallelo (n. 15); mentre, data la particolare costituzione del circuito,

non occorre un condensatore per separare il carico dall'anodo. Per contro, lungo la connessione alla griglia, è necessario disporre un condensatore C, il quale può essere utilizzato per la polarizzazione, integrando il dispositivo con una conveniente resistenza di dispersione R' disposta direttamente fra la griglia e il catodo.

Ritenendo al solito reale il rapporto di accoppiamento, il suo valore è in tale caso $\frac{1}{C_g} : \frac{1}{C_a} = \frac{C_a}{C_g}$, quindi la condizione di innesco è data da:

$$\frac{C_a}{C_g} \geq \frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{g}{g_a}\right),$$

dove, ragionando come nel caso precedente, ed indicando con R la resistenza, che questa volta riterremo localizzata nel ramo L, si vede subito che è da porsi:

$$g = \frac{CR}{L} \quad \text{con} \quad C = \frac{C_a C_g}{C_a + C_g};$$

e la pulsazione ω sarà al solito data da:

$$\omega^2 = \frac{1}{LC}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon^2}\right).$$

I tre schemi descritti costituiscono i tipi fondamentali. Loro caratteristica comune è di avere un circuito accordato (impedenza di carico) inserito fra catodo e anodo.

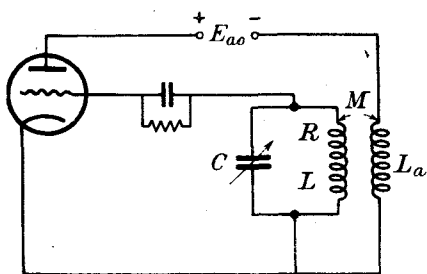



Fig. 273

Non si hanno tipi sostanzialmente diversi disponendo invece tale circuito fra il catodo e la griglia.

Così, ad es., dall'ordinario tipo Meissner si arriva a quello illustrato nella figura 273, la cui trattazione può farsi secondo i criteri generali esposti.

All'uopo si osservi che, trascurando la resistenza della L_a anodica (primaria) e ritenendo l'accoppiamento abbastanza stretto perchè la pulsazione di risonanza del secondario si riporti inalterata al primario, questo, per effetto della presenza del secondario, si comporta, alla risonanza, come una resistenza uguale ad $\frac{M^2\omega^2}{R}$, cioè, essendo $\omega^2 = \frac{1}{LC}$, si ha:

$$\frac{1}{g} = \frac{M^2}{LCR}.$$

Siccome il rapporto d'accoppiamento vale in questo caso $\frac{L}{M}$, la condizione di funzionamento si scrive:

$$\frac{\mu L}{M} \geq 1 + \frac{LCR}{M^2 g_a},$$

dalla quale, con facile calcolo, si deduce che M deve essere compreso fra

$$\frac{1}{2}\left(\mu L - \sqrt{\mu^2 L^2 - \frac{4RCL}{g_a}}\right) \quad \text{ed} \quad \frac{1}{2}\left(\mu L + \sqrt{\mu^2 L^2 - \frac{4RCL}{g_a}}\right) \text{(1)}.$$

34. - Sistemi generatori a tre punti. — Gli schemi di fig. 270 e 272 non sono altro che casi particolari dei sistemi così detti *a tre punti*, cioè del tipo schematicamente indicato in fig. 274, dove fra i tre elettrodi P (anodo), F (catodo), G (griglia) sono disposte tre impedenze $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{Z}_3$, con che il corrispondente circuito differenziale si presenta come indicato in *b*).

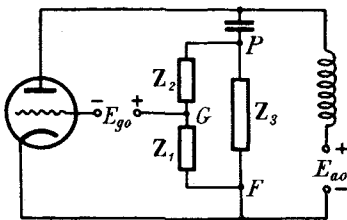



Fig. 274

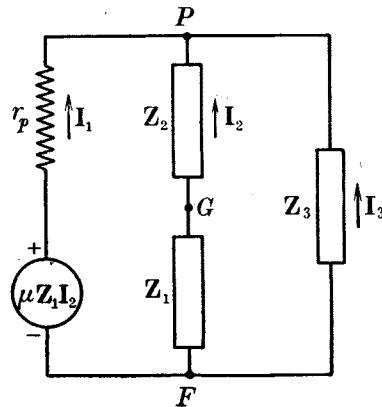



Fig. 275

Proponiamoci di stabilire se e sotto quali condizioni con un sistema siffatto si può costituire un generatore autoeccitato. A tale scopo basterà esprimere che nel circuito differenziale sussiste un regime permanente di corrente alternata di una certa pulsazione ω, con riferimento alla quale si intenderanno calcolate le $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{Z}_3$. Se ci limitiamo a considerare le prime armoniche $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$, $\mathbf{I}_3$ delle correnti che, come indicato in fig. 275, percorrono i tre rami colleganti P con F, mentre r_p rappresenta un conveniente valor medio, di cui fra poco preciseremo il valore, della resistenza differenziale del tubo, l'esame dello schema differenziale disegnato porta a scrivere le seguenti relazioni (leggi di Kirchhoff)

$$-\mu \mathbf{Z}_1\mathbf{I}_2 + r_p\mathbf{I}_1 = (\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2)\mathbf{I}_2 = \mathbf{Z}_3\mathbf{I}_3\,, \quad \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3 = 0\,,$$

(1) Ricordiamo che, in generale, se l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ ha reali le radici α_1, α_2, la inequazione $ax^2 + bx + c > 0$ è soddisfatta dai valori di x compresi fra α_1 ed α_2 se è $a > 0$, da quelli esterni all'intervallo (α_1, α_2) se è $a < 0$.

dalle quali, eliminando le correnti, si ricava:

$$r_p(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3) + (1 + \mu)\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3 = 0 \,. \tag{18}$$

È questa l'equazione fondamentale che definisce il regime oscillatorio del sistema. In particolare si ha che la possibilità di un tale regime è subordinata all'esistenza di un valore reale della pulsazione ω soddisfacente all'equazione stessa. Questa, esplicitando le $\mathbf{Z}$ sotto la forma

$$\mathbf{Z}_1 = R_1 + jX_1 \,, \quad \mathbf{Z}_2 = R_2 + jX_2 \,, \quad \mathbf{Z}_3 = R_3 + jX_3 \,,$$

con che R_1, X_1 ad es. vengono a rappresentare la resistenza e reattanza *in serie* offerte dall'organo collegante il catodo con la griglia, ben inteso valutate alla pulsazione generica ω, equivale alle due relazioni reali:

$$r_p(X_1 + X_2 + X_3) + (1 + \mu)(R_1X_3 + R_3X_1) + R_2X_3 + R_3X_2 = 0 \,, \tag{19}$$

$$r_p(R_1 + R_2 + R_3) + (1 + \mu)(R_1R_3 - X_1X_3) + R_2R_3 - X_2X_3 = 0 \,, \tag{20}$$

le quali, supposti noti r_p e μ, consentono di definire gli (eventuali) regimi oscillatori, e di precisarne, in particolare, la pulsazione. Quest'ultima invero dovrà essere una di quelle per le quali le (19) e (20), considerate come equazioni in ω, risultano compatibili e soddisfatte da valori reali e positivi di ω.

Dalle (19) e (20) è agevole ricavare una interessante condizione *necessaria* (ma in generale *non* sufficiente) per il verificarsi di un siffatto regime oscillatorio. Ad essa si perviene brevemente scrivendo le precedenti sotto l'equivalente forma

$$r_p(X_1X_3 + X_2X_3) + R_3\{(1 + \mu)X_1X_3 + X_2X_3\} = -X_3^2\{r_p + (1 + \mu)R_1 + R_2\} \,, \tag{19'}$$

$$r_p(R_1 + R_2 + R_3) + (1 + \mu)R_1R_3 + R_2R_3 = (1 + \mu)X_1X_3 + X_2X_3 \,, \tag{20'}$$

la prima delle quali è ottenuta dalla (19) moltiplicando ambo i membri per X_3.

Dalla (20′) si deduce subito che, essendo R_1, R_2, R_3, r_p essenzialmente positivi, si avrà necessariamente:

$$(1 + \mu)X_1X_3 + X_2X_3 > 0 \,, \tag{21}$$

da cui

$$\mu X_1X_3 > -(X_1X_3 + X_2X_3) \,. \tag{21'}$$

D'altra parte, essendo il secondo membro della (19′) essenzialmente negativo, mentre il secondo termine del primo membro è, per la (21), certamente positivo, si dovrà pure avere

$$X_1X_3 + X_2X_3 < 0 \,. \tag{22}$$

Confrontando questa con la (21′), si conclude che il prodotto X_1X_3 è

positivo, dopo di che dalla stessa (22) si deduce che il prodotto X_2X_3 è negativo.

Possiamo dunque asserire che, per l'esistenza di un regime oscillatorio, sono necessarie le condizioni

$$(23) \qquad X_1X_3 > 0 \,, \quad X_2X_3 < 0 \quad \text{e (quindi)} \quad X_1X_2 \lessgtr 0 \,,$$

cioè si ha che:

Affinchè con un circuito a triodo del tipo a tre punti possa costituirsi un generatore autoeccitato, è necessario che alla frequenza di funzionamento le impedenze che collegano il catodo con la griglia e con l'anodo abbiano reattanze dello stesso segno, e di segno opposto a quella che collega la griglia con l'anodo.

Gli schemi fondamentali studiati nei nn. precc. non sono che particolari casi di sistemi a tre punti. Il tipo Hartley corrisponde a $X_1 > 0$, $X_3 > 0$, $X_2 < 0$; per il Colpitt si ha invece $X_1 < 0$, $X_3 < 0$, $X_2 > 0$. Quanto al tipo Meissner, mediante una nota (III, 27) trasformazione generale, esso può sempre pensarsi elettricamente equivalente al tipo Hartley.

È interessante rilevare in quale relazione la frequenza di funzionamento di un generatore autoeccitato tipo Hartley o Colpitt sta con la frequenza di risonanza del circuito costituito dalle tre impedenze $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{Z}_3$.

Per semplificare, supponiamo che gli elementi resistenti siano localizzati nella impedenza $\mathbf{Z}_2 = R_2 + jX_2$, cioè riteniamo $R_1 = R_3 = 0$. Quanto ad R_2, resistenza *in serie* dell'impedenza $\mathbf{Z}_2$, essa sarà in generale relativamente piccola, e più precisamente assai minore di r_p; per cui essendo, in virtù della (19):

$$X_1 + X_2 + \frac{R_2}{r_p} X_3 = 0 \,,$$

si avrà certamente

$$X_1 + X_2 + X_3 > 0 \quad \text{per} \quad X_2 < 0 \quad \text{(Hartley)},$$
$$X_1 + X_2 + X_3 < 0 \quad \text{per} \quad X_2 > 0 \quad \text{(Colpitt)}.$$

Ora, se ad es. il sistema $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{Z}_3$ viene considerato in serie, la sua pulsazione di risonanza ω_0 è quella per cui la somma $X_1 + X_2 + X_3$ è nulla, mentre, come è noto (VI, 7), la somma stessa sarà positiva per pulsazioni $> \omega_0$ e negativa per pulsazioni $< \omega_0$. Si deduce che nei due casi considerati si ha $\omega > \omega_0$, rispettivamente $\omega < \omega_0$. Cioè:

Per un generatore tipo Hartley la pulsazione di funzionamento è maggiore di quella di risonanza del circuito costituito dalle $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{Z}_3$ in serie, per il tipo Colpitt è invece minore.

Ad identica conclusione si giunge se il sistema stesso viene invece considerato come costituito da $\mathbf{Z}_2$ in parallelo con $\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_3$. Invero, tra-

scurando R_2, la reattanza di un tale sistema vale:

$$\frac{X_2(X_1 + X_3)}{X_1 + X_2 + X_3},$$

e, poichè il numeratore è certamente negativo (in quanto che, come s'è visto, X_2 ha segno contrario ad X_1 e X_3), questa reattanza ha segno opposto ad $X_1 + X_2 + X_3$. D'altra parte, per un sistema in parallelo, la reattanza è positiva per pulsazioni inferiori a quella di risonanza, negativa per pulsazioni maggiori di questa.

Il criterio dianzi stabilito, compendiato nella (23), è di fondamentale importanza pratica, perchè in generale non è agevole procedere alla effettiva trattazione delle complete equazioni (19) e (20), data la difficoltà di precisare i valori spettanti ai parametri del tubo elettronico in corrispondenza all'eventuale regime oscillatorio.

Per quanto infine riguarda il parametro r_p, risulta dalla stessa trattazione precedente che ad esso deve attribuirsi valore tale da consentire di scrivere le equazioni fondamentali da cui si è dedotta la (18). Ciò val quanto dire che r_p è quel numero che moltiplicato per l'ampiezza della corrente fondamentale I_1 della corrente anodica dà l'ampiezza della componente fondamentale della tensione ai capi del tubo sinfasica con le correnti stesse. Detti cioè i, v (funzioni del tempo) i valori istantanei della corrente anodica e della tensione fra anodo e catodo durante il supposto funzionamento in regime oscillatorio di pulsazione ω, la grandezza r_p è da intendersi definita da

$$r_p \int i \cos \omega t \, dt = \int v \cos \omega t \, dt = \int r_a(i) \cdot i \cos \omega t \, dt \,,$$

essendo gli integrali estesi al semiperiodo che s'inizia con l'istante in cui v è massima, e dove, nell'ultimo membro, $r_a(i)$ rappresenta il valore della resistenza differenziale in ciascun istante del funzionamento, cioè una ben determinata funzione di i, deducibile dalle caratteristiche del tubo, e quindi, nel caso nostro, una certa funzione del tempo t (precisamente $r_a(i(t))$).

35. - Esempio. — A titolo di esempio, consideriamo nuovamente il generatore che abbiamo calcolato al n. 25, e proponiamoci di farlo funzionare in regime di autoeccitazione.

A tal uopo, ricordando che la tensione ai capi del carico anodico è di 3600 volt, se adottiamo ad es. il tipo Meissner, dovremo attribuire al coefficiente di induzione mutua fra le bobine di anodo e di griglia valore tale che la griglia risulti eccitata con una $E_g = 646{,}6$ volt, cioè si abbia:

$$\frac{M}{L} = \frac{646{,}6}{3600},$$

donde, ricordando che per L si è adottato il valore 72 μH, si deduce:

$$M = 72 \cdot \frac{646,6}{3600} \cong 13,3\, \mu H\,.$$

Per verificare se la condizione di innesco è soddisfatta, occorre stabilire in che modo è realizzata la polarizzazione E_{g0} della griglia. Se la E_{g0} fosse ottenuta con una sorgente separata, poichè questa, in relazione al precedente studio, dovrebbe avere la tensione di 396,6 volt, cioè superiore alla tensione di interdizione relativa alla tensione d'alimentazione dell'anodo, non sarebbe possibile pensare alla autoeccitazione del sistema.

Vediamo se invece si possa ottenere lo scopo usando il polarizzatore catodico già esaminato al n. 25. Come allora si è visto, la corrente anodica di riposo sarebbe in tale caso di 28 mA, ed il punto di funzionamento cadrebbe nel punto C della fig. 257, dove la conduttanza mutua, come può rilevarsi dalla caratteristica, vale circa 1 mA/V, quindi la conduttanza g_a vale circa 0,033 mA/V. Siccome la resistenza del carico anodico è di 21600 Ω, ed abbiamo assunto $\frac{L}{M} = \frac{646,6}{3600} = 0,179$, la condizione (17) è soddisfatta, e pertanto si conclude che il sistema potrebbe così funzionare in regime di autoeccitazione.

Si potrebbe infine provvedere alla polarizzazione della griglia col condensatore shuntato, portando così un estremo del circuito di griglia a potenziale nullo (catodo). In tale modo l'innesco sarebbe senza dubbio facilitato, perchè all'inizio la tensione risultante di griglia sarebbe di 133,3 volt, e pertanto l'inizio stesso avverrebbe in un punto in cui la g_m ha un valore prossimamente uguale al suo massimo, come può rilevarsi dalla caratteristica del tubo. La resistenza R di polarizzazione dovrà essere così commisurata che la caduta di tensione dovuta al passaggio per essa della componente costante I_{g0} della corrente di griglia sia di 396,6 volt. Ricordando che si è trovato $I_{g0} = 9,4$ mA, ne segue che bisognerà assumere

$$R = \frac{396,6}{9,4 \cdot 10^{-3}} \cong 42\,000\ \Omega\,.$$

Quanto al condensatore, la sua capacità C_g dovrà essere scelta secondo i criteri indicati al n. 31. Assumendo ad esempio $C_g = 500\ \mu\mu$F, sarà largamente verificata la condizione $RC_g > T$, in quanto che risulta $RC_g = 2,1 \cdot 10^{-5}$, mentre è $T = 1,25 \cdot 10^{-6}$ sec.

Occorre però verificare quel che avverrebbe qualora, per una ragione qualunque, il funzionamento del sistema venisse interrotto. In tale caso il circuito anodico verrebbe sottoposto all'intera tensione E_{a0} (in quanto che la caduta di tensione attraverso la resistenza del ramo R, L del carico è trascurabile), e siccome la tensione di griglia sarebbe nulla, la corrente

anodica assurgerebbe al valore di circa 180 mA, cui corrisponde una dissipazione di

$$4000 \cdot 180 \cdot 10^{-3} = 720 \text{ W},$$

di gran lunga superiore quindi a quella sopportabile dal tubo. Per evitare che ciò avvenga, è pertanto necessario che venga inserita nel circuito di griglia una conveniente E_{g0}: precisamente, dovendosi esigere che la dissipazione anodica si mantenga entro il limite di 250 watt, e quindi la corrente anodica non superi $\frac{250}{4000} = 0{,}063$ A, dall'esame della caratteristica del tubo si deduce che la tensione risultante di griglia allo stato di riposo non dovrà eccedere 70 volt. La tensione E_{g0} cercata dovrà dunque essere di

$$E_{g0} \geq \frac{E_{a0}}{\mu} - 70 = \frac{4000}{30} - 70 \cong 63 \text{ volt}.$$

Per sicurezza faremo, ad es., $E_{g0} = 75$ volt, e, come facilmente si può verificare, la condizione d'innesco è, anche in presenza di una tale E_{g0}, largamente soddisfatta. Naturalmente, la resistenza di polarizzazione R verrà congruamente ridotta; e precisamente al valore

$$R' = \frac{396{,}6 - 75}{9{,}4 \cdot 10^{-3}} \cong 34\,500\ \Omega .$$

D) Controllo della frequenza dei generatori autoeccitati.

36. - Elementi da cui dipende la stabilità della frequenza. — Il regime di funzionamento di un generatore del tipo che abbiamo studiato nei nn. precc. è strettamente legato agli elementi del circuito di carico ed alle costanti del triodo, come agevolmente si riconosce riflettendo che esso è sostanzialmente dominato dalla espressione (11').

Per quanto riguarda la frequenza, si può osservare che, se il rapporto d'accoppiamento fosse sempre reale, e se la impedenza anodica fosse del tipo a tre rami g, L, C in parallelo, essa sarebbe senza dubbio costante ed uguale ad $\frac{1}{\sqrt{LC}}$. Ma un tale stato di cose è puramente ideale. Se, per fissare le idee, ci riferiamo ad es. al tipo Meissner, la resistenza $\frac{1}{g}$ sarà in generale conglobata con L o con C o con entrambe, il che, da un lato, modifica il valore della pulsazione di risonanza dello stesso sistema di carico, e dall'altro determina uno sfasamento fra $-\mathbf{E}_a$ ed $\mathbf{E}_g$, per modo che il coefficiente di j della espressione (11'), il cui annulla-

mento determina la pulsazione di funzionamento del generatore, viene a dipendere sia dal carico che dalle costanti del triodo (cfr. nota al n. 33). E se anche, in prima approssimazione, volessimo ritenere reale il rapporto di accoppiamento, la pulsazione non sarebbe $\frac{1}{\sqrt{LC}}$, ma questo valore moltiplicato per $\sqrt{1-\frac{1}{\varepsilon^2}}$, essendo ε il coefficiente di risonanza del sistema (g, L, C). Quanto a g, bisogna avere sempre presente che in essa in generale dovrà intendersi conglobata quella equivalente (III, 16) al carico eventualmente accoppiato agli organi L o C, al qual proposito si deve osservare che ogni aumento del carico adduce ad un aumento di g e quindi ad una diminuzione del coefficiente di risonanza.

Si comprende quindi che da un generatore autoeccitato non si può pretendere una frequenza rigorosamente costante, salvo che non si adottino particolarissimi provvedimenti atti ad assicurare la invariabilità di tutti gli elementi da cui la frequenza stessa dipende.

In effetto, nei generatori destinati a *fissare* la frequenza di funzionamento di un complesso trasmittente, come a suo tempo vedremo, la stabilità della frequenza stessa è ottenuta con accorgimenti diretti essenzialmente a mantenere il più possibile costanti gli elementi del triodo (segnatamente la conduttanza anodica media g_a) e del carico, e, per ovviare alle inevitabili variazioni di questi, si opera con circuiti aventi grandissimo coefficiente di risonanza (1). Così facendo, si può effettivamente raggiungere una stabilità assai elevata (2).

Lo stesso scopo può efficacemente ottenersi utilizzando generatori in cui la frequenza sia determinata da elementi di altro tipo. E precisamente, sfruttando gli effetti di retroazione che il circuito anodico può esercitare su quello di griglia di un triodo, si possono realizzare dei generatori in cui l'elemento eccitatore, pur avendo sostanzialmente il carattere elettrico, ha la sua origine in fenomeni di ordine diverso, per es. meccanici.

---

(1) Invero, da quanto esposto al n. 33 (nota) si deduce che, per un generatore tipo Meissner, la stabilità della frequenza dipende da quella del prodotto $Rg_a = \frac{g_a}{g\varepsilon^2}$. Ora, siccome la conduttanza di carico g ha valori paragonabili con quelli di g_a, si comprende che per ovviare alle variazioni di frequenza conseguenti alle variazioni eventuali di g e di g_a, converrà attribuire un elevato valore al coefficiente di risonanza ε.

(2) Si allude qui alle variazioni di frequenza che possono derivare da quelle variazioni degli elementi su di essa influenti che hanno carattere accidentale e perciò si verificano in intervalli di tempo relativamente brevi. Tali variazioni non sono da confondersi con quelle — a carattere lento — che possono aversi per effetto dell'inevitabile incostanza dei valori delle costanti circuitali — resistenze, induttanze, capacità — e di quelle dei tubi elettronici (per effetto di variazione del grado di vuoto, delle condizioni fisiche degli elettrodi, ecc.).

37. - Generalità sui sistemi meccanici oscillanti. - Eventuali circuiti elettrici equivalenti. — Conviene premettere qualche nozione generale sui sistemi meccanici oscillanti. Un tale sistema può schematizzarsi pensando ad un punto materiale, la cui massa indicheremo con L, mobile lungo una retta, in condizioni tali che, ogni qualvolta esso si scosti da una certa posizione di riposo O, pervenendo ad es. in P, sia sollecitato a ritornare in O da una forza di tipo *elastico*, proporzionale cioè, secondo un certo coefficiente $\frac{1}{C}$, alla ascissa $OP = x$ e rappresentabile quindi con $-\frac{x}{C}$. Inoltre supporremo che il moto si accompagni con una reazione d'attrito proporzionale alla velocità e di senso contrario a questa, quindi rappresentabile con una espressione del tipo $-R\frac{dx}{dt}$ con $R > 0$.

Supponiamo che ad un tale punto materiale venga applicata una forza $f(t)$, in generale variabile col tempo, e proponiamoci di studiare il moto che esso andrà ad assumere. Per il secondo principio della Dinamica, in ogni istante il prodotto della massa per l'accelerazione $\frac{d^2x}{dt^2}$ deve uguagliare la risultante delle forze applicate; quindi si avrà:

$$L\frac{d^2x}{dt^2} = -R\frac{dx}{dt} - \frac{x}{C} + f(t),$$

cioè:

$$L\frac{d^2x}{dt^2} + R\frac{dx}{dt} + \frac{x}{C} = f(t).$$

Questa equazione coincide con quella che governa l'andamento della carica ai capi di un condensatore di capacità C, connesso in serie con una induttanza L ed una resistenza R in un circuito in cui è attiva una f. e. m. $f(t)$; alla velocità $\frac{dx}{dt}$ verrebbe così a corrispondere la intensità della corrente.

Pertanto possiamo senz'altro affermare:

1°) che in assenza di forza $f(t)$ applicata, cioè per $f(t) = 0$, il punto, una volta rimosso dalla posizione O, tenderà a ritornarvi con un moto, che, quando sia $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, avrà carattere oscillatorio smorzato con pulsazione:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}};$$

questa poi, se R è molto piccola, risulta sensibilmente uguale a $\frac{1}{\sqrt{LC}}$, che potrà chiamarsi la pulsazione *naturale* del sistema;

2°) che, se $f(t)$ è funzione sinusoidale del tempo di pulsazione Ω, il

moto finirà coll'assumere andamento sinusoidale di periodo $\frac{2\pi}{\Omega}$, cioè tanto x quanto $\frac{dx}{dt}$ saranno funzioni sinusoidali di pulsazione Ω. E l'ampiezza della corrispondente velocità si otterrà dividendo l'ampiezza di $f(t)$ per la espressione:

$$\sqrt{R^2 + \left(L\Omega - \frac{1}{C\Omega}\right)^2},$$

che potrà chiamarsi l'*impedenza meccanica* del sistema;

3°) che, se Ω coincide con ω, ed R è molto piccolo rispetto a $\sqrt{\frac{L}{C}}$, cioè se il sistema ha un elevato « coefficiente di risonanza », l'ampiezza della oscillazione può divenire estremamente grande anche con piccoli valori della ampiezza di $f(t)$, o, ciò che è lo stesso, il punto può mantenersi in oscillazione permanente sulla sua pulsazione naturale ω anche con valori piccolissimi della forza applicata.

Ad un tale schema sono riducibili molti sistemi meccanici, fra cui tipico è il notissimo caso del pendolo, in cui si ha a che fare con un elemento di carattere inerziale (la massa) e con uno (la gravità) che, se gli scostamenti dalla posizione di riposo sono abbastanza piccoli, ha carattere elastico, mentre gli eventuali moti oscillatori si accompagnano con reazioni del tipo attrito.

Ora osserviamo che, se con opportuni artifici si riesce ad associare al movimento di un sistema siffatto delle proporzionali variazioni di cariche elettriche su acconci conduttori, o di intensità di corrente (o di tensioni) in opportuni circuiti, si vengono a realizzare dei sistemi elettrici il cui comportamento è identico a quello di un circuito comprendente una induttanza, una capacità ed una resistenza in serie, i cui valori sono proporzionali alle L, C, R. Un tale circuito si potrà chiamare *elettricamente equivalente* al sistema dato.

È chiaro che sistemi di tale tipo possono essere usati utilmente per gli scopi che ci interessano, qualora la frequenza propria sia dell'ordine di grandezza desiderato, e qualora, per avere il sistema meccanico un elevato coefficiente di risonanza, altrettanto avvenga del circuito elettrico ad esso equivalente.

38. - Controllo della frequenza col diapason. - Controllo per magnetostrizione. — Per frequenze dell'ordine di poche centinaia o migliaia di Hz, si può utilizzare un diapason. Per tradurre in impulsi elettrici le oscillazioni dei suoi rebbi o viceversa, basterà avvicinare agli stessi un elettromagnete recante un conveniente avvolgimento: il movimento del rebbio, provocando variazioni nella riluttanza del circuito magnetico,

darà luogo a f. e. m. indotte, e viceversa una f. e. m. agente nell'avvolgimento potrà provocare oscillazioni nel rebbio.

Se due tali avvolgimenti vengono collegati l'uno col circuito di griglia, l'altro col circuito anodico di un triodo (fig. 276), avverrà che, una volta eccitato il diapason, le tensioni di griglia provocheranno corrispondenti correnti anodiche di medesima pulsazione, e queste conferiranno al diapason nuova energia (proveniente, in ultima analisi, dal generatore anodico) atta a compensare la dissipazione per attrito. Si può così conseguire da un lato la *permanenza* delle oscillazioni del diapason, e dall'altro realizzare, nel circuito anodico, una corrente permanente avente la stessa frequenza di quelle.

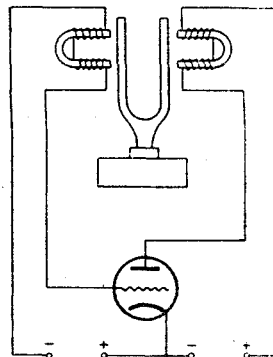



Fig. 276

A causa dell'elevato coefficiente di risonanza meccanica del diapason, tale sistema è sensibilissimo, per cui con esso si possono realizzare dei precisi campioni di (bassa) frequenza, cioè, in particolare, dei sensibili misuratori di tempo; e associando al sistema dei moltiplicatori di frequenza (n. 26), si possono anche ottenere generatori di frequenze multiple della fondamentale.

Per frequenze di ordine più elevato (da 1000 fino a quasi 100 000 Hz) si può sfruttare il fenomeno della *magnetostrizione*, il quale consiste in ciò, che una sbarra magnetica introdotta in una bobina percorsa da corrente, in conseguenza delle variazioni di magnetizzazione, subisce allungamenti ed accorciamenti come se fosse sottoposta a trazioni e compressioni. D'altra parte, una compressione iniziale in una tale sbarra genera oscillazioni meccaniche aventi un certo periodo, dipendente al solito dall'elasticità del materiale, dall'inerzia e dalle dimensioni della sbarra [1], e che, al pari di quelle del diapason, sono caratterizzate da un elevato coefficiente di risonanza.

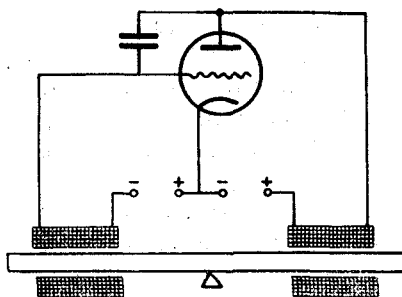



Fig. 277

La traduzione delle oscillazioni meccaniche in corrispondenti oscillazioni elettriche può farsi disponendo una tale sbarra entro un sole-

[1] Più precisamente, il periodo è entro certi limiti proporzionale alla lunghezza della sbarra.

noide. Allora, se in essa si provocano oscillazioni meccaniche, le conseguenti variazioni di flusso producono f. e. m. col medesimo periodo nella bobina, e viceversa, eccitando la bobina con corrente alternata, si avranno oscillazioni meccaniche.

Si comprende pertanto che se l'avvolgimento predetto viene accoppiato magneticamente sia al circuito di griglia che al circuito anodico di un triodo secondo lo schema indicato in fig. 277, si realizzerà uno stato di cose perfettamente analogo a quello descritto relativamente al diapason.

Tanto in questo caso, come in quello del diapason, il sistema oscillante meccanico equivale, nei suoi riflessi elettrici, ad un circuito contenente in serie una induttanza, una capacità ed una resistenza, e coi dispositivi descritti non si è fatto altro che *accoppiare* tale circuito equivalente, sia a quello di griglia, che a quello di placca del triodo. Riferendoci a questo ultimo accoppiamento, possiamo dire che il suo effetto corrisponde (III, 27) ad avere inserito direttamente nel circuito anodico il circuito elettrico equivalente al sistema meccanico, mentre la connessione col circuito di griglia può interpretarsi come un accoppiamento magnetico fra il circuito di placca e quello di griglia. Pertanto, come si vede, il sistema esaminato equivale in definitiva ad un generatore tipo Meissner.

In entrambi i casi, per effetto dell'accoppiamento, l'elevato valore del coefficiente di risonanza del sistema meccanico si trasferisce, nel senso spiegato in III, 27, al circuito anodico (ed a quello di griglia): si realizza quindi una stabilità di frequenza quale in un ordinario generatore Meissner non potrebbe aversi, in quanto che al coefficiente di risonanza della impedenza anodica non si riesce in pratica ad assegnare valori comparabili con quello.

39. - Proprietà piezoelettriche del quarzo. - Circuito equivalente. — Per frequenze più elevate, si ricorre ad altri mezzi, fondati sull'impiego del quarzo.

I cristalli di questo e di altri minerali — come il sale di Rochelle, la tormalina — godono della così detta proprietà *piezoelettrica*, la quale consiste in ciò, che quando essi vengono tesi o compressi secondo certe ben determinate direzioni, manifestano proprietà elettriche, e viceversa, in seguito ad una eccitazione elettrica, subiscono contrazioni o dilatazioni.

Un cristallo di quarzo si presenta in generale sotto forma di un prisma esagonale terminato con una piramide. La direzione delle generatrici del prisma è quella del così detto *asse ottico*, e le direzioni normali alle coppie di lati opposti dell'esagono costituenti la sezione trasversale del prisma sono quelle dei così detti *assi elettrici*.

Una lamina di quarzo tagliata, come indica la fig. 278, secondo due piani paralleli all'asse ottico, e ad uno degli assi elettrici, oppure all'asse ottico e ad una coppia di lati opposti dell'esagono, manifesta spiccatamente la proprietà piezoelettrica. Cioè, se essa viene assoggettata a compressione nel senso normale ai piani predetti, si manifestano cariche elettriche di opposti segni sulle due facce del taglio; se invece viene tesa secondo la stessa direzione, le cariche elettriche compaiono ancora, ma con segni opposti alle precedenti. Viceversa, se alle facce viene applicata una d. d. p. di un certo senso, il cristallo si comprime, e si dilata invece invertendo il senso della d. d. p.

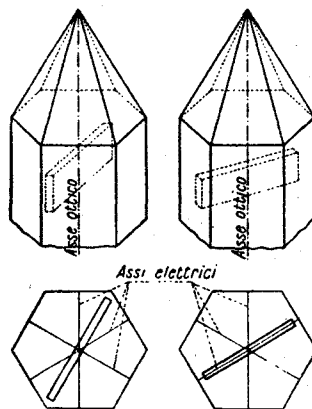



Fig. 278

D'altra parte, una lamina di quarzo, quando mediante una compressione o trazione iniziale venga rimossa dal suo stato di equilibrio, si comporta come un sistema elastico del tipo generale accennato al n. prec., e pertanto si mette a compiere delle oscillazioni aventi un periodo ben determinato (dipendente dalle dimensioni della lamina) ed uno smorzamento assai piccolo.

Il fenomeno piezoelettrico pertanto consente di tradurre l'oscillazione meccanica in una oscillazione elettrica, in quanto che la carica q dovuta ad esso è proporzionale alla contrazione (o allungamento) che la lamina subisce nel senso della sua vibrazione. Quindi, se la lamina viene fatta oscillare, le superficie delle sue basi si troveranno ad ogni istante a sopportare cariche q e $-q$ tali da rispecchiare elettricamente l'andamento dell'oscillazione.

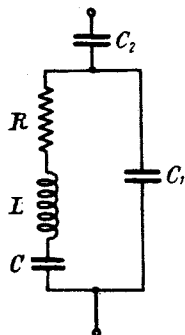



Fig. 279

Ciò val quanto dire che la lamina equivale ad un sistema elettrico comprendente una resistenza R, una induttanza L ed una capacità C tra loro in serie. Se poi si pensa che le due basi della lamina possono considerarsi costituire le armature di un condensatore, la cui capacità indicheremo con C_1, si conclude che, dal punto di vista elettrico, la lamina stessa equivale ad un sistema come quello disegnato in fig. 279, in cui si è aggiunto un condensatore C_2, che sta a rappresentare la capacità dello spazio d'aria che generalmente si lascia fra i sostegni della lamina onde consentire le vibrazioni di questa.

I valori di R, L, C, C_1 dipendono essenzialmente dalle dimensioni della lamina (nonchè da parecchi altri elementi, fra cui la viscosità del quarzo, la lavorazione della lamina ecc.), e per lamine tagliate normalmente a

due facce opposte dell'esagono, vibranti nel senso dello spessore, si ha approssimativamente:

$$L = 130 \frac{s^3}{A} \text{ H}, \qquad R = 1300 \frac{s}{A} \, \Omega ,$$

$$C = 0{,}0024 \frac{A}{s} \, \mu\mu\text{F}, \qquad C_1 = 0{,}4 \frac{A}{s} \, \mu\mu\text{F} .$$

essendo s (cm) lo spessore, A (cmq) l'area di ciascuna delle basi, supposte rettangolari, della lamina stessa.

40. - Frequenza propria e frequenza di risonanza in parallelo di una lamina di quarzo. - Reattanza equivalente. — È importante calcolare i valori della frequenza f di risonanza — o della corrispondente lunghezza d'onda λ — e del coefficiente di risonanza ε del sistema costituito da R, L, C. Con facile calcolo si trova:

$$f = \frac{285 \cdot 10^3}{s}, \qquad \lambda = 1885 \sqrt{0{,}0024 \cdot 130} \cdot s \backsimeq 1005 \, s , \qquad \varepsilon = 180\,000 \, s ,$$

dove f e λ risultano espressi in Hz, rispettivamente in m, se s è espresso in cm.

Per es., per un cristallo dello spessore di un cm, la frequenza di risonanza è di 285 kHz ed il coefficiente di risonanza raggiunge 180 000, valore assai elevato in confronto a quelli che si possono realizzare con gli ordinari circuiti elettrici adatti per quella stessa frequenza.

È importante esaminare come varia, al variare della frequenza, la impedenza equivalente al quarzo. In prima approssimazione potremo ritenere nulla la resistenza ed allora, per la suscettanza equivalente, si ha il valore:

$$C_1 \omega \frac{1 - LC\omega^2 + \dfrac{C}{C_1}}{LC\omega^2 - 1} .$$

Si deduce che la impedenza cercata si annulla per la pulsazione $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, mentre la pulsazione ω_1 che la rende infinita è determinata da:

$$1 - LC\omega_1^2 + \frac{C}{C_1} = 0 ,$$

cioè da:

$$LC\omega_1^2 = 1 + \frac{C_1}{C} ,$$

che, per essere:

$$\frac{C}{C_1} \backsimeq 0{,}06 ,$$

risulta pochissimo superiore alla ω_0 (1).

(1) Precisamente essa ne differisce per meno del 3 ‰.

La pulsazione ω_0 è quella che si chiama la pulsazione ***propria*** della lamina, mentre alla ω_1 si dà il nome di pulsazione di ***risonanza in parallelo.***

La reattanza equivalente è dunque negativa per $\omega < \omega_0$, ma appena oltrepassato tale valore assume valori positivi i quali vanno crescendo con grande rapidità, perchè per $\omega = \omega_1$ la reattanza stessa diviene infinita. Ciò rende conto chiaramente che si ha a che fare con un circuito a risonanza molto acuta, per modo che il diagramma della reattanza X ha l'aspetto di fig. 280; l'ascesa del tratto compreso fra ω_0 ed ω_1 è ripidissima ed il successivo tratto discendente è quasi verticale.

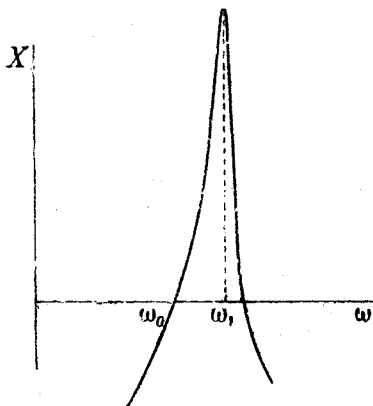



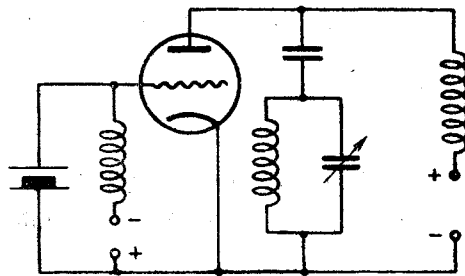
Fig. 280

41. - Generatori a frequenza controllata dal quarzo. — Ciò premesso, se inseriamo una lamina di quarzo nel circuito di griglia di un triodo, e costituiamo il carico anodico con un circuito del solito tipo (R, L, C), possiamo facilmente vedere che un tale sistema potrà funzionare come generatore purchè L, C siano scelti opportunamente.

La lamina non può mettersi in vibrazione spontanea, e, quando anche ciò avvenisse, le vibrazioni si smorzerebbero, *a meno che* non sia disposto un tempestivo apporto di energia al circuito di griglia nel quale essa è inserita. Nel caso nostro, un tale apporto può realmente avvenire attraverso la connessione capacitiva griglia-anodo. Anzi, come abbiamo veduto al n. 11, per tale scopo è necessario che il carico anodico, abbia, alla frequenza desiderata, reattanza positiva.

Fig. 281

Pertanto andremo a costituire il carico anodico con un sistema accordato non alla frequenza propria del quarzo, ma ad una lievemente superiore (fig. 281). In tali condizioni invero la reattanza del carico riesce positiva [1], e quindi la impedenza

---

[1] Si ricordi che la reattanza è funzione crescente della frequenza (VI, 7), e quindi nel caso di un sistema (L, C) in parallelo, essa è positiva per pulsazioni $\omega < \frac{1}{\sqrt{LC}}$, negativa per $\omega > \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

d'entrata ha negativa la parte reale (n. 11), cioè si ha trasferimento di energia dal circuito anodico a quello di griglia. Il disaccordo fra il carico ed il quarzo dovrà essere molto piccolo, perchè, data la estrema piccolezza del decremento del quarzo, è piccolissimo l'apporto occorrente per compensare la dissipazione e rendere quindi permanente la vibrazione della lamina.

Più esattamente, se pensiamo che il sistema così costituito può interpretarsi come uno del tipo a tre punti (n. 34) in cui la impedenza Z_2 fra griglia e anodo è essenzialmente capacitiva, ne segue che per il funzionamento in autoeccitazione occorre che tanto il carico anodico quanto il circuito equivalente al quarzo presentino reattanza positiva. Quindi la pulsazione ω' di funzionamento dovrà certamente essere compresa fra ω_0 ed ω_1 in quanto in quest'intervallo la reattanza del quarzo è positiva; ed inoltre il circuito anodico, per potere a tale pulsazione presentare reattanza positiva, dovrà essere accordato per una pulsazione ω_a superiore a quella. Si avrà dunque:

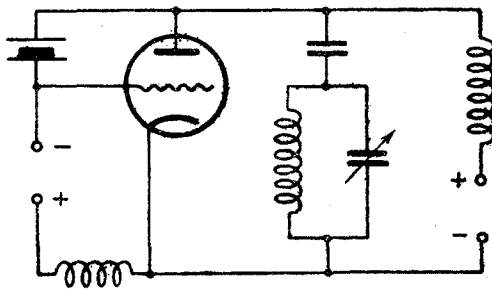



Fig. 282

$$\omega_0 < \omega' < \omega_1 \quad \text{ed} \quad \omega' < \omega_a .$$

Alla polarizzazione della griglia si provvederà con una sorgente di f. e. m. costante, la quale verrà disposta fra catodo e griglia in parallelo col quarzo, ma con l'intermediario di una induttanza, la cui funzione è quella di «assorbire» la componente variabile della tensione generata dall'oscillazione del quarzo (cfr. VII, 4).

Talvolta in luogo dell'induttanza si utilizza una resistenza, ma l'effetto è meno perfetto.

Un altro schema che consente l'utilizzazione delle proprietà del quarzo è quello rappresentato in fig. 282, dove la lamina è disposta fra griglia e anodo, essendo al solito inserito nel circuito anodico un sistema tipo (L, C). Anche qui si ha a che fare con un sistema a tre punti, e la reattanza dell'impedenza inserita fra catodo e griglia è quella dovuta alla capacità C_{fg} del tubo, quindi è capacitiva. Alla pulsazione ω' di funzionamento la reattanza del quarzo dovrà allora essere positiva, quindi necessariamente si avrà, come dianzi:

$$\omega_0 < \omega' < \omega_1 ,$$

mentre alla stessa pulsazione ω' il sistema anodico (L, C) deve presentare reattanza *capacitiva*. Pertanto esso, in questo caso, dovrà essere accordato per una pulsazione $\omega_a < \omega'$.

La precisione di frequenza ottenibile con l'impiego del quarzo può raggiungere l'uno su 100 000 ed oltre, quando siano presi opportuni provvedimenti diretti ad evitare le influenze di elementi fisici esterni, in particolare le variazioni di temperatura ed i campi elettrici vicini. Per le prime, occorre che l'intero sistema sia mantenuto a temperatura rigorosamente costante, il che può farsi racchiudendolo in un termostato; alle seconde si provvede con una accurata schermatura.

42. - Regolazione automatica della frequenza. — Sono assimilabili ai metodi di controllo quelli con i quali si tende ad ottenere l'*autoregolazione* della frequenza, similmente a quanto avviene nel caso di due alternatori in parallelo.

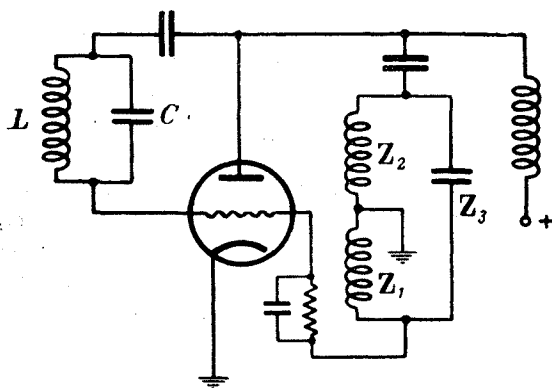



Fig. 283

Fra la griglia e l'anodo del triodo facente parte di un sistema generatore autoeccitato, disponiamo un circuito tipo L, C in parallelo accordato sulla pulsazione ω_0 di funzionamento del generatore. Se prescindiamo dalle inevitabili resistenze, possiamo dire che il gruppo L, C funziona come una impedenza infinita per $\omega = \omega_0$, mentre per una ω diversa da ω_0 esso si comporta come una capacità o una induttanza secondo che è $\omega > \omega_0$ o $\omega < \omega_0$.

Orbene, è facile vedere che un tale sistema ha attitudini autoregolatrici della frequenza.

Infatti, il generatore essendo sempre riducibile ad un sistema a tre punti, supponiamo dapprima che sia $X_3 < 0$ e (quindi) X_1, $X_2 > 0$ (ad es. si pensi al tipo Hartley, come a fig. 283). Se indichiamo con C_0 ed L_0 la capacità e la induttanza rispettivamente equivalenti ad X_3 e ad $X_1 + X_2$, si avrà, prescindendo dagli elementi dissipativi:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}, \tag{24}$$

e la reattanza (L, C) non fa sentire alcun effetto, perchè, come abbiamo supposto, essa è accordata sulla pulsazione ω_0, e pertanto la X_3 non è alterata dalla presenza di quella.

Ma se, per una causa qualunque, la pulsazione tende per es. ad aumentare, il sistema (L, C) si comporterà come una reattanza negativa, cioè

viene ad equivalere ad un condensatore, e pertanto la capacità C_0 subisce un *aumento*. Ma a questo, a senso della (24), consegue una diminuzione della pulsazione. Se invece si presentasse una tendenza alla diminuzione, la C_0 verrebbe shuntata da un sistema a carattere induttivo, essa dunque si trasformerebbe in una $C_0' < C_0$, donde una tendenza all'aumento della pulsazione.

Analogamente avviene nel caso in cui invece sia $X_3 > 0$, onde si conclude che l'aggiunta del sistema (L, C) conferisce al generatore l'attitudine a reagire contro le cause che tendono a modificarne la frequenza di funzionamento.

Quanto all'efficienza β di tale reazione, essa sarà tanto maggiore quanto maggiore è la variazione db della suscettanza

$$b = -C\omega + \frac{1}{L\omega}$$

per un dato scarto $d\omega$ della pulsazione rispetto alla $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ per cui si ha $b = 0$.

Essa pertanto potrà misurarsi col rapporto $-\frac{db}{d\omega}$, calcolato per $\omega = \omega_0$, il segno negativo essendo giustificato dal fatto che la suscettanza, all'opposto della reattanza, è essenzialmente decrescente coll'aumentare della frequenza.

Ora in generale si ha:

$$-\frac{db}{d\omega} = C + \frac{1}{L\omega^2},$$

ed il valore di questa espressione per $\omega = \omega_0$ è, a causa di $\omega_0^2 LC = 1$:

$$\beta = -\left(\frac{db}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_0} = 2C.$$

Si deduce quindi che l'azione regolatrice è tanto più energica quanto maggiore è C, e quindi — poichè il prodotto LC è fissato — quanto minore è L. Converrà dunque costituire il sistema (L, C) con elevato valore di C e piccolo di L, cioè con piccolo valore della «resistenza caratteristica» $\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Specialmente per elevate frequenze (onde corte), un tale regolatore o, come si dice, *stabilizzatore* di frequenza può anche realizzarsi mediante una linea a due fili di opportuna lunghezza chiusa in corto circuito alla estremità. Invero, detta x_1 la lunghezza di una tale linea, cioè $2x_1$ la lunghezza del filo, e assunta per origine l'estremità i cui capi sono connessi con la griglia ed il catodo, sarà necessariamente nulla l'impedenza misu-

rata all'ascissa x_1, per cui, ponendo $\mathbf{Z}_1 = 0$, $x = 0$ nella formola (9) di IV, 6, si trova agevolmente che la reattanza all'origine vale:

$$X = R \operatorname{tg} a x_1 , \quad \text{essendo} \quad R = \sqrt{\frac{l}{c}} , \quad a = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \omega_0 \sqrt{lc} .$$

Se si prende per x_1 un multiplo dispari di $\frac{\lambda_0}{4} \left(x_1 = (2k + 1) \frac{\lambda_0}{4} \right)$, cioè se lo sviluppo del filo corrisponde ad un numero dispari di mezze lun-

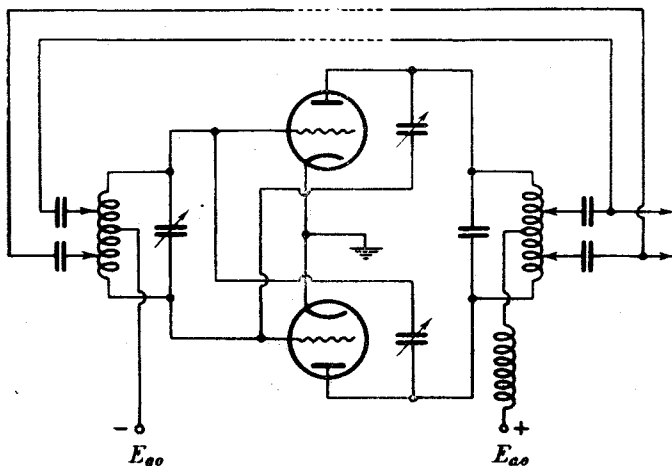



Fig. 284

ghezze d'onda, si avrà $X = \infty$ alla pulsazione ω_0 corrispondente a λ_0, mentre, per pulsazioni superiori o inferiori a quella si avrà rispettivamente $X < 0$, $X > 0$. In altre parole, una linea siffatta si comporta esattamente come il sistema (L, C) dianzi considerato.

Quanto all'efficienza β dell'azione regolatrice, da misurarsi al solito col valore per $\omega = \omega_0$ di $-\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{X}\right)$, si ha:

$$\beta = \left(\frac{x_1 \sqrt{lc}}{R \operatorname{sen}^2 a x_1} \right)_{\omega = \omega_0} = c x_1 = c(2k + 1) \frac{\lambda_0}{4} ,$$

essa cioè risulta proporzionale alla capacità unitaria c della linea, e quindi inversamente proporzionale all'induttanza unitaria l.

In particolare, converrà che i fili costituenti la linea stessa siano molto ravvicinati fra loro. A parità di tipo di linea, cioè per dati valori di c e di l, l'efficienza sarà tanto maggiore quanto maggiore è k; vale a dire quanto maggiore è il numero (dispari) di quarti di lunghezza d'onda in essa contenuti.

Su questo principio sono fondati alcuni dipositivi di cui la fig. 284 illustra uno schema (R.C.A.) applicato ad un generatore a due triodi in connessione simmetrica.

Gli alti gradi di stabilità raggiungibili con sistemi dei tipi descritti sono sostanzialmente dovuti al fatto che (analogamente al caso del quarzo) con gli artifici indicati si riesce a restringere la gamma delle pulsazioni capaci di soddisfare all'equazione fondamentale (18), e quindi la pulsazione di funzionamento si trova, per così dire, costretta a non uscire da una tale ristretta gamma.

In maniera affatto generale, la valutazione quantitativa del grado di stabilità di un dato sistema oscillatore a tre punti potrà farsi assumendo per sua misura il rapporto fra la variazione δp di uno dei parametri incontrollabili del sistema (variazioni di carico, variazioni di r_p, ecc.), che genericamente indichiamo con p, e la conseguente variazione $\delta\omega$ della pulsazione di funzionamento. Ora, quest'ultima, che indicheremo con ω_0, è una ben determinata funzione dei parametri p, definita implicitamente dall'equazione (18); e, come l'Analisi insegna, ogni rapporto come $\dfrac{\delta p}{\delta\omega}$ è a dedursi dall'equazione

$$\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)_0 \delta p + \left(\frac{\partial F}{\partial \omega}\right)_0 \delta\omega = 0\,,$$

dove F rappresenta il primo membro della (18) e l'indice 0 sta ad indicare che le derivate sono calcolate per $\omega = \omega_0$. Si ha dunque che, a parità di $\left(\dfrac{\partial F}{\partial p}\right)_0$ (cioè a parità di dipendenza di F dai singoli parametri caratterizzanti il sistema) e di δp, la stabilità è proporzionalmente misurabile con la $\left(\dfrac{\partial F}{\partial \omega}\right)_0$. Più esattamente, si potrà dire che la variazione relativa di stabilità — cioè, in fondo, la *azione stabilizzatrice* — conseguibile con una data modificazione della struttura del sistema sarà misurata da

$$\frac{\left(\dfrac{\partial F_1}{\partial \omega}\right)_0 - \left(\dfrac{\partial F}{\partial \omega}\right)_0}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial \omega}\right)_0}\,,$$

dove F_1 è il modificato valore della espressione F.

Applicheremo tale concetto alla valutazione dell'azione stabilizzatrice ottenibile col seguente ingegnoso artificio (R.C.A.). In un ordinario sistema a tre punti del tipo Hartley, all'applicazione della tensione alla griglia si provvede con l'intermediario di un tronco di linea, di lunghezza corrispondente alla metà della lunghezza d'onda di servizio, e chiuso sulla sua impedenza caratteristica, talchè la linea stessa funzioni in re-

gime progressivo. Siccome, in tali condizioni, la linea stessa determina il rovesciamento della fase della tensione nel passaggio dalla presa (fatta sul circuito anodico) alla immissione fra catodo e griglia, ne consegue la necessità di invertire le connessioni rispetto a quanto richiesto dall'ordinario schema Hartley (il che ovviamente non altera affatto il comportamento del circuito anodico, specie nei riguardi della sua frequenza di risonanza).

Una semplice considerazione di carattere intuitivo mostra agevolmente l'attitudine di un siffatto sistema a reagire contro le eventuali tendenze a mutamenti di frequenza. Si può invero osservare che un fatto accidentale tendente ad es. a diminuire la frequenza, da un lato equivale, all'atto in cui si manifesta, ad un ritardo di fase della tensione ai capi del circuito anodico, mentre d'altro lato determina un *accorciamento* elettrico della linea attraverso la quale si effettua l'eccitazione della griglia: questa viene dunque eccitata in anticipo di fase, e quindi coopera efficacemente a combattere il ritardo conseguente al supposto fatto accidentale.

Nel caso attuale, l'equazione fondamentale (18) si modifica soltanto in ciò, che la tensione fittizia $\mu \mathbf{Z}_1 \mathbf{I}_2$ agente nel ramo equivalente al tubo (fig. 275) deve moltiplicarsi per un *fattore di fase*, cioè della forma $e^{j\varphi}$ (1), dove

$$\varphi = 2\pi \frac{l}{\lambda}$$

è il valore angolare della lunghezza geometrica l della linea interposta fra il circuito di griglia e la relativa presa anodica, mentre λ è la lunghezza d'onda corrispondente alla effettiva pulsazione ω di funzionamento, della quale appunto si vogliono esaminare le eventuali variazioni.

Alla (18) si sostituisce dunque:

$$(18') \qquad r_p(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3) + (1 + \mu e^{j\varphi})\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3 = 0\,,$$

dove, naturalmente, $\mathbf{Z}_1$ rappresenta ora l'impedenza dell'arco doppio costituito dall'organo collegante i punti di presa per la tensione di griglia e dell'impedenza caratteristica $\mathbf{Z}_0$ della linea di adduzione. Nei casi concreti, essendo il modulo di $\mathbf{Z}_0$ sensibilmente maggiore di quello di $\mathbf{Z}_1$, quest'ultima non riesce praticamente alterata dalla presenza di $\mathbf{Z}_0$.

Se, per semplificare, trascuriamo le resistenze serie delle impedenze $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{Z}_3$, la (18') si riduce a

$$r_p(X_1 + X_2 + X_3) - j(1 + \mu e^{j\varphi})X_1X_3 - jX_2X_3 = 0\,,$$

che scriveremo:

$$(24) \qquad r_p(X_1 + X_2 + X_3) - j\left(1 - \mu e^{j\pi\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}}\right)X_1X_3 - jX_2X_3 = 0$$

(1) Si suppone trascurabile lo smorzamento della linea di connessione, per il che è necessario che questa presenti bassa resistenza ohmica e non irradii.

per mettere in evidenza che la lunghezza l della linea è tale che per una certa pulsazione ω_0, cui corrisponde $\lambda = \lambda_0$, si ha $2l = \lambda_0$, per cui è:

$$\varphi = \pi \frac{\lambda_0}{\lambda} = \pi \frac{\omega}{\omega_0} = \pi + \pi \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} .$$

Uguagliando a zero separatamente le parti reali e le immaginarie, la (24) fornisce le relazioni:

$$r_p(X_1 + X_2 + X_3) - \mu X_1 X_3 \operatorname{sen} \pi \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = 0 , \tag{25}$$

$$X_1 \left(1 - \mu \cos \pi \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}\right) = - X_2 ,$$

mentre, in assenza della linea di connessione (schema Hartley ordinario), si avrebbe:

$$r_p(X_1 + X_2 + X_3) = 0 . \tag{25'}$$

Da questa si deduce che, nei limiti di approssimazione supposti, la pulsazione ω_0 sarebbe quella di risonanza del sistema anodico, alla quale riterremo pertanto commisurate le lunghezze della linea di connessione, per modo che, per $\omega = \omega_0$, la prima delle (25) si riduce alla (25′); mentre la seconda fornisce la relazione:

$$(\mu - 1)X_1 = X_2 , \qquad \text{cioè} \qquad \mu X_1 = X_1 + X_2 ,$$

sicchè, detti L e C il valore dell'intera induttanza anodica e della capacità del ramo X_3, cioè posto

$$X_1 + X_2 = L\omega_0 , \qquad X_3 = - \frac{1}{C\omega_0} ,$$

sarà

$$X_1 = \frac{L\omega_0}{\mu} .$$

Seguendo il nostro criterio generale, sarà da porre:

$$F \equiv r_p(X_1 + X_2 + X_3) , \quad F_1 \equiv r_p(X_1 + X_2 + X_3) - \mu X_1 X_3 \operatorname{sen} \pi \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} .$$

Osserviamo poi che si ha:

$$\left(\frac{\partial(X_1 + X_2)}{\partial\omega}\right)_0 = L , \quad \left(\frac{\partial X_3}{\partial\omega}\right)_0 = \frac{1}{C\omega_0^2} = L \qquad (\text{a causa di } LC\omega_0^2 = 1);$$

quindi:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial\omega}\right)_0 = 2r_pL , \quad \left(\frac{\partial F_1}{\partial\omega}\right)_0 = 2r_pL - \frac{\pi}{\omega_0}\mu(X_3)_0(X_1)_0 =$$

$$= 2r_p L + \frac{\pi}{\omega_0}\mu (X_1 + X_2)_0(X_1)_0 = 2r_pL + \pi L^2\omega_0 ,$$

e pertanto l'azione stabilizzatrice dovuta all'artificio adottato vale:

$$\frac{\pi L^2 \omega_0}{2 r_p L} \cong 10 \frac{L f_0}{r_p} ,$$

essendo $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$. L'artificio stesso riesce dunque tanto più utile quanto più elevata è la frequenza.

D) Generatori in cascata.

43. - Generalità. — Non sempre un generatore a triodi è destinato a forti erogazioni di potenza. Ad es. nel caso di un generatore ad autoeccitazione, è bene che ciò non avvenga, sopratutto affinchè le inevitabili variazioni di carico dovute al servizio di utilizzazione non abbiano a ripercuotersi sul valore della frequenza.

Si presenta allora il problema dell'accoppiamento del generatore ad altro precedente, il che viene in generale fatto connettendo i due *in cascata,* cioè in modo che la tensione eccitatrice del circuito di griglia del seguente sia ricavata dal circuito anodico del precedente. Si perviene così dalla prima tensione eccitatrice all'effettivo sistema di carico attraverso alcuni « stadi » aventi quasi esclusivamente l'ufficio di amplificatori di tensione. Si è detto *quasi,* sia perchè, come sappiamo, non può mai ritenersi rigorosamente nullo il carico di un generatore che alimenta un circuito di griglia, anche quando il funzionamento avvenga in classe A, sia perchè non è escluso che alcuni stadi possano funzionare in classe B o C, cioè con sensibili erogazioni da parte del generatore che eccita la corrispondente griglia.

Pertanto, con riferimento alla utilizzazione indicata, tali sistemi più complessi potranno essere correttamente considerati e denominati « amplificatori ».

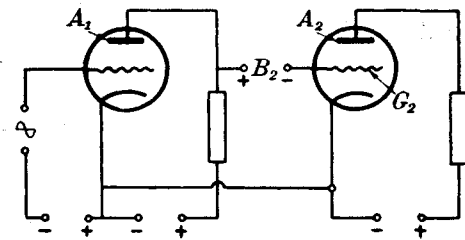



Fig. 285

44. - Accoppiamenti a resistenza e controbatteria. — Il più semplice mezzo per ottenere l'accoppiamento in cascata di due generatori a triodi è quello di eccitare la griglia del secondo triodo con la tensione ricavata ai capi di un apparecchio di carico inserito nel circuito anodico del primo.

Senonchè, siccome tale tensione si compone in generale di una parte fissa, e di una parte variabile e_{a1}, che sola ci interessa, occorrerà provvedere ad eliminare la prima.

Ciò può farsi (fig. 285) inserendo fra la griglia G_2 del secondo tubo e l'anodo A_1 del primo una sorgente B_2 (detta *controbatteria*) di f. e. m. tale da annullare la predetta parte fissa della tensione e conferire contemporaneamente alla griglia G_2 la necessaria polarizzazione negativa rispetto al suo catodo. Quanto agli anodi, essi potranno essere alimentati, sia con sorgenti separate, sia con una sorgente unica, come indicato nella fig. 286.

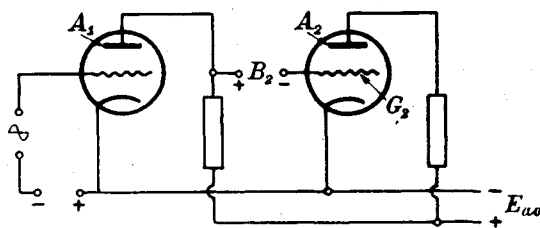



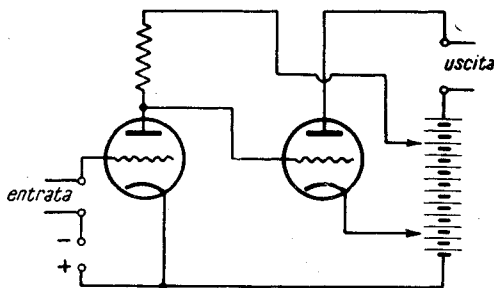
Fig. 286

Un tale dispositivo si presta ad amplificare tensioni di entrata di frequenza qualsivoglia; anche *quasi nulla*. Esso può trovare quindi applicazione anche nel campo delle misure, in quanto consente di ritrovare ai capi del carico anodico del secondo tubo una tensione che riproduce, attraverso due successivi ingrandimenti, la tensione applicata alla prima griglia. Se ad es. questa tensione fosse dell'ordine dei mV e le amplificazioni di tensione ricavate dal 1° e dal 2° sistema fossero rispettivamente 30 e 40, ai capi del carico anodico del secondo tubo si ritroverebbero 1,2 volt per ogni mV d'entrata.

Lo stesso risultato può conseguirsi (fig. 287), pur connettendo direttamente l'anodo del primo tubo con la griglia del secondo, a condizione che la tensione del catodo del secondo triodo venga di tanto elevata, di quanto col sistema di fig. 285 si sarebbe abbassata quella della griglia.

Naturalmente però, così facendo, occorrerà disporre, per l'alimentazione del secondo anodo, di una tensione uguale alla somma di quella effettivamente occorrente fra anodo e catodo e di quella attribuita al catodo (fig. 287).

Fig. 287

Un tale tipo di accoppiamento (Loftin e White), al pari del corrispondente di fig. 285, è particolarmente indicato per tensioni di entrata a variazione lenta (quasi continue o di bassa frequenza).

45. - Accoppiamento a resistenza e capacità. — In generale però le tensioni da amplificare hanno variazioni alternative con frequenze che possono variare da poche centinaia o migliaia (audiofrequenze) alle centinaia di migliaia o milioni (radiofrequenze).

In tale ultimo caso il sistema descritto consente una semplificazione notevole nel senso che alla batteria B_2 si può vantaggiosamente sostituire un condensatore C. Tale condensatore, per effetto della corrente di griglia (che necessariamente si verifica nel secondo triodo nei primi istanti di funzionamento, anche in assenza della tensione eccitatrice), va a caricarsi in guisa da sopportare la componente costante della tensione anodica del primo tubo, cioè quella tensione che poi, anche in presenza della eccitazione e_{g1}, si avrà in aggiunta alla parte variabile e_{a1} che soltanto ci interessa di riportare alla griglia G_2. In sostanza dunque il condensatore C tiene il posto della precedente batteria di polarizzazione B_2. Se non che, al sopraggiungere degli impulsi alternativi della tensione e_{a1}, ra-

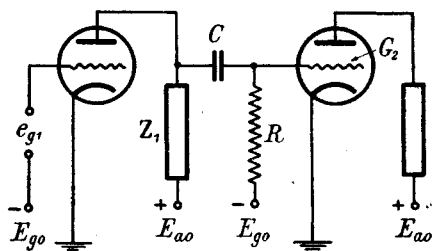



Fig. 288

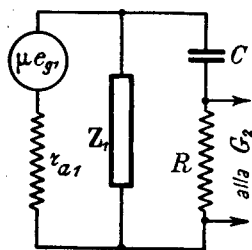



Fig. 289

gionando come al n. 31, si vede subito che la polarizzazione aumenterebbe, senza potere poi all'occorrenza diminuire, per modo che, se uno degli impulsi e_{a1} avesse una elongazione positiva di ampiezza notevole, la seconda griglia potrebbe trovarsi, a partire da quel momento, polarizzata troppo negativamente, sì da compromettere o almeno radicalmente modificare il funzionamento del secondo triodo.

A ciò si può ovviare disponendo una conveniente resistenza R in serie con la sorgente adibita alla polarizzazione della griglia G_2 (fig. 288).

Il circuito differenziale equivalente ad un tale sistema si presenta come alla fig. 289, dall'esame della quale si deduce immediatamente la utilità che R e C siano così commisurati che la reattanza $\frac{1}{C\omega}$ assorba una minima porzione della tensione variabile esistente ai capi di $\mathbf{Z}_1$, talchè risulti il più vicina possibile ad e_{a1} la porzione rimanente, che viene a localizzarsi ai capi di R, in quanto che è proprio questa la tensione che viene effettivamente applicata alla griglia G_2. Ciò porta ad assumere valori di R e C tali che il rapporto $RC\omega$ fra la resistenza R e la reattanza $\frac{1}{C\omega}$ sia molto grande. Ed è importante rilevare che ad affermare tale necessità si è anche condotti considerando che la costante di tempo RC deve essere abbastanza elevata in confronto del periodo corrispon-

dente alla minima pulsazione prevedibile, acciocchè nell'intervallo fra due successive alternanze positive il condensatore possa liberarsi della carica supplementare pervenutagli in conseguenza della precedente.

Il dispositivo descritto equivale sostanzialmente a shuntare la $\mathbf{Z}_1$ con R. Di ciò occorre tenere conto nel computo della amplificazione di tensione ottenuta col primo triodo, giacchè se ad es. il carico $\mathbf{Z}_1$ è una resistenza R_1, l'amplificazione stessa si commisurerà, secondo la (3), ad $\frac{RR_1}{R + R_1}$ anzichè ad R_1. Se però come in generale avviene, è $R \gg R_1$, la differenza tra i due risultati è esigua.

Per es. per $R_1 = 100\,000\ \Omega$ ed $R = 400\,000\ \Omega$, si avrebbe $\frac{RR_1}{R + R_1} = 80\,000\ \Omega$; quindi, nel caso di un triodo avente $\mu = 30$ e $r_a = 25\,000\ \Omega$, l'amplificazione A risulterebbe:

$$\frac{30 \cdot 80\,000}{80\,000 + 25\,000} = 22{,}9\ ,$$

anzichè:

$$\frac{30 \cdot 100\,000}{100\,000 + 25\,000} = 24\ .$$

Quando il carico $\mathbf{Z}_1$ è costituito da una resistenza R_1, il tipo di accoppiamento così descritto, viene correntemente chiamato « a resistenza [1] e capacità ».

La trattazione precedente dà una visione sufficientemente esatta del suo funzionamento finchè la frequenza è limitata, ma, nel caso di alte frequenze, non si può prescindere da alcuni elementi secondari, che alle basse frequenze avrebbero trascurabile importanza.

Vogliamo cioè alludere alla capacità distribuita che in misura maggiore o minore accompagna sempre una resistenza come R_1, nonchè alla capacità C_{af} del primo triodo ed a quella di entrata del secondo triodo. Tutte queste capacità, globalmente considerate, costituiscono, per la resistenza R_1, uno shunt la cui importanza è ovviamente tanto maggiore quanto maggiore è la frequenza. Se per es. fosse $\omega = 5 \cdot 10^6$ ($f = 1600$ kHz), e tali capacità valessero complessivamente anche soli $20 \mu\mu$F, la reattanza da esse rappresentata sarebbe di $\frac{10^{12}}{5 \cdot 20 \cdot 10^6} = 10\,000\ \Omega$, e pertanto, in un caso come quello precedentemente considerato, essa prevarrebbe sulla R_1, e quindi, in definitiva, la amplificazione A sarebbe determinata da essa anzichè dalla R_1.

---

[1] Con riferimento alla R_1, e non alla R, la cui funzione è accessoria.

46. - Accoppiamento con impedenza anodica e con circuito anodico accordato. — Alla resistenza R_1 si può sostituire una impedenza costituita da una reattanza induttiva avente bassa resistenza. Una tale sostituzione, come sappiamo (n. 9), giova a diminuire la tensione occorrente per l'alimentazione anodica, ma presenta, rispetto al dispositivo precedente, l'inconveniente di fornire una amplificazione variabile con la frequenza.

Anzi, per effetto delle capacità parassite (capacità della bobina di induttanza, capacità C_{af} del primo triodo, e capacità d'entrata del secondo), avviene che tale impedenza finisce col diventare un vero e proprio sistema (R, L; C) in parallelo, da cui segue l'esistenza di una frequenza particolare per la quale l'amplificazione sarà più efficiente che per ogni altra.

Si può addirittura costituire il carico anodico con un circuito tipo (R, L; C) in parallelo, e se il condensatore C è a capacità variabile esso potrà venire regolato in guisa da realizzarsi la risonanza per la frequenza di servizio. Si ha così l'amplificatore detto a *circuito anodico accordato* o *a risonanza*.

Con tale dispositivo invero si ottengono parecchi vantaggi:

1º) quello di avere un basso valore della resistenza R' (n. 4) offerta al passaggio della corrente continua;

2º) quello di avere la possibilità di adattare il sistema a più frequenze di lavoro, regolando all'uopo la capacità variabile del condensatore C;

3º) quello di potere non tener conto delle capacità parassite, perchè nella regolazione della capacità del condensatore C, che, come si è detto, deve farsi in guisa da raggiungere la risonanza per la frequenza di servizio, potrà sempre compensarsi l'effetto di esse. All'uopo la regolazione di C verrà fatta in modo da raggiungere soltanto il valore $C_x - C_p$, essendo C_x il valore necessario per la risonanza e C_p quello globale delle capacità parassite.

Fig. 290 a)

Fig. 290 b)

Naturalmente, la amplificazione ottenuta sarà variabile con la frequenza, in quanto con questa varia il valore della resistenza equivalente al circuito di carico.

Il relativo schema è rappre-

sentato in fig. 290 *a*), mentre la fig. 290 *b*) rappresenta il corrispondente circuito differenziale con le relative capacità parassite.

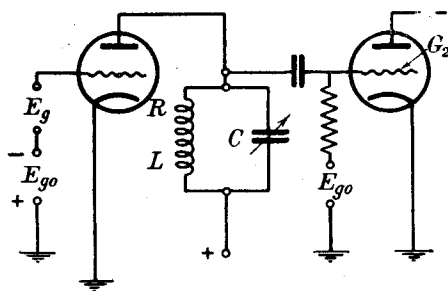
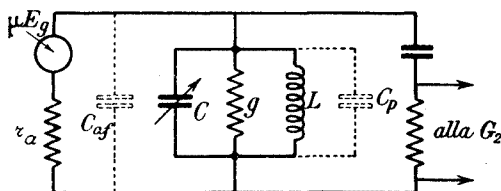



Fig. 291

47. - Accoppiamento con circuito accordato sulla griglia. — Se si osserva lo schema di fig. 288, si vede che, a prescindere dal condensatore C, la cui reattanza è trascurabile in confronto di R_1, la funzione delle due resistenze R_1 ed R è simmetrica. Si potrebbe pertanto pensare di scambiare l'una con l'altra, oppure, con riferimento invece allo schema di fig. 290, di scambiare le posizioni del circuito accordato e della resistenza.

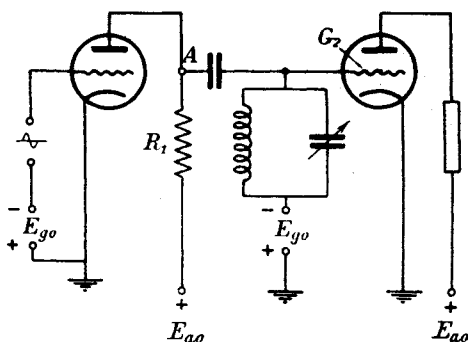
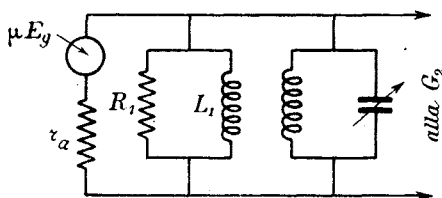
Fig. 292

Si arriva così al tipo di connessione in cascata rappresentato dalla fig. 291, in cui il circuito accordato è inserito fra il catodo e la griglia del secondo triodo.

Occorre però avvertire che se, come è necessario per non diminuire l'efficienza dell'amplificazione, si assegnasse ad R_1 un valore assai elevato, ne conseguirebbe in generale un elevato valore della caduta $R_1 I_{ao}$, per compensare la quale occorrerebbe elevare di molto la tensione di alimentazione.

Pertanto un tale dispositivo viene in pratica modificato nel senso di sostituire alla R_1 una bobina di induttanza, cioè un sistema (L, R) in serie. Se ω è la pulsazione di servizio, tale bobina equivale ad una L_1 ed una R_1 in parallelo misurate da:

$$L_1 = \frac{R^2 + L^2\omega^2}{L\omega^2}, \qquad R_1 = \frac{R^2 + L^2\omega^2}{R},$$

e, se alla stessa frequenza è assai piccolo il fattore di potenza della bobina — cioè è molto grande il valore di $\frac{L\omega}{R}$ — risulterà pure grande la R_1, mentre sarà $L_1 \cong L$. L'elevato valore di R_1 assicura il raggiungimento del nostro scopo, mentre la presenza di L_1 può sempre compensarsi modificando opportunamente il valore della C variabile inserita nel circuito di griglia del secondo triodo, come agevolmente si riconosce esaminando il circuito equivalente, che si presenta come in fig. 292.

48. - Accoppiamento a trasformatore (per alte frequenze). — Degli accoppiamenti sopra descritti, quello a resistenza e capacità è il più adatto per le basse frequenze, gli altri sono quasi esclusivamente impiegabili per frequenze relativamente elevate.

Un altro tipo di accoppiamento assai usato è quello a trasformatore, sia per alta che per bassa frequenza. Nel circuito anodico è cioè inserita una induttanza (primaria) strettamente accoppiata ad un'altra (secondaria) i cui capi sono connessi al catodo ed alla griglia del secondo triodo (fig. 293). Un tale dispositivo, fra l'altro, rende inutile il condensatore di accoppiamento che era invece necessario nei casi descritti nei nn. precc.

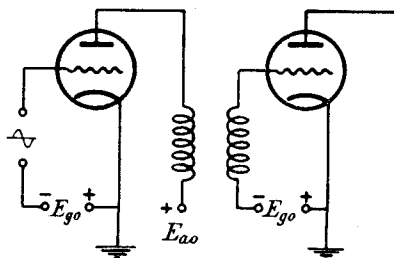



Fig. 293

Teoricamente, con tale apparecchio si potrebbe, aumentando convenientemente il rapporto fra i numeri di spire secondarie e primarie, elevare a piacere la amplificazione; e ciò sarebbe esatto se si potesse pensare che il secondario non influisse sul primario, cioè se si potesse considerare il secondario *aperto*. Ma una limitazione è invece imposta dalla presenza delle capacità parassite, in conseguenza delle quali appunto non è più lecito considerare il secondario come un circuito aperto.

Nel caso di trasformatori per alta frequenza, pei quali ovviamente non si può far uso di nuclei di ferro, per limitare gli effetti delle capacità parassite degli stessi circuiti del trasformatore, e nello stesso tempo ridurre le fughe magnetiche, occorrerebbe disporre ogni spira primaria attigua ad una secondaria, per il che bisognerebbe adottare il valore unitario del rapporto di trasformazione. Sicchè, in definitiva, la funzione del trasformatore si ridurrebbe unicamente a quella di *isolare* il circuito primario dal secondario: l'unico vantaggio sarebbe quello di evitare il condensatore di accoppiamento.

Per rapporti diversi dall'unità occorrerà necessariamente allontanare il primario dal secondario, cioè aumentare le fughe magnetiche, cosicchè, in sostanza, il primario ed il secondario verranno a comportarsi come due circuiti magneticamente accoppiati in modo più o meno lasco. Essi inoltre potranno essere entrambi, o uno solo, accordati sulla frequenza da amplificare.

Si presenta dunque particolarmente interessante ricercare quale sia il valore dell'accoppiamento più favorevole al fine di ottenere la massima amplificazione, cioè il massimo valore del rapporto fra la tensione E_2 d'entrata al secondo triodo e quella E_1 che eccita la griglia del primo.

a) Circuito primario accordato.

Nel caso in cui sia accordato il circuito primario, cioè il sistema di carico anodico del primo triodo, lo schema equivalente si presenta come alla fig. 294, e non si può parlare di accoppiamento ottimo finchè non si conosca il valore attribuibile alla impedenza d'entrata del secondo triodo, la quale costituisce in sostanza il carico del secondario del trasformatore. In prima approssimazione si potrà considerare un tale sistema come se il secondario fosse aperto. Esso allora equivale elettricamente (III, 19) ad uno del tipo descritto al n. 46 (accoppiamento a circuito anodico accordato). Successivamente si cercherà di apportare alla impedenza anodica equivalente una congrua variazione per tenere conto del carico costituito dal circuito di griglia del secondo triodo.

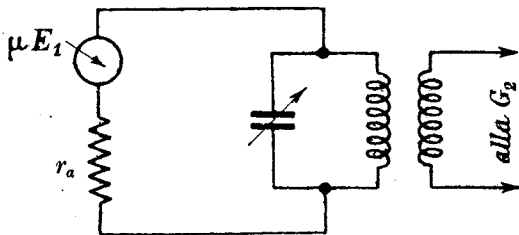



Fig. 294

b) Circuito secondario accordato.

Se invece è accordato il circuito secondario — e questo corrisponde al caso più usato in pratica —, lo schema equivalente si presenterà come alla fig. 295.

In generale, la impedenza della bobina primaria è assai minore di r_a, talchè potremo in prima approssimazione trascurarla. Ciò equivale a ritenere il primario *accordato* su una frequenza *qualunque*, e per tanto equivalente *sempre* ad una resistenza r_a. In tali condizioni, avendo presente quanto a suo tempo fu spiegato (III, 20), si conclude subito che per avere il massimo valore di corrente secondaria, e quindi il massimo valore della tensione E_2, occorre assumere:

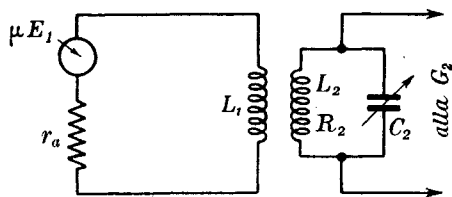



Fig. 295

$$\omega^2 M^2 = R_2 r_a ,$$

essendo $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ la pulsazione di lavoro, alla quale si suppone accordato il circuito di griglia del secondo triodo. E sappiamo anche che in tali condizioni la corrente secondaria si ottiene dividendo per $2\sqrt{R_2 r_a}$ la tensione applicata al primario, cioè la μE_1 (III, 20). La tensione E_2 si

otterrà moltiplicando tale corrente per $L_2\omega$; essa vale dunque:

$$E_2 = \frac{\mu E_1 L_2 \omega}{2\sqrt{R_2 r_a}},$$

da cui si deduce che l'amplificazione massima è misurata da

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\mu L_2 \omega}{2\sqrt{R_2 r_a}} = \frac{\mu}{2\sqrt{r_a}} \cdot \frac{L_2 \omega}{\sqrt{R_2}}.$$

Tale rapporto, oltre che dalle costanti del triodo (primo fattore), dipende, come sempre, dalla frequenza e dalle costanti del circuito (secondo fattore); tuttavia meno di quel che a prima vista appare, in quanto che, a causa dell'effetto pellicolare, la R_2 cresce con la frequenza.

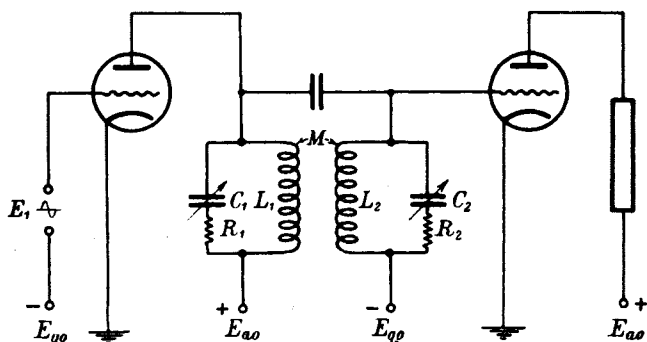



Fig. 296

Per effetto dell'accoppiamento, nel circuito di griglia viene trasferita (nel senso spiegato in III, 24) la resistenza del circuito anodico la quale, per le approssimazioni poste ($R_1 \cong 0$), vale r_a; pertanto la resistenza apparente del circuito di griglia diviene:

$$R_2 + \frac{M^2 \omega^2}{r_a},$$

che, nel caso dell'accoppiamento più favorevole, assume il valore $2R_2$. D'altra parte, siccome abbiamo supposto $L_1\omega \cong 0$, la reattanza non ne riesce sensibilmente alterata, onde si può concludere che l'accoppiamento predetto ha per effetto di raddoppiare la resistenza del circuito di griglia senza modificare gli altri elementi. Ne segue, in particolare, che risulta dimezzato il coefficiente di risonanza e con esso la selettività.

c) Circuito primario e secondario entrambi accordati.

Per le applicazioni è anche importante esaminare il caso in cui tanto il primario che il secondario sono accordati sulla frequenza di lavoro, quantunque la regolazione di un tale sistema sia piuttosto delicata.

Il corrispondente schema è quello disegnato in fig. 296.

Per trovare l'accoppiamento più favorevole, si potrà applicare al solito la formola:

$$\omega^2 M^2 = R_1' R_2 , \tag{20}$$

ma, ricordando (III, 20) in quali condizioni questa fu stabilita, bisognerà trasformare il sistema primario in un circuito del tipo R_1', L_1, C_1 in serie, alimentato da una opportuna f. e. m. Tutto dunque si riduce a calcolare R_1'.

Indichiamo con R_1 la resistenza (in serie) del sistema accordato primario, che potremo (III, 12), senza errore sensibile, ritenere localizzata in uno solo dei due rami, ad es. C_1.

Il circuito differenziale equivalente al sistema triodo-carico si presenta allora secondo lo schema di fig. 297 *a*). Seguendo il metodo indicato

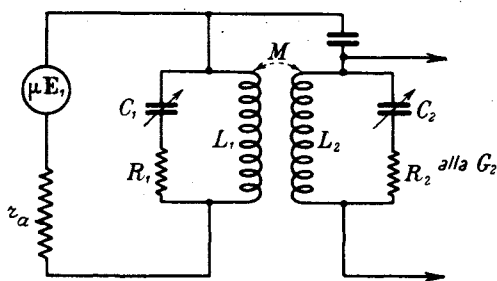
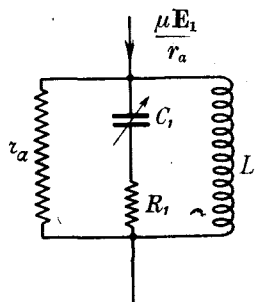



Fig. 297 *a*) Fig. 297 *b*)

in I, 12, possiamo ritenere tale circuito alla sua volta equivalente ad uno alimentato dalla corrente $\frac{\mu \mathbf{E}_1}{r_a}$ e costituito dallo stesso sistema di carico, in parallelo al quale sia disposta una resistenza di valore $r_a = \frac{1}{g_a}$. Questo poi potrà trasformarsi in uno alimentato dalla stessa corrente ed avente due soli rami, uno dei quali è ancora costituito da L_1, ed il secondo differisce dal precedente unicamente in quanto al posto di R_1 si avrà una nuova resistenza R_1', il valore della quale si calcola subito uguagliando le conduttanze dei due sistemi alla risonanza (1), cioè scrivendo:

$$\frac{C_1 R_1'}{L_1} = \frac{C_1 R_1}{L_1} + g_a ,$$

da cui:

$$R_1' = R_1 + \frac{L_1}{C_1} g_a = R_1 \left(1 + \frac{g_a}{g}\right),$$

(1) Riteniamo, per semplicità, che la pulsazione di risonanza sia nei due casi praticamente la stessa, e sensibilmente uguale ad $\frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}$, il che equivale a supporre sufficientemente elevato il coefficiente di risonanza di ciascuno dei due sistemi R_1, L_1, C_1; R_2, L_2, C_2.

essendo g la conduttanza equivalente al sistema primario effettivo, alla pulsazione di risonanza. È questo dunque il valore di R_1' che si deve introdurre nella (25).

Se si vuole calcolare il corrispondente valore del rapporto di accoppiamento, cioè $\frac{E_2}{E_1}$, occorre trasformare ulteriormente il sistema precedente in altro in cui l'alimentazione sia fatta in serie, e ciò allo scopo di poter applicare le formole stabilite in III, 20. A tal fine, osserviamo che, se si scrive $\frac{j\mu \mathbf{E}_1 g_a L_1 \omega}{jL_1\omega}$ al posto di $\mu \mathbf{E}_1 g_a$, si può ritenere il sistema di fig. 297 *b*) dedotto da uno contenente l'elemento L_1 in serie col sistema (r_a; C_1, R_1) ed alimentato da una d. d. p. $j\mu \mathbf{E}_1 g_a L_1 \omega$. Sostituendo questo valore ad $\mathbf{E}_1$ nella predetta formola si avrà allora la corrente secondaria $\mathbf{I}_2$ corrispondente all'accoppiamento più favorevole sopra calcolato, e moltiplicando per $jL_2\omega$ si avrà la tensione $\mathbf{E}_2$ che va ad agire sulla griglia G_2 del secondo tubo.

Il rapporto cercato risulta dunque:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\mu g L_1 L_2 \omega^2}{2\sqrt{R_1 R_2\left(1 + \frac{g_a}{g}\right)}},$$

dove al posto di ω^2 sarà da porre $\frac{1}{L_1 C_1}$ o $\frac{1}{L_2 C_2}$.

49. - Accoppiamento a trasformatore (per basse frequenze). — Per l'amplificazione di frequenze acustiche si possono usare trasformatori a nucleo di ferro. Siccome in questo caso la gamma di frequenze (da 50 a 8000 Hz) è piuttosto estesa in confronto alla sua frequenza media, è particolarmente importante indagare la variazione che l'amplificazione A subisce al variare della frequenza.

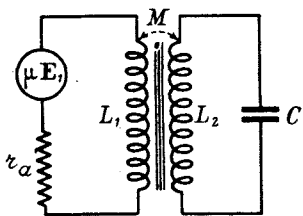



Fig. 298

Riferendoci al circuito differenziale equivalente (fig. 298) in cui la capacità parassita C è supposta concentrata in derivazione ai capi del secondario, le formole fondamentali, ritenendo trascurabili le resistenze degli avvolgimenti, si scrivono:

$$\mu \mathbf{E}_1 = (r_a + jL_1\omega)\mathbf{I}_1 + jM\omega \mathbf{I}_2 ,$$

$$E_2 = jM\omega \mathbf{I}_1 + j\omega L_2 \mathbf{I}_1 \qquad (\mathbf{I}_2 = -j\omega C \mathbf{E}_2) ,$$

da cui, eliminando $\mathbf{I}_1$ ed $\mathbf{I}_2$ e scrivendo $k\sqrt{L_1L_2}$ in luogo di M, si deduce:

$$\frac{\mathbf{E}_2}{\mathbf{E}_1} = \frac{\mu k\sqrt{L_1L_2}}{L_1(1-(1-k^2)\omega^2L_2C) - j\,\frac{r_a}{\omega}\,(1-\omega^2L_2C)},$$

che potremo scrivere:

$$\frac{\mathbf{E}_2}{\mathbf{E}_1} = \frac{\mu k\sqrt{L_1L_2}}{L_1\left[1-(1-k^2)\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right] - j\,\frac{r_a}{\omega}\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)},$$

avendo indicato con ω_0 la pulsazione di risonanza del secondario a primario aperto, cioè $\omega_0^2 = \frac{1}{L_2C}$. La amplificazione A, secondo la (3′), vale:

$$\frac{\mu k\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}}{\sqrt{\left[1-(1-k^2)\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \frac{r_a}{(L_1\omega)^2}\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2}}.$$

Affinchè essa sia sensibilmente indipendente da ω occorre che, per tutte le frequenze che ci interessano, $(1-k^2)\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$ sia trascurabile in confronto dell'unità e che $\frac{r_a}{L_1\omega}$ sia molto piccolo.

Bisognerebbe pertanto che si avesse:

$$\sqrt{1-k^2} \leqslant \frac{\omega_0}{\omega_{max}}, \qquad r_a \leqslant \omega_{min} L_1 .$$

Alla seconda condizione si potrà sempre soddisfare costruendo il primario con induttanza elevata in relazione alla r_a del triodo, ma la prima invece impone al trasformatore delle condizioni cui non è facile soddisfare. In generale il trasformatore avrà fughe magnetiche ($k < 1$) ed una capacità parassita relativamente elevata, per modo che ω_0 raramente riesce a superare poche migliaia di Hz. Ne segue che, per un dato valore di C, bisognerebbe che k fosse assai prossimo all'unità; cioè che il trasformatore fosse quasi senza dispersione.

Se si potesse fare $k = 1$, la capacità C non sarebbe dannosa, viceversa se si potesse fare $C = 0$ sarebbero tollerabili anche forti dispersioni magnetiche.

Come risulta dalla teoria generale dei trasformatori, che a suo tempo (III, 27) abbiamo esteso ad una qualunque coppia di circuiti accoppiati induttivamente, occorre sempre tener presente che la presenza di una connessione trasformatorica equivale a *riportare* in uno dei due circuiti

gli elementi dell'altro, debitamente ridotti in termini del primo. In particolare quindi, nel caso attuale, lo studio del comportamento del triodo potrà farsi ritenendo il carico anodico costituito dal circuito equivalente al trasformatore. Così, se il secondario di questo è caricato con una resistenza R di valore sensibilmente inferiore alla reattanza del circuito di eccitazione del trasformatore (El., XIII, 3), si potrà, trascurando le resistenze degli avvolgimenti e le dispersioni, ritenere il trasformatore stesso sostituito con una resistenza uguale al valore di quella, ridotta a primario, cioè $R\frac{n_1^2}{n_2^2}$ dove n_1, n_2 sono i numeri di spire del primario e del secondario.

Se ad es. il generatore di cui si tratta funziona in classe A, e si vuole, con una data ampiezza della tensione eccitatrice di griglia, ricavare da esso la massima potenza, occorre, come sappiamo (n. 7), caricarlo con una resistenza R uguale alla r_a del triodo. Orbene, se invece si dispone di una R' diversa, la considerazione precedente ci permette di asserire che lo scopo sarà ugualmente raggiunto inserendo R' sul secondario di un opportuno trasformatore, che per semplicità supporremo, come sopra, perfetto, cioè senza dispersione e senza perdite. Uguagliando a r_a la resistenza di carico ridotta a primario, cioè scrivendo:

$$R'\frac{n_1^2}{n_2^2} = r_a\,,$$

si ottiene

$$n_1 : n_2 = \sqrt{r_a} : \sqrt{R'}\;;$$

dalla quale relazione resta determinato il rapporto $n_1 : n_2$ di trasformazione.

CAPITOLO DECIMOSECONDO

MODULAZIONE E RIVELAZIONE

1. - Grandezze modulate. — Una grandezza alternativa sinusoidale — quale potrebbe essere una corrente, una tensione, un flusso magnetico, un campo elettrico o magnetico, ecc. — è definita dalle tre costanti A, ω, φ che nella sua espressione generale

$$A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

rappresentano rispettivamente l'ampiezza, la pulsazione e la fase.

Quando una di queste tre grandezze, anzichè costante, sia variabile col tempo, si dice che si ha a che fare con una grandezza *modulata.* E si parlerà di modulazione in ampiezza, in frequenza, o in fase, a seconda che l'elemento variabile è A, ω o φ (1).

Qui ci limiteremo a considerare il primo tipo di modulazione, cioè a studiare una grandezza a la cui variazione nel tempo è definita da una espressione come la:

$$a = f(t) \operatorname{sen} \omega t \,, \tag{1}$$

dove ω è costante, e alla fase φ si è attribuito il valore nullo, come sempre è possibile scegliendo opportunamente l'origine dei tempi.

Più propriamente, converrà imporre alla funzione $f(t)$ la condizione di essere sempre positiva, acciocchè essa possa intendersi rappresentare, in certo modo, il valore dell'ampiezza. Diciamo «in certo modo» perchè, non potendosi più parlare di funzione sinusoidale, la considerazione dell'ampiezza non ha, a rigore, un senso determinato.

---

(1) Una tale distinzione non può però farsi in modo netto. Se ad es. si suppone che ω sia una certa funzione del tempo e φ costante, si potrà sempre scrivere:

$$\omega t + \varphi = \Omega t + \Phi$$

con Ω costante e Φ variabile col tempo; dal che si conclude che una grandezza modulata in frequenza può invece considerarsi modulata in fase e viceversa, ecc.

Però, dall'uno all'altro modo di considerare una *stessa* funzione, varia la funzione modulante (la cui definizione è data a pag. seg.), la quale nel primo caso è ω, nell'altro è Φ. Ed in generale tali due funzioni non avranno neppure caratteri analoghi; ad es. se una di esse è periodica, non sarà tale l'altra.

Pur tuttavia, in molti casi può essere utile parlare di ampiezza variabile, ma si tratta di una pura convenzione, tanto più accettabile quanto meno rapida è la variazione di $f(t)$ in confronto a quella di sen ωt. E a tal proposito è anche da rilevare che nelle applicazioni non mancano casi, e taluni anzi molto importanti, in cui avviene l'opposto.

In generale, ricordando la nota rappresentazione cinematica della successione dei valori di una grandezza alternativa, si può dire che i valori di una grandezza alternativa modulata non sono altro che le proiezioni su un asse fisso di un segmento il quale ruota con velocità angolare ω attorno ad un suo estremo mentre va variando di ampiezza secondo la legge definita dalla *funzione modulante* $f(t)$.

La considerazione di tali grandezze sorge, nella tecnica delle comunicazioni, in relazione alle applicazioni per le trasmissioni di segnali (telegrafici, telefonici) [1].

I segnali telegrafici, come è noto, si trasmettono per via elettrica inviando in circuiti all'uopo predisposti delle correnti, in generale di intensità costante I, ma interrotte con ritmi determinati, cioè delle correnti la cui intensità è una funzione $f(t)$ del tempo suscettibile dei soli valori I e 0. La trasmissione elettrica del suono (della parola o della musica) è affidata invece a correnti elettriche la cui intensità, con opportuni apparecchi (microfoni), viene fatta variare con legge riproducente — più o meno esattamente — quella con la quale si compiono le vibrazioni del mezzo in cui i suoni si producono.

Nell'uno e nell'altro caso si ha a che fare con delle correnti variabili nel tempo secondo una certa legge $f(t)$, ed alla ricezione si provvede a trasformare tali correnti in impulsi meccanici capaci di riprodurre il ritmo dei segnali (telegrafo) o le vibrazioni del mezzo. In considerazione di ciò, la funzione modulante $f(t)$ verrà chiamata talvolta « funzione di segnale » od anche semplicemente « segnale » [2].

Nelle ordinarie trasmissioni di tale tipo, per via elettrica su condutture, la corrente che trasporta il segnale può chiamarsi una corrente *continua, modulata* secondo la legge determinata dal segnale stesso. È questo un modo abbreviato ed espressivo per dire che la corrente non è continua, ma ha una legge $f(t)$ di variazione nel tempo del tipo rappresentato nelle figg. 299 *a*) e *b*), di cui la prima si riferisce ad una serie di punti e linee (.. — ...), la seconda alla corrente telefonica corrispondente a una nota musicale pura (sinusoide semplice). Tali tipi di correnti possono in effetto chiamarsi modulate — nel senso precedentemente stabilito — in quanto che le corrispondenti leggi di variazione si possono ritenere dedotte dalla (1) supponendo che, essendo ω infinitamente piccola,

---

[1] Od anche di altra natura, come ad es. per le trasmissioni di immagini e per la televisione.

[2] Spesso si dà il nome di *segnale* anche alla stessa grandezza modulata.

sia $f(t) = \frac{A}{\omega t}$ per la prima (per ogni intervallo in cui l'ordinata ha il valore costante A) ed $f(t) = \frac{B \operatorname{sen} \Omega t}{\omega t}$ per la seconda, dove B è costante ed Ω è la pulsazione della curva di fig. 299 *b*).

Nel caso definito dalla (1), con ω finito, si avrà un *supporto* rappresentato da una grandezza alternata di pulsazione ω, la quale appunto prende il nome di pulsazione *portante* o *vettrice*. Così le figg. 299 *c*) e *d*) mostrano il risultato della modulazione di un tale supporto mediante le funzioni definite da *a*) e da *b*) rispettivamente, avvertendo che alla seconda, per rendere soddisfatta la condizione $f(t) \geq 0$, si è preventivamente aggiunta una conveniente costante A_0.

Fig. 299 *a*) Fig. 299 *b*)

Fig. 299 *c*) Fig. 299 *d*)

La importanza di queste considerazioni appare manifesta se si pensa che, attribuendo ad ω un valore corrispondente a frequenze r. t., una corrente del tipo (1) diviene trasmissibile per via radio, mentre ciò non sarebbe possibile per la sola $f(t)$.

In generale la funzione $f(t)$ verrà meccanicamente o elettricamente costruita mediante i processi di manipolazione o di trasformazione dei suoni in correnti o tensioni elettriche, mentre alla costruzione di quelle del tipo sen ωt si provvede nei modi indicati nel Cap. prec.

Si pongono pertanto due problemi fondamentali:

1°) quello della *modulazione* di una grandezza elettrica (corrente o tensione) avente frequenza r. t., il quale può enunciarsi con la richiesta della costruzione del prodotto di $f(t)$ e sen ωt, dati che siano — in forma elettrica — i fattori;

2°) quello della *rivelazione*, talvolta — quantunque impropriamente — detta *demodulazione*, mediante il quale, data una grandezza come la (1), si chiede di *separare* il fattore $f(t)$ dal prodotto $f(t)$ sen ωt.

2. - Modulazione mediamente lenta. — Ci riferiremo ora più praticolarmente al caso in cui $f(t)$ ha, rispetto a sen ωt, variazione *mediamente*

lenta. Per es., così intenderemo una variazione di tipo periodico, il cui periodo sia sensibilmente superiore a $\frac{2\pi}{\omega}$, ancorchè nella costituzione di $f(t)$ possano entrare delle armoniche di frequenza relativamente elevata. Così pure potrà chiamarsi mediamente lenta una variazione del tipo fig. 299 *a*), quantunque la derivata di $f(t)$ sia infinita nei punti come A, B, C, perchè, in tutti gli intervalli AA, BB, CC,..., la derivata stessa è nulla. E altrettanto potremo dire nel caso che $f(t)$ sia del tipo esponenziale $e^{-\alpha t}$ con $\alpha > 0$ (quantunque per valori di t prossimi a zero la $\frac{df}{dt} = -\alpha e^{-\alpha t}$ possa anche avere valori molto grandi), quando l'intervallo considerato sia sufficientemente grande in confronto a $\frac{2\pi}{\omega}$. In particolare, potrà ritenersi mediamente lenta la funzione corrispondente a treni d'onde smorzate ad alta frequenza (Cap. X) che si susseguono ad intervalli di tempo τ, quando τ è grande in confronto alla durata dell'oscillazione d'a. f.; e così via.

3. - Caso particolare della modulante sinusoidale. - Profondità di modulazione. - Potenza. — Nelle applicazioni, quasi sempre si ha a che fare con funzioni modulanti $f(t)$ che, almeno per un tempo relativamente pic-

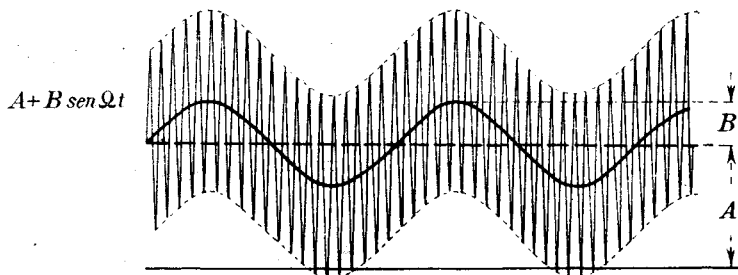



Fig. 300

colo, sono periodiche. Si pensi, ad es., ad una corrente fonica, che, come è noto, corrisponde in generale ad una variazione sinusoidale, o meglio ad una sovrapposizione di più correnti di tale tipo, costituenti un certo gruppo per un breve tempo, un certo altro gruppo per un altro breve tempo e così via, i gruppi rappresentando i successivi suoni costituenti la parola o la musica, gli elementi del gruppo i singoli suoni armonici semplici in cui il suono reale si lascia decomporre secondo il teorema generale di Fourier.

Perciò svilupperemo con qualche dettaglio il caso in cui $f(t)$ è funzione periodica armonica semplice di pulsazione Ω, cosicchè, dovendosi poi soddisfare anche alla condizione $f(t) \geq 0$, la (1) assumerà l'aspetto:

$$a = (A + B \operatorname{sen} \Omega t) \operatorname{sen} \omega t \quad \text{con} \quad A \geq B \,. \tag{2}$$

In tal caso si dirà che la pulsazione portante ω è stata modulata con la pulsazione Ω.

A scanso di equivoci, occorre avere bene presente la differenza sostanziale fra la grandezza modulata rappresentata da (2), il cui diagramma corrisponde a quello disegnato in fig. 299 *d*), ed una grandezza che si otterrebbe facendo la somma — anzichè il prodotto — delle due grandezze $A + B$ sen ωt e sen ωt. Il diagramma di una tale somma è rappresentato nella fig. 300; esso può pensarsi ottenuto dalla sinusoide sen ωt deformandone l'asse in guisa da fargli assumere la forma del diagramma di $A + B$ sen Ωt (indicato a tratto pieno), senza alterare le ordinate.

Ed ancora è importante notare che, se pure spesso nel seguito ci riferiremo ad una frequenza di modulazione notevolmente più bassa della frequenza portante, potranno anche incontrarsi i casi più disparati. Se ad es. Ω fosse poco diversa da ω, un diagramma del tipo di fig. 299 *d*) si presenterebbe in modo tale da non potere più scorgere in esso le tracce delle due pulsazioni Ω ed ω, che invece nel caso rappresentato in detta figura sono ben visibili.

Posto $m = \frac{B}{A}$, la (2) si scrive:

$$a = A(1 + m \operatorname{sen} \Omega t) \operatorname{sen} \omega t \,. \tag{2'}$$

Il numero m che, per quanto si è detto, è ≤ 1, misura la così detta *profondità* — o *grado* — di modulazione. Per lo più lo si esprime in unità percentuali p:

$$p = 100\, m = 100 \frac{B}{A} \,.$$

La profondità di modulazione così definita equivale ovviamente al rapporto:

$$m = \frac{a_{max} - a_{min}}{a_{max} + a_{min}} \,,$$

essendo a_{max} e a_{min} i massimi e minimi valori assunti dalla grandezza a durante un periodo della funzione modulante. Quando questa non sia sinusoidale, ma tuttavia periodica, l'espressione scritta può essere assunta come misura della profondità.

Siccome è:

$$2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) \,,$$

la (2') può scriversi:

$$a = A \operatorname{sen} \omega t + \frac{mA}{2} \cos(\omega - \Omega)t - \frac{mA}{2} \cos(\omega + \Omega)t \;; \tag{3}$$

si ha cioè che il valore istantaneo della grandezza a modulata sinusoidalmente è uguale alla somma dei valori istantanei di tre grandezze

sinusoidali semplici di pulsazioni ω, $\omega - \Omega$, $\omega + \Omega$, e di ampiezze A, $\frac{mA}{2}$, $\frac{mA}{2}$ rispettivamente. Se la funzione modulante, pure essendo alternativa di pulsazione Ω, non fosse sinusoidale, basterebbe svilupparla in serie di Fourier per concludere che in luogo della (3) si avrebbe un'espressione del tipo:

$$a = f_1(\omega) + f_2(\omega - \Omega) - f_2(\omega + \Omega) \,, \tag{3'}$$

dove $f_1(\omega)$, $f_2(\omega - \Omega)$ sono simboli di funzioni periodiche *a media nulla* e di pulsazioni rispettive ω, $\omega - \Omega$, mentre $f_2(\omega + \Omega)$ coincide con la $f_2(\omega - \Omega)$ salva la sostituzione di $-\Omega$ ad Ω.

Ritenendo ω multiplo di Ω, la media dei quadrati [1] dell'espressione (3) si calcola facilmente sommando le medie dei quadrati dei tre termini che la compongono [2], e poichè, come è noto, il valor medio del quadrato di una grandezza sinusoidale è la metà del quadrato dell'ampiezza, possiamo dire che la media richiesta vale:

$$\frac{A^2}{2}\left(1 + \frac{m^2}{2}\right).$$

Se si tratta di una corrente, a questo valore è proporzionale la potenza dissipata attraverso una data resistenza, ed anche la potenza irradiata a mezzo di un'antenna avente una data resistenza di radiazione. Tale valore, che in assenza di modulazione sarebbe $\frac{A^2}{2}$, aumenta nel rapporto da uno a $1 + \frac{m^2}{2}$ per fatto della modulazione di profondità m. In particolare, per $m = 1$ (modulazione al 100 % o modulazione *completa*) la potenza sarà $\frac{3}{2}$ di quella che si avrebbe in assenza di modulazione, e correlativamente il rapporto fra i valori efficaci delle correnti corrispondenti sarà $\sqrt{\frac{3}{2}} = 1{,}22$.

4. - Modulazione periodica non sinusoidale. - Bande laterali. — Quando la curva modulante, anzichè una sola pulsazione Ω, ne contiene contemporaneamente diverse Ω_1, $\Omega_2, \ldots$, come sempre avviene nel caso delle trasmissioni foniche, nella (3) compariranno, dopo il primo termine, tante coppie di termini quante sono le pulsazioni Ω_1, $\Omega_2, \ldots$ Si

---

[1] Tale media deve intendersi riferita ad un intervallo comprendente uno o più periodi della modulante e (quindi) anche un numero intero di periodi della portante.

[2] In quanto che le medie dei prodotti a due a due dei termini stessi sono nulle (App., A, 5).

vede dunque che, per una corrente così modulata, riesce interessata tutta una *banda di frequenze* che si estende, dalle due parti della frequenza portante, per una *larghezza* corrispondente al doppio della massima frequenza contenuta nella modulante. Essa costituisce la coppia delle così dette *bande laterali* (rispetto alla portante). Nel caso delle modulazioni foniche ad es., siccome le frequenze che interessano sono all'incirca quelle comprese fra 50 e 6000 Hz (1), la larghezza della banda raggiungerà 12 kHz e quella di ogni banda laterale sarà di 6 kHz.

È assai notevole osservare che l'effetto della modulazione, rispetto alla curva modulante, è, come si vede dalla (3), di « elevare » le frequenze modulanti Ω fino ai valori $\omega - \Omega$ in una delle due bande, $\omega + \Omega$ nell'altra. Se la curva modulante contiene parecchie armoniche Ω_1, $\Omega_2, \ldots$ di ampiezze B_1, $B_2, \ldots$, queste, nella curva modulata, si ritrovano senza alterazione dei rapporti fra le ampiezze, cioè senza *deformazione*, ad onta, che, come s'è detto, le frequenze siano state tutte ugualmente aumentate.

A tale aumento è appunto dovuta la possibilità di trasmissione per via radio dei segnali a bassa frequenza. Infatti, come sappiamo, per frequenze dell'ordine di 50 ÷ 6000 Hz, quali ricorrono nel ritmo dei segnali telegrafici e nella composizione dei suoni udibili, non è a pensarsi ad una tale trasmissione, mentre, scelta per ω una pulsazione sufficientemente elevata, il processo di modulazione consente di *trasformare* la pulsazione Ω del segnale a valori $\omega - \Omega$, $\omega + \Omega$ generalmente trasmissibili per via radio.

Se poi, alla ricezione, si saprà provvedere alla rivelazione, cioè a separare la funzione modulante, ciò equivarrà ad avere nuovamente *abbassata* la pulsazione fino al valore originario.

Questa considerazione consente un suggestivo parallelo fra le trasmissioni di segnali per radio e le ordinarie trasmissioni di energia. In queste, per consentire il trasporto in condizioni tecnicamente soddisfacenti, occorre elevare la *tensione* alla partenza, per poi abbassarla all'arrivo. Nel caso che qui ci occupa, la elevazione richiesta pel trasporto ed il successivo abbassamento per la ricezione, non riguardano la tensione, ma invece la *frequenza*.

5. - Soppressione della portante o di una banda laterale. - Considerazioni sulla sottrazione elettrica. — È chiaro, e del resto uno sguardo alla (3) lo mostra subito, che, per un'onda modulata, il segnale è caratterizzato dalle componenti costituenti le bande laterali e non già dalla por-

(1) La gamma udibile si estende al di là di 6000 Hz, ma per le frequenze più elevate la sensibilità dell'orecchio umano è assai scarsa, per modo che praticamente si può limitare la gamma stessa ai valori indicati.

tante. Si comprende pertanto che qualunque artificio atto a consentire la conservazione dei caratteri delle bande laterali può essere utilmente usato allo scopo di limitare la trasmissione a quanto così risulta strettamente necessario per la ricostruzione del segnale stesso.

Se per es. si sopprimesse il termine a frequenza portante, anzichè una curva come quella di fig. 301 *a*), si avrebbe quella di fig. 301 *b*). D'altra parte, se ω è conosciuta, non sarà difficile ricostruire la curva *a*), purchè si sappia effettuare *elettricamente* la somma di due espressioni come quelle che stiamo esaminando. Ora, una tale operazione è, in linea di principio, assai facile: se si tratta di tensioni, basterà disporle in serie, se di correnti, basterà farle percorrere due rami in parallelo, e considerare la corrente nella parte principale del circuito.

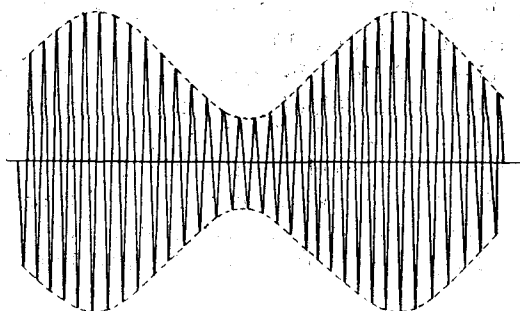
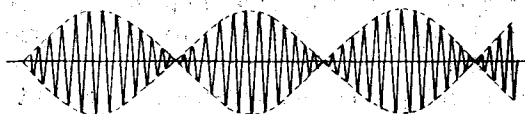



Fig. 301 *a*)

Fig. 301 *b*)

Si comprende quindi la possibilità di realizzare una notevole economia nella trasmissione. Infatti, sopprimendo alla trasmissione l'onda portante, la potenza da irradiarsi varierà nel rapporto $\left(1 + \frac{m^2}{2}\right) : \frac{m^2}{2}$; d'altra parte, alla ricezione, un generatore locale potrà sempre provvedere alla immissione in circuito di una tensione o di una corrente di pulsazione ω (1).

Se si pensa poi che una sola delle bande laterali comprende tutto quanto è atto a caratterizzare il segnale, si può anche pensare di effettuare la trasmissione con una sola delle bande laterali. Il beneficio in potenza non è notevole; nel caso della modulazione al 100 % il rapporto sarebbe soltanto di $(1 + 1/2) : (1 + 1/4)$, cioè 6 : 5, ma si ha il vantaggio di limitare a metà la larghezza totale della banda interessata.

A tale proposito, vediamo come si possano effettivamente realizzare tali soppressioni, cioè come si possa elettricamente eseguire la *sottrazione* dei corrispondenti termini della (3).

Quando una tale sottrazione riguarda due termini aventi frequenze molto diverse, l'operazione si riduce ad una filtrazione assai facile. Se si

(1) In pratica però, come vedremo nel prossimo Capitolo, tale operazione presenta delle difficoltà.

tratta di una tensione, si può avere una corrente che risenta solo della parte a bassa frequenza, facendola agire in un circuito contenente in serie una induttanza tale da costituire elevatissima impedenza per l'alta frequenza, e quasi nulla per la bassa. Ove interessi invece eliminare questa, basterà introdurre una capacità convenientemente dimensionata. Dualmente (I, 10), nel caso di una corrente, basterà invece, nel primo caso, shuntare il tratto di circuito che ci interessa con una capacità, nel secondo con una induttanza.

Questa considerazione ci consente di ritenere risolto il problema della rivelazione non appena avremo appreso a dedurre da una corrente come la (3) una corrente o una tensione somma delle:

$$A + B \operatorname{sen} \Omega t \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen} \omega t\,,$$

ben inteso, a condizione che Ω, ω siano molto diverse fra loro.

6. - Modificazione della pulsazione portante e rivelazione ottenute per mezzo di modulazioni. - Supereterodina (primo metodo.) — Ora, è importante notare che da qualunque processo modulatore se ne può sempre ricavare uno di rivelazione.

Più generalmente dimostriamo che con una modulazione ed una filtrazione del tipo indicato si può realizzare la *variazione della pulsazione portante* da un valore ω ad uno $\omega - \omega'$, sempreché la differenza $\omega - \omega'$ sia sufficientemente diversa dalla somma $\omega + \omega'$.

Infatti, data una funzione $f(t)$, periodica o no, ma a variazione lenta rispetto alle due pulsazioni ω ed ω', si supponga di saper modulare con essa una pulsazione qualunque. Scegliendo la ω, potremo dunque costruire la

$$f(t) \operatorname{sen} \omega t\,.$$

Se, con applicazione dello stesso processo, moduliamo con questa una portante di pulsazione ω', avremo costruito la

$$f(t) \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} \omega' t\,,$$

che, per una nota formola di trigonometria, si può scrivere:

$$\frac{1}{2} f(t) \cos (\omega - \omega')t - \frac{1}{2} f(t) \cos (\omega + \omega')t\,.$$

Per le ipotesi fatte, il primo termine interessa una banda di pulsazioni costituente un intorno di $\omega - \omega'$ e relativamente ristretta rispetto ad $\omega - \omega'$ stessa, mentre il secondo interessa invece una analoga banda attorno ad $\omega + \omega'$. Se, come abbiamo supposto, $\omega - \omega'$ ed $\omega + \omega'$ sono abbastanza diverse, la prima banda sarà molto lontana dalla seconda, e per mezzo di filtrazione si potrà sempre eliminare una delle due, con che la proposizione è dimostrata.

Per es., se $f(t)$ occupa la banda $50 \div 4000$ Hz, ed essendo $\omega = 2\pi \cdot 10^6$ ($\lambda = 300$ m), si assume $\omega' = 2\pi \cdot 7 \cdot 10^5$ ($\lambda = 428{,}57$ m), le bande interessate nei due termini sono la $304\,000 \div 296\,000$ Hz per il primo, la $1\,704\,000 \div 1\,696\,000$ per il secondo.

Un tale processo di modulazione consente dunque di *trasportare* una certa modulazione dalla pulsazione ω alla $\omega - \omega'$ oppure alla $\omega + \omega'$. Esso trova una importante applicazione nei processi di ricezione così detti *a supereterodina*.

Se, in particolare, si suppone $\omega = \omega'$, nel quale caso la condizione che $\omega - \omega'$ sia molto diverso da $\omega + \omega'$ è certamente soddisfatta, la pulsazione portante può farsi passare dal valore ω a *zero*, cioè si realizza la *rivelazione* (1).

7. - Variazione della pulsazione portante per via di somma. - Eterodina. - Supereterodina (secondo metodo). — Vi è un altro modo di effettuare il trasporto di una modulante da una frequenza portante ad un'altra, e precisamente esso è fondato, anzichè su un processo di moltiplicazione (modulazione), su uno di sommazione (sovrapposizione) seguìta da rivelazione, intesa questa come separazione di uno dei fattori da un prodotto.

Per vedere come a ciò possa pervenirsi, giova premettere una semplice formola di trasformazione della somma di due termini sinusoidali, cioè di una somma del tipo:

$$A \operatorname{sen} \omega t + B \operatorname{sen} \omega' t\,.$$

Se è $A > B$, scrivendo $\omega t + (\omega' - \omega)t$ al posto di $\omega' t$, a questa espressione può darsi l'aspetto:

$$A \operatorname{sen} \omega t + B \operatorname{sen} (\omega t + (\omega' - \omega)t)$$

di somma di due grandezze sinusoidali di *uguale* pulsazione ω, ma la cui differenza di fase va *variando* linearmente col tempo secondo la legge $(\omega' - \omega)t$.

Come abbiamo visto a suo tempo (III, 18), il risultato della somma corrisponde ad una specie di sinusoide di ampiezza variabile col tempo come il terzo lato di un triangolo di lati A, B comprendenti fra loro un angolo variabile col tempo secondo la legge lineare $(\omega' - \omega)t$. In altre parole possiamo dire che dalla sovrapposizione di due elementi di pulsazioni ω ed ω', ne sorge un terzo che può riguardarsi di pulsazione ω —

(1) Un tale processo di rivelazione urta però contro difficoltà pratiche, dovute alla necessità che il fattore introdotto con la seconda modulazione sia esattamente di pulsazione ω.

corrispondente cioè a quella della grandezza che ha maggiore ampiezza —, *modulato* secondo la funzione:

$$\sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos(\omega' - \omega)t}\,, \tag{4}$$

la quale è ovviamente periodica con frequenza $\frac{\omega' - \omega}{2\pi}$ (1).

Questa proposizione presenta un particolare interesse quando ω' è poco diverso da ω. In tale caso, dopo rivelazione, si ricava una funzione come la (4), il cui periodo corrisponde alla differenza $\omega' - \omega$: in particolare questo può rientrare nella gamma acustica quando ω ed ω', pur essendo di valore elevato (radiofrequenze), siano sufficientemente vicini.

Su questo principio è fondato il metodo così detto ad *eterodina* per la ricezione acustica di segnali del tipo $A \operatorname{sen} \omega t$, cioè *non modulati*. Per lo scopo, basta evidentemente scegliere ω' in guisa che $\omega' - \omega$ sia compreso nella gamma acustica.

Consideriamo ora una espressione come la (2), equivalente alla (3), e sommiamo ad essa un termine del tipo $C \operatorname{sen} \omega' t$. Il risultato sarà:

$$A \operatorname{sen} \omega t + \frac{B}{2} \cos(\omega - \Omega)t - \frac{B}{2} \cos(\omega + \Omega)t + C \operatorname{sen} \omega' t\,, \tag{5}$$

cui possiamo dare la forma:

$$\left[A \operatorname{sen} \omega t + C \operatorname{sen} \omega' t\right] + \left[\frac{B}{2} \cos(\omega - \Omega)t + \frac{C}{2} \operatorname{sen} \omega' t\right] - \\ - \left[\frac{B}{2} \cos(\omega + \Omega)t + \frac{C}{2} \operatorname{sen} \omega' t\right].$$

Per quanto precede, le tre espressioni fra parentesi quadre equivalgono al prodotto di una funzione alternata di pulsazione ω per le funzioni

$$\sqrt{A^2 + C^2 + 2AC \cos(\omega - \omega')t}\,,\ \frac{1}{2}\sqrt{B^2 + C^2 + 2BC \cos(\omega - \omega' - \Omega)t}\,, \\ -\frac{1}{2}\sqrt{B^2 + C^2 + 2BC \cos(\omega - \omega' + \Omega)t}\,,$$

per modo che, eseguendo una rivelazione (rispetto ad ω considerata come portante), perverremo alla somma di tali tre funzioni. Ora, se immagi-

---

(1) In generale però questa non sarà sinusoidale, perchè lo sviluppo in serie di Fourier del radicale scritto comporterà anche termini di pulsazioni multiple di $\omega' - \omega$; tuttavia ne differirà poco se $\frac{B}{A}$ è abbastanza piccolo. Invero, scritta la precedente sotto la forma:

$$A\sqrt{1 + \left(\frac{B}{A}\right)^2 + 2\frac{B}{A}\cos(\omega' - \omega)t} = A\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{B}{A}\right)^2 + \frac{B}{A}\cos(\omega' - \omega)t + \ldots\right),$$

e trascurando i termini che contengono potenze di $\frac{B}{A}$ superiori alla prima si ha:

$$\sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos(\omega' - \omega)t} \cong A + B\cos(\omega' - \omega)t\,.$$

niamo queste sviluppate in serie di Fourier, il risultato si presenterà sotto la forma:

$$[M + f_1(\omega - \omega')] + [N + f_2(\omega - \omega' - \Omega)] - [N + f_2(\omega - \omega' + \Omega)] =$$
$$= M + f_1(\omega - \omega') + f_2(\omega - \omega' - \Omega) - f_2(\omega - \omega' + \Omega)\,,$$

dove M, N sono costanti, mentre $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$ rappresentano due certe funzioni periodiche di pulsazione α aventi media nulla. Astraendo dal termine costante M, l'ultimo membro ha la forma caratteristica (3'); per-

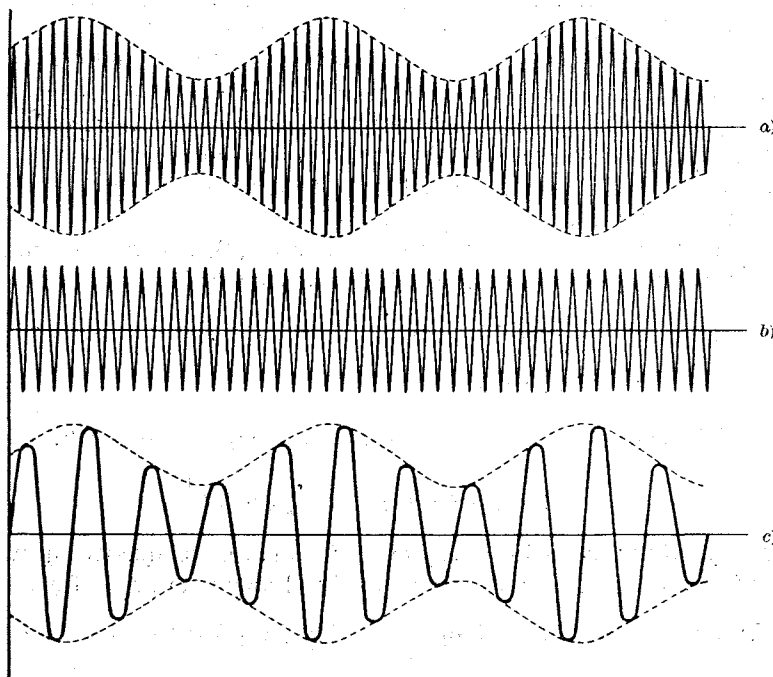



Fig. 302

tanto si conclude che con l'aggiunta di C sen $\omega' t$ seguìta da rivelazione, si è operato la trasformazione della pulsazione portante da ω ad $\omega - \omega'$. La funzione modulante ha ancora la pulsazione Ω, ma, a differenza del caso precedente, la sua forma non sarà in generale perfettamente conservata.

Anche questo procedimento può essere utilizzato per realizzare la ricezione a supereterodina. Esso è illustrato nella fig. 302, dove in *a*), *b*) sono rappresentati i diagrammi di due funzioni, una del tipo $(A + B \text{ sen } \Omega t)$ sen ωt, l'altra del tipo sen $\omega' t$, ed in *c*) è raffigurato il diagramma che può ottenersi dalla somma dei due, dopo avere eliminato le parti riferentisi alle pulsazioni prossime alla $\omega + \omega'$ ed ai suoi multipli.

8. - Rivelatori lineari. — Si chiamano in generale *rivelatori* (o impropriamente *demodulatori*) quei sistemi tali che, entrando in essi con una grandezza modulata, si ha in uscita un elemento che riproduce la funzione modulante. In generale questa non sarà *isolata*, ma gli elementi estranei che l'accompagnano saranno in tali condizioni rispetto ad essa, da potersene agevolmente effettuare la separazione per via di filtrazione.

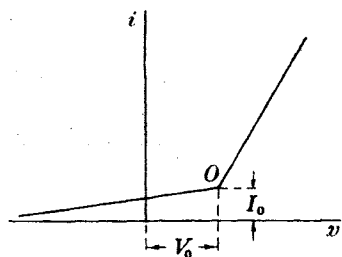



Fig. 303

Se la funzione modulante è una costante, la rivelazione produrrà un elemento costante, cioè, nel caso di correnti (o tensioni), il risultato sarà una corrente (o tensione) *continua*. Ai sistemi rivelatori usati per tale caso, unitamente agli organi che provvedono alla filtrazione, si dà per lo più il nome di *rettificatori* o *raddrizzatori*. Ma, come facilmente si comprende, la rettificazione non è che un caso particolare della rivelazione.

I metodi di rivelazione elettrica usati nella pratica sono tutti direttamente o indirettamente fondati sull'uso di conduttori aventi tratti di caratteristica non rettilinei.

Il tipo di caratteristica non rettilinea che meglio si presta allo scopo è quello formato da due tratti rettilinei a diversa pendenza, aventi in comune un punto O, che potrà anche essere diverso dall'origine delle coordinate v, i (fig. 303). In ogni caso potremo sempre pensare di portare ivi l'origine, applicando preventivamente ai capi del conduttore una tensione V_0 uguale all'ascissa di O, con che si avrà in esso una corrente I_0 uguale all'ordinata dello stesso punto.

Prescindendo da tale operazione, potremo dunque supporre che il punto di divaricazione dei due tratti della caratteristica sia l'origine. Se g_p; g_n sono i coefficienti angolari di tali due tratti, ciò significa che, per una tensione applicata positiva, il conduttore ha carattere lineare con conduttanza g_p, mentre, per tensioni negative, pur avendo ancora carattere lineare, esso si comporta come una conduttanza diversa g_n.

Se ai capi di un tale conduttore applichiamo una tensione v alternativa, il valore medio della corrente i in un periodo sarà diverso da zero. Infatti, per

$$v = V \operatorname{sen} \omega t ,$$

si avrà:

$$i = g_p V \operatorname{sen} \omega t \quad \text{per} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega}, \quad i = g_n V \operatorname{sen} \omega t \quad \text{per} \quad \frac{\pi}{\omega} \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega} .$$

Il valor medio della prima parte è $\frac{2}{\pi} g_p V$, quello della seconda è $-\frac{2}{\pi} g_n V$,

quindi il valor medio i_m della corrente i nell'intero periodo vale:

$$i_m = \frac{1}{\pi} g V , \tag{6}$$

dove si è posto

$$g = g_p - g_n .$$

Siccome questo valore coincide con quello cui si perverrebbe per $g_p = g$, $g_n = 0$, si può dire che, ai fini che ci interessano, il conduttore equivale ad uno avente conduttività *unilaterale*, cioè ad un apparecchio avente conduttanza nulla per tensioni negative, e positiva (ed uguale alla differenza delle due conduttanze g_p e g_n) per tensioni positive. Non si altera dunque la generalità supponendo $g_n = 0$.

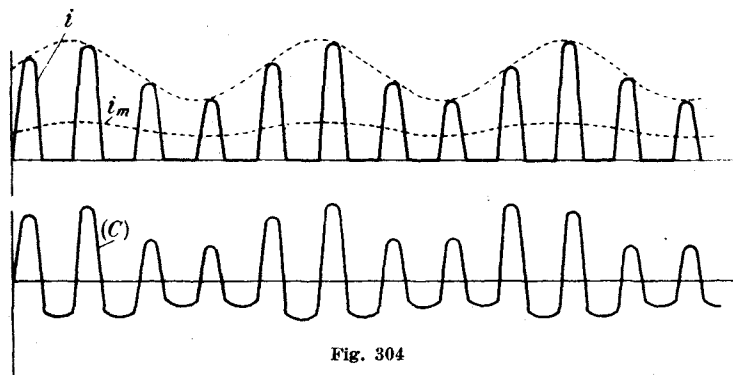



Fig. 304

È evidente che se l'ampiezza V varia col tempo, la intensità della corrente i_m sarà una funzione del tempo proporzionale a V [1]. Invero il diagramma della i (fig. 304) si presenterà come una serie di semisinusoidi di pulsazione ω fra loro raccordate con tratti dell'asse, di lunghezza $\frac{\pi}{\omega}$. L'inviluppo delle creste (o, ciò che è lo stesso, il diagramma delle medie, che differisce da esso per un fattore costante) rappresenta il diagramma di gV, cioè, in scala opportuna, la V stessa.

Un tale diagramma può intendersi ottenuto *sommando* il diagramma della corrente media i_m con una curva (C) che ha pulsazione ω, ed andamento modulato secondo la stessa modulante V. La rispettiva portante non sarà però sinusoidale, tuttavia potrà pensarsi decomposta in termini armonici di pulsazioni ω, 2ω, 3ω,... e quindi la curva (C)

---

[1] Semprechè, bene inteso, le variazioni di V siano così lente rispetto alla pulsazione ω, che si possa ritenere la V sensibilmente costante lungo un periodo dell'alternazione a pulsazione ω.

si decomporrà in termini di pulsazioni:

$$\omega\,,\quad 2\omega\,,\quad 3\omega\,,\ldots,\quad \omega\pm\Omega\,,\quad 2\omega\pm\Omega\,,\quad 3\omega\pm\Omega\,,\quad \ldots,$$

se Ω è la pulsazione di V, supposta sinusoidale.

Si vede quindi che un tale sistema è atto a compiere la funzione rivelatrice, e poichè, a senso della (6), la corrente i_m è proporzionale alla tensione modulante V, esso prende il nome di *rivelatore lineare.*

In pratica si comportano approssimativamente in questo modo i così detti *rivelatori a cristallo.* Certi cristalli di minerali naturali — in ispecie la galena, la pirite, la zincite — o artificiali — come il carborundum — permettono di realizzare contatti i quali sono sempre conduttivi, ma con diversi valori della conduttanza nei due sensi della corrente che li percorre.

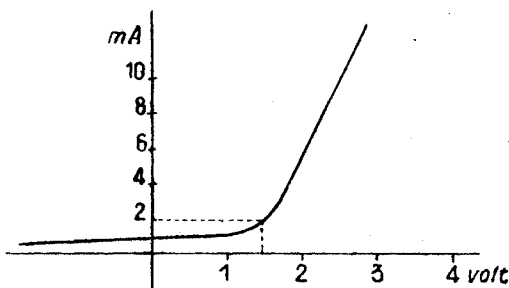



Fig. 305

In generale la loro caratteristica si presenta come in fig. 305. In essa si vede che il raccordo fra i due tratti pressochè rettilinei non è vivo, il che significa che non si ha un vero e proprio *punto di rivelazione*, ma una piccola regione a curvatura molto pronunciata. Assumendo per approssimazione il punto centrale di questa come punto O, si trova che questo può anche essere fuori dell'origine. Nel caso della fig. 305 ad es., esso si trova nel punto $V_0 = 1{,}5$ volt, $I_0 = 2$ mA.

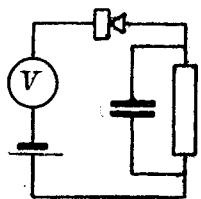



Fig. 306

Se un tale contatto fa parte di un circuito dove, insieme ad una f. e. m. costante uguale a $V_0 + RI_0$, essendo R la resistenza complessiva del circuito, viene inserita una d. d. p. modulata, come la (2), la corrente nel circuito stesso, a prescindere dalla componente costante I_0, sarà del tipo:

$$gV + \cdots,$$

con $V = A + B$ sen Ωt, dove i termini non scritti sono tutti di pulsazioni vicine ad ω ed ai suoi multipli.

Se ω è elevato ed il circuito, come di consueto, comprende un apparecchio di utilizzazione **Z** che potrà essere una resistenza o una impedenza induttiva (ad es. un telefono), basterà shuntare questo con un condensatore di conveniente capacità per ridurre effettivamente la corrente in **Z** al solo termine gV (fig. 306).

I valori della resistenza dei contatti a cristallo sono dell'ordine di 10 000 a 20 000 ohm per il carborundum, di 2000 a 4000 ohm per la pirite e la zincite, da 500 a 1000 ohm per la galena. Questi sono i valori della resistenza nel senso della maggiore conducibilità; e, poichè nel senso opposto la resistenza è molto maggiore, si può ritenere che i valori indicati corrispondano ad $\frac{1}{g}$.

9. - **Rivelatori quadratici.** — Una più cospicua categoria di conduttori non ohmici atti alla rivelazione è costituita da quelli la cui caratteristica presenta uno o più punti in cui la curvatura è più marcata che altrove, come ad es. avviene pel punto O nel caso di fig. 307.

Se $I = f(V)$ è l'equazione della caratteristica, e sviluppiamo in serie la funzione $f(V)$ nell'intorno del punto $O \equiv (V_0;\ I_0)$, si avrà:

$$I = I_0 + (V - V_0)f'(V_0) + \frac{(V - V_0)^2}{2} f''(V_0) + \dots .$$

Poniamo:

$$I - I_0 = i\,, \quad V - V_0 = v\,, \quad f'(V_0) = g\,, \quad f''(V_0) = g'\,,$$

con che i, v rappresentano la corrente e la tensione differenziali, g la conduttanza differenziale in O, g' il valore in O della derivata della conduttanza g considerata come funzione di V.

La precedente allora diviene:

$$i = gv + \frac{g'}{2} v^2 + \dots . \tag{7}$$

Applichiamo una tensione $v = E \operatorname{sen} \omega t$ e andiamo a valutare la corrispondente corrente i. Si avrà:

$$i = gE \operatorname{sen} \omega t + \frac{g'}{2} E^2 \operatorname{sen}^2 \omega t + \dots$$

il cui valore medio i_m in un periodo *non è zero*, ma:

$$i_m = \frac{g'}{4} E^2 + \dots , \tag{8}$$

dove il primo dei termini non scritti sarebbe quello in E^4.

Come si vede, il conduttore considerato gode di proprietà rettificanti, in quanto che, con tensione applicata a media nulla, fornisce una corrente a media diversa di zero.

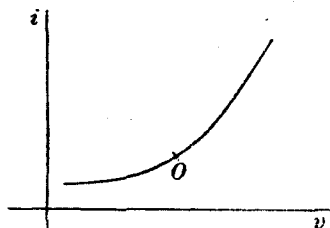
Se la ampiezza E ha variazione lenta, e si mantiene sufficientemente piccola affinchè si possano trascurare i termini non scritti, oppure se nello sviluppo (7) quei termini effettivamente mancano (cioè se la curva $I = f(V)$ è una parabola ad asse parallelo all'asse I), il diagramma di i_m non riprodurrà la forma della funzione E, bensì quella del suo quadrato.

Per tale ragione un organo siffatto prende il nome di *rivelatore quadratico.*

Il significato dell'espressione di i_m è il seguente: se il rivelatore è alimentato da una certa tensione costante V_0, cui corrisponde una certa corrente I_0, quando poi in serie con la V_0 si va a disporre una $v = E \operatorname{sen} \omega t$ e sono soddisfatte le condizioni per cui è lecito limitare lo sviluppo (8) al suo primo termine, la corrente passa dal valore I_0 a:

$$I_0 + \frac{g'}{4} E^2 .$$

Fig. 307

Parrebbe dunque che, per giudicare dell'attitudine rivelatrice si dovesse por mente soltanto al valore che, nel punto (I_0, V_0) attorno al quale si è operato, assume la g', cioè la derivata della conduttanza differenziale (o, il che equivale, la derivata seconda della $f(V)$ che caratterizza il dato conduttore).

Senonchè, per la valutazione quantitativa di tale attitudine, occorre non dimenticare che un conduttore come quello da noi considerato si troverà in generale in serie con un apparecchio di utilizzazione, che potremo simboleggiare con una resistenza R, ed il cui valore, come già osservammo nel caso dei diodi e dei triodi, sarà per lo più molto elevato in confronto alla resistenza differenziale media del rivelatore. In altri termini, questo sarà a considerarsi come un elemento che completa la impedenza interna del generatore, e pertanto, al pari di questa, dovrà, per un funzionamento tecnicamente conveniente, assorbire una piccola parte della tensione applicata.

Per comprendere in quali termini convenga porre la questione relativa alla valutazione che ci interessa, giova premettere alcune semplici riflessioni relative ad un caso che presenta una certa analogia con questo, quello cioè della misura dell'attitudine amplificatrice di un triodo.

A tal uopo, consideriamo il circuito anodico di un tubo a tre elettrodi come un elemento integratore della resistenza interna del generatore che lo alimenta, e studiamo quel che avviene applicando una certa variazione e_g di tensione alla griglia, supponendo il circuito anodico completato con una resistenza R di utilizzazione.

È ovvio che dal confronto della tensione e_g con la corrente differenziale anodica ottenuta non potrebbe trarsi una corretta valutazione del carattere amplificatore. Per tale fine invece la e_g dovrà confrontarsi con la tensione differenziale ricavata ai capi di R, non solo, ma, per mettersi in condizioni di massimo sfruttamento della tensione alimentatrice, con-

verrà supporre che R sia grandissima in confronto della r_a del tubo. Noi sappiamo che il rapporto predetto vale (XI, 3):

$$A = \frac{\mu}{1 + \frac{r_a}{R}},$$

e siccome si ha

$$\lim_{R \to \infty} A = \mu,$$

possiamo dire che siamo così pervenuti ad una definizione razionale del coefficiente di amplificazione μ attraverso la nozione del rapporto A, cioè per una via che poggia essenzialmente sul comportamento del tubo, considerato come *parte del suo generatore anodico*. Siccome poi, rispetto alla rimanente parte del circuito, cioè rispetto al carico, il tubo ha funzione, diremo così, parassitaria [1], la valutazione che ci interessa deve farsi in condizioni tali che l'influenza di esso riesca trascurabile, e ciò giustifica la considerazione del limite, per $R \to \infty$, di A.

Analogamente potremo operare per un rivelatore nel cui circuito pensiamo compresa una R di carico. E precisamente, come misura dell'attitudine rivelatrice nel punto caratterizzato da (I_0, V_0), assumeremo il limite per $R \to \infty$ del rapporto fra la variazione della tensione ai capi di R e l'ampiezza della tensione alternata $v = E \operatorname{sen} \omega t$ applicata in serie alla V_0. Per variazione della tensione ai capi di R si deve intendere il prodotto di R per la variazione che *alla corrente media* viene apportata dalla presenza di v.

La calcolazione di tale rapporto non si presenta a priori facile, perchè la tensione ai capi del rivelatore dipende precisamente dalla corrente media, che in sostanza si tratta di determinare.

Se con i_1 si indica la corrente in assenza della v, la tensione ai capi di R sarà Ri_1, e quella ai capi del rivelatore sarà $V_0 - Ri_1$. Applicando la v, alla corrente che percorre l'intero circuito e quindi transita per R, si aggiungerà una nuova corrente pulsante — di pulsazione ω — il cui valore medio i_m è dato dalla (8), talchè la corrente aggiunta si comporrà di una parte costante e di una variabile, a media nulla, di pulsazione ω. E potremo anche supporre che questa ultima non percorra la R, pensando la R stessa shuntata con un condensatore di capacità opportunamente elevata. Quanto alla i_m, essa dipenderà sia dall'ampiezza della v, sia dalla tensione base esistente ai capi del rivelatore.

Se per un momento prescindiamo dalla v, la corrente i_1 che si avrà nel circuito per la data V_0, potrà ottenersi con la solita costruzione

---

[1] Allo stesso modo come la impedenza di una linea di trasmissione, o la impedenza interna di un generatore, rispetto alla impedenza di carico.

(fig. 308), cercando cioè l'intersezione A della caratteristica (c) con la retta che esce dal punto $M \equiv (V_0, 0)$ con coefficiente angolare $\frac{1}{R}$, in quanto che tale costruzione corrisponde alla risoluzione della equazione:

$$i_1 = f(V_0 - Ri_1)\,.$$

Invero, per Ri_1 sufficientemente piccola, la (c) potrà, nel tratto compreso fra V_0 e $V_0 - Ri_1$, assimilarsi ad una retta di coefficiente angolare uguale al valore della conduttanza differenziale nel punto $A_0 = (V_0, I_0)$; la precedente si riduce allora ad una semplice equazione di primo grado:

$$i_1 = I_0 - gRi_1\,,$$

da cui si ricava:

$$i_1 = \frac{I_0}{1 + gR}\,.$$

Fig. 308

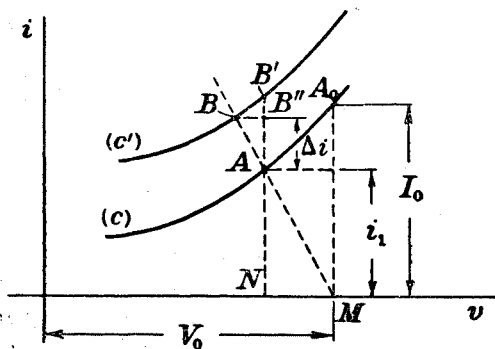
Possiamo dunque dire che la presenza di R fa variare la corrente I_0 nel rapporto $1 : \frac{1}{1 + gR}$ (rapporto delle ordinate dei punti A_0 ed A).

Per vedere ora quel che avviene applicando la $v = E \operatorname{sen} \omega t$, basterà che costruiamo la curva (c') le cui ordinate corrispondono a quelle della (c) aumentate delle correnti i_m pertinenti ai diversi valori di V, *per un dato* E, e che, rispetto a tale curva, andiamo ad operare allo stesso modo come dianzi abbiamo fatto rispetto alla (c). Così facendo verremo a conoscere l'effettivo valore della componente continua della corrente in presenza di R e di v. Tale componente è dunque uguale all'ordinata NB'' del punto B in cui la MA incontra la (c'), e pertanto la variazione Δi, rispetto al valore NA che si aveva in assenza di v, è misurata dal segmento AB''.

È questa variazione Δi quella che ci interessa. Il suo computo si può eseguire agevolmente se si suppone che la i_m sia, nel tratto interessato, indipendente dall'ascissa [1], perchè in tal caso il tratto BB' della curva (c'), che, nei limiti di approssimazione in cui ci siamo posti, è rettilineo, risulta *parallelo* al corrispondente tratto della (c). Pertanto, osservando che la configurazione $BB'A$ è simile alla AA_0M, si deduce subito:

$$\Delta i = \frac{i_m}{1 + gR} = \frac{g'E^2}{4(1 + gR)}\,.$$

---

[1] Ciò è rigorosamente vero se la (c) è parabolica.

Il rapporto che ci eravamo proposti di calcolare vale $\frac{R\Delta i}{E}$, ed il suo limite per $R \to \infty$ è:

$$\frac{g'}{4g} E .$$

Questo dunque è il cercato coefficiente da assumersi come misura dell'attitudine rivelatrice del dato conduttore non lineare, *nel punto* A_0 della sua caratteristica. Ad esso si può dare una forma più espressiva scrivendo $\frac{dg}{dV}$ in luogo di g'. Così facendo esso diviene:

$$\frac{1}{4} \frac{dg}{g} : \frac{dV}{E} \backsimeq \frac{1}{4} \frac{\Delta g}{g} : \frac{\Delta v}{E} ,$$

dove ΔV e Δg rappresentano due variazioni corrispondenti di V e di g.

Siccome un rapporto come $\frac{\Delta g}{g}$ non è che la misura di Δg riferita a g, possiamo dire che il coefficiente predetto equivale alla quarta parte del rapporto fra la variazione della conduttanza g e la corrispondente variazione della tensione, essendo la prima riferita al valore in A_0 della stessa g, e la seconda all'ampiezza della tensione alternata E.

10. - Caratteristiche di rivelazione. — In generale i rivelatori effettivi non sono nè lineari nè quadratici, in quanto che, per i primi, come s'è veduto, il raccordo fra i tratti rettilinei avviene in realtà mediante un tratto curvilineo, che per la sua brevità potrà sempre assimilarsi ad un arco di parabola; i secondi per lo più hanno invece andamento che può considerarsi parabolico soltanto per un certo tratto, cui fanno seguito da una parte e dall'altra tratti pressochè rettilinei.

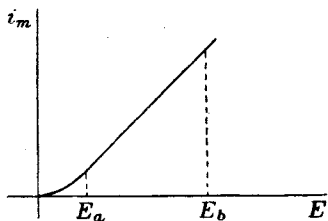



Fig. 309

In altre parole, un rivelatore reale è un conduttore la cui caratteristica $I = f(V)$ è, nelle vicinanze di un certo punto, di forma parabolica (legge quadratica), raccordata con due tratti pressochè rettilinei di notevole estensione ed aventi inclinazioni *diverse* (legge lineare).

Ne segue che, per piccole ampiezze modulanti, la rivelazione sarà di tipo quadratico, cioè la corrente media sarà proporzionale al quadrato dell'ampiezza, mentre per ampiezze maggiori ci si avvicinerà alla legge lineare. Se si costruisce quindi la così detta *caratteristica di rivelazione*, vale a dire la curva che, avendo per ascisse le ampiezze E delle tensioni sinusoidali alimentatrici, ha per ordinate i corrispondenti valori medi i_m della corrente, essa avrà

inizialmente un tratto, più o meno lungo, di tipo parabolico, cui segue un tratto pressochè rettilineo. La entità del primo dipende ovviamente dall'estensione di quel tratto della caratteristica che può assimilarsi ad una parabola (fig. 309).

La conoscenza di tale caratteristica è essenziale per lo studio della utilizzazione di un dato rivelatore. Quando si voglia da esso ottenere una rivelazione, come si dice, esente da distorsione, cioè una corrente, il diagramma della cui media riproduca fedelmente l'andamento della funzione secondo cui è modulata la tensione d'entrata, occorrerà operare in un tratto della caratteristica di rivelazione la cui forma sia il più possibile rettilinea.

In particolare, se tale tratto non ha inizio all'origine, si avrà necessariamente una distorsione nel caso di modulazioni vicine al 100 %, in quanto che queste mettono in giuoco delle ampiezze che possono anche essere assai prossime a zero.

In generale, se il tratto ad andamento rettilineo è quello compreso fra i valori E_a ed E_b della ascissa, la massima profondità di modulazione per la quale il dato rivelatore potrà essere utilizzato per una rivelazione esente da distorsione, sarà ovviamente misurata da:

$$m = \frac{E_b - E_a}{E_b + E_a}.$$

11. - Rivelazione a triodo per caratteristica anodica. — Per la realizzazione di un organo del tipo studiato al n. 9, basta ricorrere ad un qualunque conduttore non lineare avente in un punto della sua caratteristica una pronunciata curvatura. Se si pensa, ad es., alla forma delle caratteristiche (i_a, e_g) ed (i_g, e_g) di un triodo, si comprende subito che il tubo a tre elettrodi può efficacemente assolvere la funzione rivelatrice, e precisamente in due modi diversi, a seconda che si utilizza la curvatura delle caratteristiche anodiche mutue, oppure quella delle caratteristiche della corrente di griglia.

Si perviene così ai due tipi fondamentali di rivelatori a triodi, detti rispettivamente *a caratteristica di placca* ed *a caratteristica di griglia*.

Per realizzare un rivelatore del primo tipo, basta attribuire alla griglia una tensione di riposo E_{g0} che, in relazione alla data E_{a0}, porti il punto di riposo presso uno dei due ginocchi della caratteristica anodica mutua. In generale si sceglie quello corrispondente al minor valore di corrente anodica, cioè quello più vicino all'asse e_g, all'evidente scopo di evitare notevoli dissipazioni anodiche.

È chiaro che, se in serie con la sorgente che fornisce la polarizzazione E_{g0} desiderata, si dispone un generatore, la cui tensione, del tipo

$$e_g = E \operatorname{sen} \omega t ,$$

si tratta appunto di rivelare, la parte variabile della corrente anodica si troverà ad essere, per E costante o lentamente variabile, proporzionale ad E^2, semprechè i valori di E non escano dal campo in cui lo sviluppo (7)

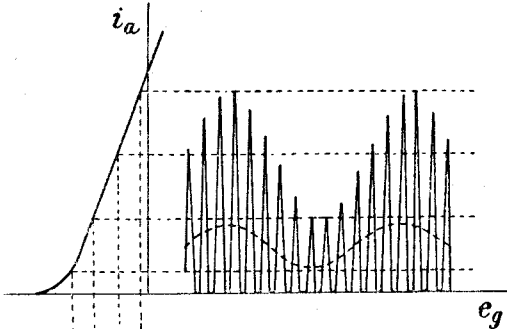



Fig. 310

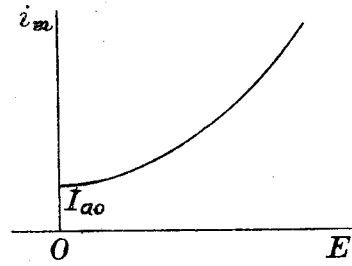



Fig. 311

può essere limitato al termine di secondo grado, cioè quando, per tutto il tratto che ci interessa, la curva caratteristica possa ritenersi parabolica. Quanto ai coefficienti g e g', essi corrispondono in questo caso ai valori della conduttanza mutua e della sua derivata rispetto ad e_g.

Nel caso in cui sia:

$$e_g = E_g(1 + m \operatorname{sen} \Omega t) \operatorname{sen} \omega t\,,$$

si avrà:

$$E^2 = E_g^2(1 + m \operatorname{sen} \Omega t)^2 = E_g^2(1 + 2m \operatorname{sen} \Omega t + \frac{m^2}{2} - \frac{m^2}{2} \cos 2\Omega t)\,;$$

quindi, prescindendo dai termini costanti e da quelli in cos $2\Omega t$, si ritrova nella corrente anodica una componente avente la frequenza di modulazione.

In fig. 310 è mostrato l'andamento della tensione eccitatrice e della corrente anodica, e con linea a tratti è indicata la curva della corrente anodica media.

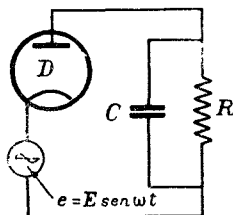
Un tale sistema di rivelazione rientra nel tipo generale descritto al n. 9, in quanto che il tratto ad andamento all'incirca parabolico è in generale di estensione abbastanza grande. La caratteristica di rivelazione avrà quindi una forma del tipo di fig. 311. Essa però non partirà in generale dell'origine, perchè per $E = 0$ si ha nel circuito anodico la corrente di riposo I_{a0} corrispondente alla data polarizzazione.

12. - Rivelazione a triodo per caratteristica di griglia. — Con questo sistema di rivelazione, a differenza del precedente, la rivelazione viene fatta nel circuito di griglia ed il funzionamento del triodo si fa avvenire

nella zona lineare, per modo che, dal punto di vista della corrente anodica ottenuta, il sistema non è altro che un ordinario generatore a triodo ad eccitazione indipendente, funzionante in classe A, al quale venga applicata una tensione eccitatrice che è già stata opportunamente deformata con un processo di preventiva rivelazione.

Per raggiungere tale scopo, bisogna utilizzare la tensione modulata data come elemento di entrata di un circuito, onde ricavare all'uscita di questo una tensione dedotta da quella per rivelazione, ed applicare poi questa fra la griglia ed il catodo del triodo. È appunto a tale ufficio che può servire, sotto determinate condizioni, lo stesso circuito di griglia del triodo.

Fig. 312

Per meglio comprendere come ciò possa avvenire, conviene riferirsi ad un sistema come quello disegnato in fig. 312 in cui D è un diodo, connesso con una resistenza, e con una tensione modulata del tipo $e = E \operatorname{sen} \omega t$, dove E è una certa funzione del tempo, a variazione lenta rispetto ad ωt.

Prescindiamo per un momento dal condensatore che è disposto in derivazione ai capi di R, e supponiamo dapprima E costante. Per le note proprietà del diodo, nella resistenza si avrà corrente soltanto durante una metà del periodo $\frac{2\pi}{\omega}$. Se indichiamo con I_m il valore medio, durante l'intero periodo, di questa corrente, tale I_m sarà proporzionale all'ampiezza E della tensione e, qualora in via d'approssimazione si possa ritenere la caratteristica del diodo costituita da tratti rettilinei, come indicato nella fig. 149 del Cap. VIII (pag. 327).

Se si potesse supporre che la corrente in R serbasse, durante tutto il periodo, costantemente il valore I_m, la tensione ai capi di R sarebbe costantemente RI_m, e pertanto quella ai capi del diodo avrebbe il valore $e - RI_m$. Ora, essendo RI_m proporzionale ad E, diciamo $= kE$[1], questa ultima tensione, valutata al solito positivamente quando l'anodo è a potenziale maggiore del catodo, sarà rappresentata dall'espressione:

$$E(k - \operatorname{sen} \omega t) .$$

Tale stato di cose è illustrato nelle figg. 313 *a*), *b*) dove in *a*) è rappresentato il diagramma della tensione e, e in *b*) quello della tensione ai capi del diodo. Si noti che, mentre la prima oscilla fra E e $-E$, le oscillazioni della seconda si compiono invece fra $(1 + k)E$ e $-(1 - k)E$.

Per un altro valore E_1 (fig. 313 *c*)), si avrebbe l'andamento indicato

[1] Dove k è certamente ≤ 1.

nel diagramma d) con oscillazioni fra $(1 + k)E_1$ e $-(1 - k)E_1$, e così via, sempreché alla fine di ciascun periodo le cose ritornassero allo stato primitivo, o quanto meno ad uno stato tale da consentire che per il periodo successivo si possano ripetere i ragionamenti fatti per il periodo precedente.

In tali condizioni dunque si avrebbe che, se E varia nel tempo con legge relativamente lenta rispetto a quella di sen ωt (fig. 313 e)), la tensione ai capi del diodo sarebbe rappresentata da un diagramma come quello di fig. 313 f), che si può ritenere ottenuto da quello di e deformando l'asse in guisa da fargli assumere una forma geometricamente simile a quella del diagramma delle creste. Una curva siffatta ha gli stessi caratteri di

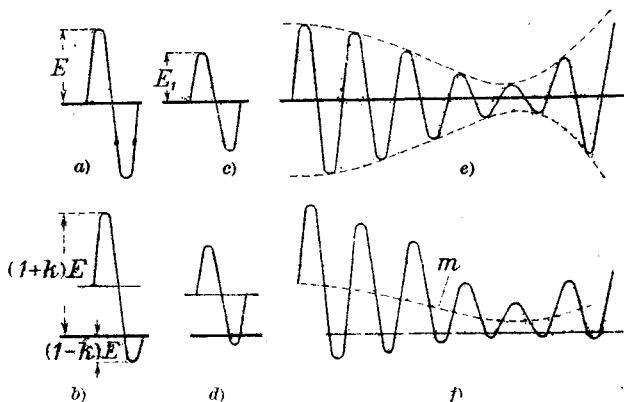



Fig. 313

quella della corrente che, con la stessa e, sarebbe fornita da un rivelatore lineare, in quanto che il diagramma m delle sue ordinate medie (di ogni periodo) coincide, salvo la scala, con quello delle ampiezze E.

Tutto ciò, come si è detto, è subordinato a due condizioni:

1°) che la corrente in R possa ritenersi costante durante un periodo della pulsazione ω;

2ª) che ad ogni nuovo periodo vengano ripristinate le condizioni iniziali, nel senso che sia reso possibile il funzionamento del sistema allo stesso modo come esso aveva avuto luogo nel periodo precedente, salvo, ben inteso, il diverso valore dell'ampiezza E interessata.

A tali funzioni provvede precisamente il condensatore disposto in derivazione sulla resistenza R, qualora la sua capacità sia convenientemente scelta.

Invero, per quanto riguarda la prima, si osservi che nell'intervallo di tempo in cui il diodo è conduttivo, il condensatore sottrae parte della corrente attraversante il diodo per provvedere alla propria carica. Tale carica poi eleva la tensione ai capi del condensatore al punto che, giunti

alla cresta dell'onda di E sen ωt, non è più possibile circolazione di corrente nel diodo, e quindi il condensatore stesso, che non può scaricarsi attraverso D per la rimanente parte del periodo e per quella frazione del successivo durante la quale la tensione e è inferiore a quella del condensatore, si scaricherà attraverso R, *prolungando* così, in certo qual modo, quella che precedentemente aveva circolato nella R stessa. In definitiva, si avrà dunque un certo *livellamento* della corrente in R, talchè essa compirà, intorno al suo valore medio, oscillazioni relativamente modeste. Più precisamente, l'andamento della tensione V_c ai capi di C, e quindi di R, sarà del tipo indicato con la linea b di fig. 314, avente nel tratto discendente andamento esponenziale, mentre, in assenza di R, la tensione si sarebbe presentata come alla linea a. Come si vede, non solo la condizione 1ª è sensibilmente soddisfatta, ma inoltre si ha che, qualora la variazione di E sia sufficientemente lenta, si può anche soddisfare alla condizione 2ª.

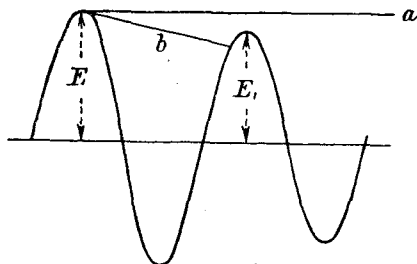



Fig. 314

Invero, per quanto riguarda quest'ultima, abbiamo or ora rilevato che la tensione V_c ai capi del condensatore (e quindi della resistenza) va diminuendo mano mano che procede la scarica. D'altra parte non è necessario che essa si riduca esattamente a zero, come era all'inizio della operazione, ma basta che raggiunga un valore non superiore all'ampiezza E_1 della successiva onda di E sen ωt. Infatti, se il valore finale della tensione V_c è $< E_1$, la corrente pertinente al periodo successivo potrà ancora farsi strada attraverso il diodo per una frazione più o meno grande del periodo, sempre tale però da comprendere la cresta dell'onda, e quindi consentire a V_c di elevarsi fino ad E_1, assorbendo una certa corrente di carica, che verrà poi lentamente *restituita* attraverso R, cosicchè, per il nuovo periodo, è assicurato il raggiungimento di uno stato di cose analogo a quello che si era avuto nel precedente.

In linea schematica, si può dunque ritenere che la tensione ai capi del sistema (R, C), durante un periodo della pulsazione ω, si fissa ad un certo valore kE, dove k è un numero poco minore dell'unità e praticamente costante, in quanto che dipende dalla legge di scarica del condensatore, cioè in definitiva dal valore del prodotto RC (III, 1). In conseguenza di ciò il valore istantaneo della tensione ai capi del diodo vale $e - kE$. E, dal fatto che k è all'incirca costante, segue che l'effetto del sistema è paragonabile a quello di un rivelatore lineare.

In modo più semplice ed intuitivo, il fatto del livellamento della corrente che attraversa la resistenza R può interpretarsi pensando che

la corrente diodica ha una media diversa da zero, e pertanto è decomponibile in una parte costante ed una variabile con pulsazione ω. Il condensatore C costituisce una impedenza infinitamente grande per la prima, la quale pertanto si fa strada soltanto attraverso R, mentre invece, per la seconda, essendo la reattanza del condensatore generalmente molto minore di R, la corrispondente corrente transita praticamente tutta attraverso il condensatore C disertando la resistenza R.

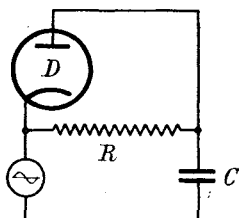



Fig. 315

È poi evidente che, oltre all'effetto di rivelazione dipendente dal fatto che la tensione ai capi del diodo assume valori la cui media varia proporzionalmente all'ampiezza E, si avrà che, tanto la corrente attraverso R, quanto la tensione ai capi di R stessa, seguiranno altresì con legge analoga le variazioni di E, e pertanto potranno anch'essi considerarsi elementi elettrici ottenuti da e per effetto di rivelazione.

È importante osservare che, al fine di ottenere che la tensione ai capi del diodo segua la medesima legge $e - kE$, si può anche adottare una diversa disposizione di R, ad es. quella indicata nella fig. 315, in quanto che, *nei riguardi della stabilizzazione della tensione ai capi del condensatore*, questa non differisce dalla precedente, qualora si ritenga la resistenza interna del generatore trascurabile in confronto ad R. È però necessario rilevare che, quantunque i due dispositivi siano equivalenti nei riguardi della tensione ai capi di C, non si può dire altrettanto per quanto concerne la tensione ai capi di R. Pel fatto che la tensione V_c approssimativamente si stabilizza al valore kE come dianzi, la tensione ai capi del diodo avrà ancora il valore $e - kE$ che si aveva nel caso precedente, in quanto che il generatore si trova sempre in serie col condensatore, ma la corrente che attraversa la resistenza R segue in questo caso andamento diverso [1].

Se si suppone che il diodo D sia costituito dal catodo e dalla griglia di un triodo, il sistema (R, C) si trova nelle condizioni del condensatore shuntato che già usammo (XI, 31) per realizzare la polarizzazione automatica della griglia di un generatore autoeccitato; pertanto possiamo senz'altro concludere che un analogo dispositivo può essere usato nel caso che attualmente ci occupa. È però da osservarsi che quanto qui essenzialmente interessa si è che la corrente di griglia (corrente del diodo)

---

(1) Precisamente, se il suo precedente valore era $\frac{kE}{R}$, quello attuale sarà invece $\frac{e - kE}{R}$.

abbia in *ogni* periodo $\frac{2\pi}{\omega}$ un valore medio diverso da zero, e sensibilmente proporzionale all'ampiezza della tensione di entrata. Occorre invero non dimenticare che l'ampiezza stessa, la quale nel caso del Cap. prec., pur avendo andamento crescente nella fase d'innesco, si stabilizzava poi fino alla cessazione del processo, nel caso attuale ha invece valori continuamente variabili (con la frequenza di modulazione).

Fig. 316

È infine da rilevarsi che, per quanto qui si sia implicitamente supposto che il diodo D si comporti come un conduttore a conduttività unilaterale costante, sarebbe agevole dimostrare che a conclusioni sostanzialmente equivalenti si perverrebbe altresì considerando un rivelatore qualunque, lineare o non. E sono proprio queste le condizioni in cui si trova lo spazio catodo-griglia di un triodo. Invero, il diagramma (i_g, e_g) ha una forma che ricorda quella del diodo, cioè può grossolanamente assimilarsi ad un sistema di due rette — una delle quali pressochè orizzontale — raccordate con un tratto a forte curvatura nell'intorno di un certo punto P (fig. 316). Occorre dunque portare ivi il punto di riposo, per il che bisogna polarizzare *positivamente* la griglia con una tensione E_{g0} misurata da OP'. Nel caso in cui il catodo è costituito da un filamento riscaldato direttamente con una corrente elettrica, tale tensione è in generale minore di quella della batteria di accensione, e pertanto lo scopo potrà ottenersi collegando la griglia col polo positivo del catodo, anzichè, come di consueto, col negativo [1]. La tensione della griglia risulterà così uguale a quella E_f ai capi del filamento, e si avrà quindi necessariamente una certa corrente di griglia I_{g0}. Siccome però questa deve fluire attraverso la resistenza R, la tensione E_{g0} sarà data da:

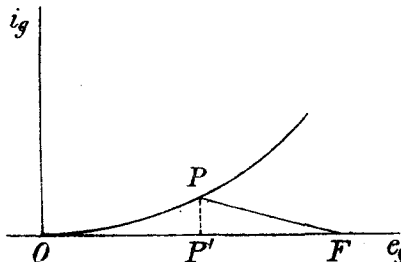
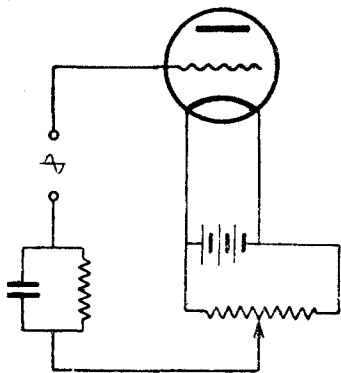



Fig. 317

$$E_{g0} = E_f - RI_{g0} ,$$

dove E_{g0} e I_{g0} debbono fra loro essere legati dalla equazione:

$$I_{g0} = f(E_{g0}) ,$$

[1] Che, secondo la convenzione fondamentale, rappresenta la tensione zero.

che rappresenta la caratteristica della corrente di griglia. Ne segue (cfr. VIII, 5) che (fig. 317), fatto $OF = E_f$, sarà $\frac{1}{R} = \operatorname{tg} \widehat{PFO}$, da cui, dato E_f, si può dedurre il valore di R. Qualora invece fosse data R, invertendo la costruzione, si dedurrebbe la tensione OF. Se questa risultasse $< E_f$, occorrerà utilizzare soltanto una porzione di E_f, il che può farsi con un graduatore di potenziale [1], cioè connettendo un estremo di R, anzichè all'estremo positivo del catodo, ad un punto opportuno di una resistenza disposta in parallelo col catodo stesso (fig. 317).

13. - Dimensionamento della resistenza R e della capacità C. — Le considerazioni svolte in XI, 31, ci consentono di concludere senz'altro che, per raggiungere il nostro scopo, la resistenza R e la capacità C dovranno soddisfare in primo luogo alla condizione:

$$RC \geqslant \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{cioè} \quad \frac{X_\omega}{R} \leqslant \frac{1}{2\pi},$$

essendo X_ω la reattanza offerta da C alla pulsazione portante ω.

In secondo luogo, affinchè ad ogni periodo il sistema si trovi in condizioni tali da consentire passaggio di corrente di griglia per una conveniente frazione del periodo della portante è necessario che, nell'intervallo di tempo che intercede fra due creste della tensione eccitatrice, la velocità di variazione della tensione ai capi del condensatore non sia minore di quella della funzione modulante $f(t)$.

Ora, la tensione V_c ai capi del condensatore durante la scarica, supposto che questa si inizi all'istante di cresta, varia secondo la legge:

$$V_c = E e^{-\frac{t}{RC}},$$

essendo E il valore della tensione all'istante predetto; pertanto la velocità di variazione $\frac{dV_c}{dt}$ è, in valore assoluto, $< \frac{E}{RC}$, cioè $< \frac{|f(t)|}{RC}$, quindi la condizione voluta sarà soddisfatta certamente qualora si abbia sempre:

$$\left|\frac{f(t)}{RC}\right| \geq f'(t), \quad \text{cioè} \quad RC \leq \left|\frac{f(t)}{f'(t)}\right|.$$

Nel caso di modulazione sinusoidale con profondità m, si ha:

$$f(t) = E(1 + m \operatorname{sen} \Omega t),$$

[1] Impropriamente detto *potenziometro*.

e quindi:

$$\left|\frac{f(t)}{f'(t)}\right| = \left|\frac{1 + m \operatorname{sen} \Omega t}{\Omega m \cos \Omega t}\right|.$$

Per il nostro scopo, basta esaminare il comportamento di quest'espressione nell'intervallo $\frac{\pi}{2} \leq \Omega t \leq \frac{3\pi}{2}$ nel quale la $f(t)$ è decrescente. Ora, in tale intervallo, l'espressione stessa raggiunge un minimo per sen $\Omega t =$ $= - m$ (1), e tale minimo vale:

$$\frac{\sqrt{1 - m^2}}{m\Omega};$$

pertanto la cercata condizione sarà certamente soddisfatta quando sia

$$RC\Omega \leq \frac{\sqrt{1 - m^2}}{m}.$$

A questa, posto $X_\Omega = \frac{1}{C\Omega}$, può darsi la forma:

$$\frac{X_\Omega}{R} \geq \operatorname{tg} \alpha, \quad \text{cioè} \quad \varphi \geq \alpha,$$

essendo φ l'angolo dell'impedenza formata da R, C, valutata alla frequenza di modulazione, ed α l'angolo, definito da sen $\alpha = m$, che potrebbe chiamarsi il *valore angolare della profondità di modulazione*, per modo che la condizione cercata si può compendiosamente enunciare dicendo che l'angolo dell'impedenza predetta deve essere non inferiore al valore angolare della profondità di modulazione.

Si osservi che, per $m = 1$, risulta $\alpha = \frac{\pi}{2}$ e quindi non sarebbe mai possibile soddisfare a quella condizione. Di ciò possiamo renderci conto anche con ragionamento diretto, pensando che per $m = 1$ la ampiezza del segnale può raggiungere valore nullo, mentre, nel periodo (della portante) precedente quello di ampiezza nulla, la tensione del condensatore non può certamente scendere fino a zero.

Riassumendo, le condizioni cui deve soddisfare il prodotto RC sono

---

(1) Infatti, uguagliando a zero la derivata rispetto a t, si ha:

$$\Omega m \cos \Omega t \cdot \Omega m \cos \Omega t + (1 + m \operatorname{sen} \Omega t)\, \Omega^2 m \operatorname{sen} \Omega t = 0,$$

cioè:

$$\operatorname{sen} \Omega t = - m.$$

Evidentemente non può trattarsi che di un minimo, in quanto che la funzione di cui si parla è essenzialmente positiva ed ha valori infinitamente grandi agli estremi dell'intervallo considerato.

quelle contenute nella seguente doppia disuguaglianza:

$$\frac{\tau}{2\pi \operatorname{tg} \alpha} \geq RC \gg T ,$$

essendo $\tau = \dfrac{2\pi}{\Omega}$ il periodo della modulante.

Ad es., per $\omega = 10^6$ ($\lambda = 1885$ m), se la modulante comprende tutta la parte della gamma fonica che sta al di sotto di 4 kHz, la precedente

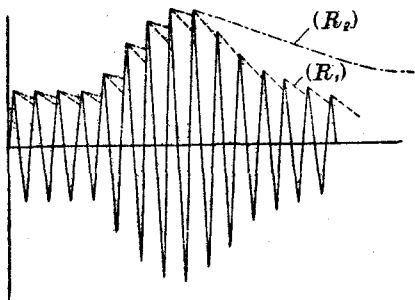



Fig. 318 a)

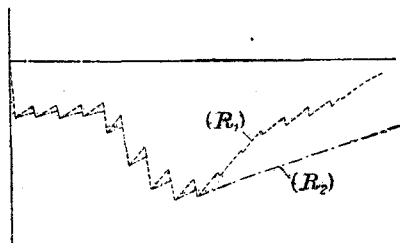



Fig. 318 b)

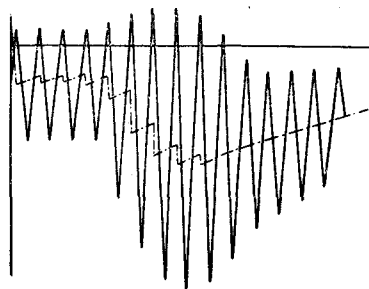



Fig. 318 c)

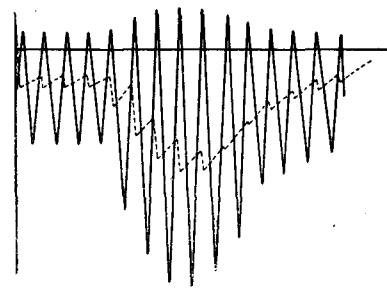



Fig. 318 d)

dovrà essere soddisfatta per $T = 2\pi \cdot 10^{-6}$ sec e $\tau = 2{,}5 \cdot 10^{-4}$ sec. In particolare, per modulazione al 70 %, si avrà $\operatorname{tg} \alpha \cong 1$, e quindi la precedente diviene:

$$\frac{2{,}5 \cdot 10^{-4}}{2\pi} \geq RC \gg 2\pi \cdot 10^{-6} .$$

Quanto alla capacità C, essa deve essere scelta in modo che la reattanza $\dfrac{1}{C\omega}$ ad essa corrispondente non sia che una piccola parte $\left(\dfrac{1}{7} \div \dfrac{1}{15}\right)$ della reattanza totale $\dfrac{1}{\omega C} + \dfrac{1}{\omega C_g}$ (dove C_g indica la capacità griglia-catodo e relative connessioni) sulla quale è chiuso il generatore che fornisce la data tensione modulata, e ciò affinchè la maggior parte di questa rimanga disponibile come effettiva tensione d'entrata.

Nei triodi ordinariamente usati a tali scopi, la C_g si aggira in generale intorno a 15 $\mu\mu$F, pertanto sarà bene che sia $C \geq 90 \div 210\ \mu\mu$F.

Scegliendo ad es. $C = 100\ \mu\mu$F, la precedente condizione condurrebbe alla seguente limitazione per R:

$$399\,000 \geq R \gg 62\,800 .$$

Così, si potrebbe ad es. prendere $R = 300\,000\ \Omega$.

In fig. 318 è illustrato il comportamento dei vari elementi elettrici che interessano il fenomeno. La tensione d'entrata di griglia è rappresentata a tratto pieno nel diagramma *a*), e nella stessa figura, con linee a tratti, rispettivamente a tratti e punti, sono indicati gli andamenti della tensione ai capi del condensatore, riferita al potenziale medio della tensione stessa d'entrata, per due valori diversi, R_1 ed R_2, della resistenza di dispersione, essendo $R_1 < R_2$. I diagrammi *b*) rappresentano le corrispondenti tensioni ai capi del condensatore, riferite alla griglia. Sommando ordinata per ordinata il diagramma *a*) a tratto pieno coi *b*), si ottengono quelli delle tensioni effettivamente applicate fra catodo e griglia, che sono disegnati in *c*) e *d*) con riferimento ai due casi considerati. Si può così riscontrare che la resistenza R_1 (diagramma *c*)) è adeguata allo scopo, mentre la R_2 (diagramma *d*)) ha valore eccessivo.

14. - Caratteristiche della rivelazione per griglia. — Siccome la curvatura del diagramma (i_g, e_g) in corrispondenza del ginocchio è piuttosto sentita, ma il tratto incurvato è di breve lunghezza, la caratteristica di rivelazione (n. 10) si presenta uscente dall'origine con un breve tratto parabolico, seguito da un lungo tratto ad andamento rettilineo [1].

L'analoga curva costruita assumendo per ordinate le corrispondenti correnti anodiche medie presenterebbe gli stessi caratteri, salvo l'inversione di segno (veggasi nota prec.), qualora la caratteristica (i_a, e_g) potesse ritenersi rettilinea. Ma ciò invece non si verifica esattamente, in quanto che le tensioni effettive che risultano applicate alla griglia necessariamente compiqno delle escursioni nel campo positivo, e precisamente tanto maggiori quanto maggiore è l'ampiezza del segnale. Ora, siccome le caratteristiche anodiche, per valori positivi delle tensioni di griglia, si incurvano verso l'asse, dapprima lievemente, poi via via di più, si verificheranno i fatti seguenti:

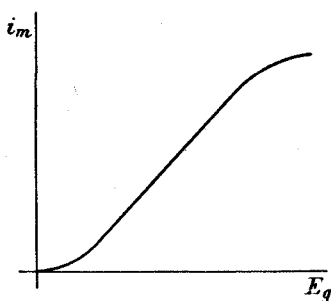
1°) che il circuito anodico viene esso stesso a compiere funzione

---

[1] È utile osservare che la corrente anodica media, anzichè sommarsi a quella di riposo, viene sottratta da questa. La ragione di ciò è ovvia se si pon mente al fatto che la rivelazione effettiva è stata operata nel circuito di griglia, e che il suo risultato si traduce in un *abbassamento* — secondo la legge di modulazione — del potenziale attorno al quale si svolgono le oscillazioni della frequenza portante.

rivelatrice, e ciò in misura tanto maggiore quanto maggiore è l'ampiezza del segnale. Più precisamente:

2°) il valore medio della corrente anodica riesce minore di quel che si avrebbe qualora l'andamento rettilineo della caratteristica si prolungasse anche nel campo delle tensioni positive di griglia.

Tale minorazione è tanto più sentita quanto maggiore è l'incurvamento verso l'asse e_g delle caratteristiche stesse, e quindi, mentre è poco sensibile finchè non si hanno correnti di griglia eccessive, si fa sentire in misura notevole quando, essendo notevole l'ampiezza della modulante, vengono ad essere interessati elevati valori della tensione di griglia. Da ciò poi consegue:

3°) che l'andamento della curva di rivelazione *effettiva*, cioè del diagramma della corrente *anodica* media in funzione della ampiezza E_g, è del tipo rappresentato in fig. 319, dove, per comodità di confronto con la precedente fig. 311, il senso positivo dell'asse delle correnti anodiche è invertito rispetto al consueto. Come si vede, il tratto iniziale ad andamento parabolico è ridottissimo, ed è invece relativamente lungo quello rettilineo, ma questo poi finisce col piegare verso il basso.

i_m

E_g

Fig. 319

La conoscenza di questi diagrammi è essenziale per lo studio preventivo della scelta del rivelatore quando sia nota la legge di variazione dell'ampiezza modulante. Come si è osservato al n. 10, per ottenere una rivelazione fedele, occorrerà disporre le cose in guisa che venga utilizzato il solo tratto all'incirca rettilineo della caratteristica di rivelazione.

In particolare, nel caso di modulazioni profonde, prescindendo dalla difficoltà accennata al n. 13 (pag. 589), sarà sempre da preferire la rivelazione di griglia a quella di placca, ed in generale tale preferenza è sempre da darsi quando si tratti di rivelare segnali di ampiezza molto piccola.

Se invece si tratta di elevate ampiezze, la rivelazione di griglia presenta un inconveniente, di cui vogliamo qui far cenno, dipendente dal fatto che essa involge notevoli erogazioni di corrente da parte del generatore che eccita la griglia stessa, talchè questo si trova ad operare su un circuito di conduttanza sensibilmente diversa da zero. Ora, siccome il generatore stesso è per lo più costituito da un circuito tipo (g, L, C) — che potrà essere il carico anodico di un precedente triodo —, ciò equivale ad aumentare g, dal che consegue una diminuzione del coefficiente di risonanza e quindi della selettività.

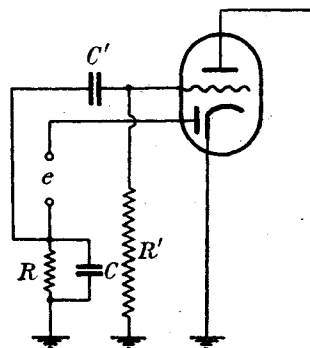
A ciò si può parzialmente ovviare — purchè la profondità di modulazione sia sufficientemente minore del 100 % —, rinunciando alla quasi immediata rettilineità della caratteristica di rivelazione; e ciò può ottenersi abbassando il potenziale positivo base di griglia od anche portandolo a valori leggermente negativi [1].

Sempre nel caso di segnali di elevata ampiezza, anche la rivelazione per caratteristica anodica dovrà essere usata con particolari accorgimenti. In particolare converrà alimentare l'anodo con una tensione E_{a0} tanto elevata che il punto di rivelazione corrisponda ad un valore negativo assai grande della E_{g0}, talchè, anche con le maggiori escursioni che il potenziale di griglia si troverà a compiere per effetto della tensione eccitatrice, siano evitati o quasi i valori positivi della tensione di griglia.

15. - Rivelazione con diodo-triodo, o con binodo. — Quanto precede mette in evidenza la difficoltà di conciliare, col sistema di rivelazione a triodo, le esigenze della rivelazione con quelle della riproduzione fedele della funzione modulante; in quanto che, se si opera per caratteristica anodica, si deve porre un limite inferiore al valore minimo della funzione modulante; se si opera per griglia, occorre invece limitare superiormente il valore stesso. Non provvedendo a tali limitazioni, si avrebbe in ogni caso infedeltà di riproduzione, dovuta nel primo caso alla non rettilineità della caratteristica di rivelazione, nel secondo alla non rettilineità della caratteristica anodica.

Fig. 320

Pertanto, specialmente in quei casi in cui la fedeltà è desiderata in un campo molto esteso, conviene effettuare la rivelazione a mezzo di un diodo, la cui caratteristica di rivelazione è praticamente rettilinea, ed utilizzare poi la tensione rivelata per eccitare il circuito di griglia di un generatore a triodo funzionante in classe A.

In luogo di un diodo, seguito da un triodo, può venire vantaggiosamente usato un binodo (VIII, 21), secondo lo schema di fig. 320: la tensione modulata *e* viene applicata fra catodo e anodo della parte del tubo funzionante da diodo, in serie con un sistema R, C; in tal modo, come fu rilevato al n. 12, ai capi di quest'ultimo si localizza una tensione il cui andamento riproduce quello della funzione modulante, e tale

[1] Questo procedimento è talvolta chiamato *rivelazione di potenza.*

tensione viene addotta alla griglia della parte funzionante da triodo, attraverso il condensatore C', munito di resistenza R' di dispersione.

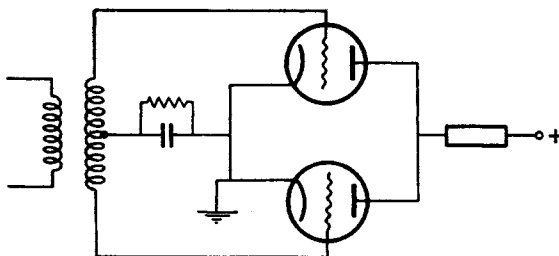



Fig. 321

16. - Rivelazione con due triodi in connessione semisimmetrica. — Nei processi di rivelazione descritti, non si fa altro che dedurre, da un prodotto del tipo $f(t)$ sen ωt, una somma del tipo $Af(t) +$ $+ B$ sen ωt, dove A è una costante, e B è in generale funzione del tempo [1].

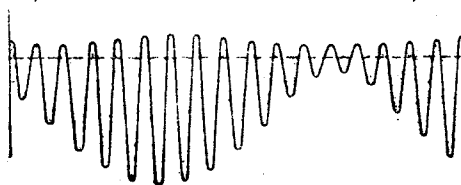
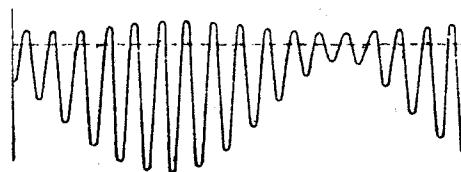
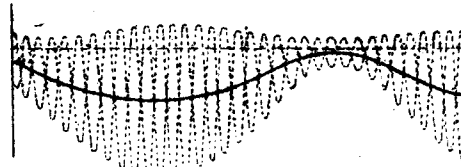
Fig. 322 a)

È chiaro che, onde pervenire alla effettiva rivelazione, occorrerà che al risultato di tale operazione si applichi poi un processo di filtrazione atto ad eliminare il secondo termine della precedente espressione.

Fig. 322 b)

Tale eliminazione può anche compiersi, nel caso di triodi, mediante l'uso combinato di più tubi opportunamente connessi. In particolare, la connessione in semisimmetrico presenta in tale senso una interessante possibilità.

Fig. 322 c)

Invero, pensiamo a due sistemi rivelatori del tipo a caratteristica di griglia, utilizzanti due tubi *identici*, ed eccitiamo le due griglie in opposizione, provvedendole però di un unico sistema di polarizzazione tipo (R, C) secondo lo schema di fig. 321. Le tensioni fra griglia e catodo

[1] Più esattamente, si avranno anche termini di pulsazioni multiple di ω, perchè, come già si è osservato, la componente che accompagna la funzione modulante non è mai sinusoidale pura.

dei due tubi si presenteranno schematicamente come ai diagrammi disegnati in fig. 322 *a*) e *b*), e pertanto il comune sistema anodico si troverà a funzionare come se avesse una unica eccitazione di griglia corrispondente alla somma di quei due diagrammi. Ora, tale somma ha l'aspetto della linea a tratto pieno del diagramma *c*), ove non vi è più traccia di componente a frequenza portante. Di conseguenza la corrente anodica, se il funzionamento avviene in classe A, riprodurrà senz'altro la forma della funzione modulante.

Anzichè operare con due tubi, si può usare un tubo unico del tipo descritto in VIII, 25 (fig. 177), in quanto che, quando le due griglie siano eccitate in opposizione, esso equivale appunto al sistema sopra descritto.

17. - Generalità sui metodi di modulazione. — Passiamo ora ad occuparci dei processi di modulazione, cioè di quelli mediante i quali, date le due funzioni portante e modulante, si va a costruire un elemento elettrico corrispondente al loro prodotto.

Per semplicità, ci limiteremo qui al caso elementare che maggiormente interessa le applicazioni, quello cioè in cui entrambe le funzioni sono sinusoidali e la pulsazione portante ω è notevolmente maggiore della modulante Ω; potremo ad es. pensare che la prima sia dell'ordine delle radiofrequenze, la seconda dell'ordine delle frequenze acustiche.

I metodi di modulazione si possono distinguere in due categorie, assegnando alla prima quelli in cui alla costruzione del prodotto si perviene realizzando elementi proporzionali al fattore modulante ed a quello portante, e combinandoli poi secondo la guida fornita da un qualunque fenomeno la cui entità sia proporzionale a ciascuno dei due elementi realizzati; ed alla seconda quelli in cui per la costruzione del prodotto si fa uso di conduttori a caratteristica curva.

Per l'applicazione del primo metodo, si potrà ad es., ricordando la legge di Ohm:

$$e = ri \,, \qquad i = ge \,,$$

costruire una tensione modulata ricavandola ai capi di una resistenza la cui variazione segua la legge modulante e sia percorsa da una corrente variabile secondo la funzione portante, o viceversa; oppure si potrà costruire una corrente modulata alimentando con una tensione, variabile secondo la legge modulante, una conduttanza la cui variazione segue la legge della portante, o viceversa. Più generalmente si potrà anche operare costruendo tensioni o correnti di una certa frequenza, per es. la portante, mediante dispositivi atti a far variare l'ampiezza di una corrente o di una tensione secondo la legge della modulante [1].

[1] Del resto tali dispositivi si possono ritenere equivalenti, in definitiva, a variatori di resistenza, rispettivamente di conduttanza.

I metodi della seconda categoria sono invece fondati sul fatto che un conduttore non lineare a caratteristica parabolica, quando sia alimentato da una tensione somma di due tensioni sinusoidali aventi le pulsazioni ω ed Ω, è percorso da una corrente la quale ha una componente proporzionale a sen ωt sen Ωt.

18. - Alcuni modulatori della prima categoria. — Il più semplice dei sistemi di modulazione fondati sul principio della esecuzione elettrica del prodotto consiste, come abbiamo detto, nell'alimentare con una tensione avente la frequenza portante ω un circuito la cui conduttanza sia variabile con la legge modulante.

Una tale conduttanza, nel caso fonico, può realizzarsi con un microfono M; e pertanto lo scopo potrà raggiungersi inserendo un tale appa-

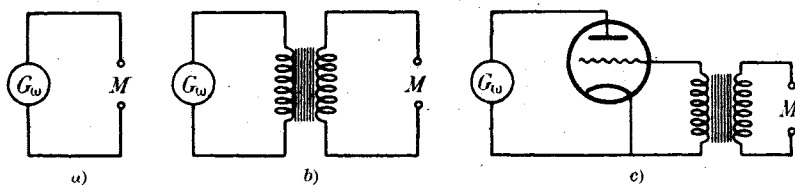



Fig. 323

recchio nel circuito di un generatore G_ω a frequenza portante, o, ciò che fa lo stesso, inserendo in sua vece il secondario di un trasformatore il cui primario comprenda il microfono stesso, oppure ancora lo spazio anodo-catodo di un triodo il cui circuito di griglia sia eccitato con una tensione proporzionale alla corrente microfonica (fig. 323 *a*), *b*), *c*)).

19. - Modulazione col metodo Heising o a corrente costante. — Una importante classe di sistemi di modulazione fondati sul principio della moltiplicazione, è data da quei dispositivi che sfruttano le peculiari proprietà dei generatori a triodo funzionanti in classe C. Ricordiamo (XI, 21) che, per un tale generatore, l'ampiezza della tensione oscillatoria ricavata ai capi di un dato carico anodico (che è, come sappiamo, praticamente sinusoidale) è pressochè proporzionale a quella del generatore anodico. Se dunque, ferme restando le condizioni che assicurano il funzionamento in classe C, si fa variare secondo una certa legge la tensione di alimentazione anodica, secondo la stessa legge varierà la tensione oscillatoria ricavata ai capi del carico ed altrettanto si verificherà per l'ampiezza I_{a1} della componente a pulsazione fondamentale della corrente anodica. In altri termini, tale corrente è rappresentabile con una espressione del tipo:

$$I_{a1} = gE_{a0} \operatorname{sen} \omega t ,$$

dove E_{a0} rappresenta la tensione d'alimentazione; il che significa che, prescindendo dalla componente continua I_{a0}, il circuito anodico del generatore si comporta come una conduttanza di valore g sen ωt, variabile cioè secondo la legge della pulsazione ω portante. Basterà dunque far variare E_{a0} secondo la funzione modulante, per ottenere ai capi del carico del generatore predetto una tensione modulata secondo la legge voluta, e (quindi) una analoga corrente nei rami costituenti il circuito di carico.

Tale risultato può conseguirsi col dispositivo, dovuto ad Heising, schematizzato in fig. 324. Il generatore di tensione continua G alimenta, attraverso la forte induttanza L a nucleo di ferro, il circuito anodico

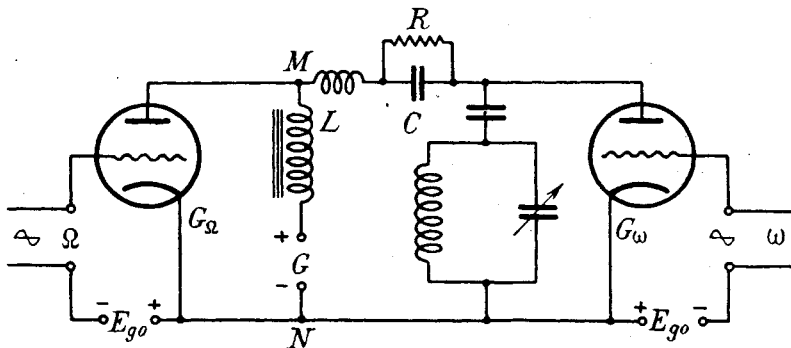



Fig. 3-

(di sinistra) di un generatore a triodo G_Ω funzionante in classe A ed eccitato con una tensione e_g avente la forma della funzione modulante, che supporremo sinusoidale di pulsazione Ω, diciamo $e_g = a + b$ sen Ωt. Per effetto dell'induttanza L, che rispetto a G_Ω può considerarsi come parte del sistema di carico anodico, fra i punti M ed N si avrà una tensione E che, anche con lievi variazioni della corrente nel ramo che contiene G, riproduce le variazioni di e_g, cioè sarà del tipo $A + B$ sen Ωt con B proporzionale a b.

L'anodo del generatore G_ω di pulsazione ω raffigurato a destra, viene così alimentato dalla tensione E, cui, per le ragioni che vedremo in seguito, potrà venire portato un abbassamento a mezzo della resistenza R. Essendo questa shuntata dal condensatore C, l'abbassamento stesso, anzichè seguire le fluttuazioni (a pulsazione Ω) della componente I_{a0} della corrente anodica di G_ω, risulterà quasi costante ([1]) e commisurato al valore che a detta componente spetta in corrispondenza della tensione A, cioè in assenza di segnale modulante.

Il generatore di destra G_ω è regolato in guisa da funzionare in classe C. Rispetto al primo generatore, esso può considerarsi come parte del

([1]) Cfr. n. 12.

sistema di carico anodico; e per quanto sopra è stato detto, si tratta di un carico che, trascurando le componenti di pulsazione diversa da ω, equivale ad una conduttanza variabile nel tempo proporzionalmente a sen ωt. Ne segue che la tensione ai capi del circuito di carico di G_ω — per la valutazione della quale sono praticamente ininfluenti le armoniche predette —, vale E sen ωt, cioè:

$$(A + B \,\text{sen}\, \Omega t) \,\text{sen}\, \omega t \,, \tag{9}$$

come appunto si voleva.

Si può esprimere lo stesso concetto dicendo che il circuito anodico del generatore G_ω (il quale, come s'è detto, equivale sostanzialmente ad una conduttanza variabile secondo la legge g sen ωt) riesce alimentato con una tensione la quale, a mezzo del sistema G, L, G_Ω, è resa variabile secondo la legge rappresentata dal primo fattore di (9).

Siccome la variazione della corrente erogata da G, a causa dell'elevato valore di L, è relativamente assai piccola, questo dispositivo di modulazione viene anche denominato a *corrente costante*. In sostanza si tratta dell'accoppiamento in parallelo — rispetto al comune generatore anodico *disposto in serie con l'induttanza* L — di due sistemi essenzialmente equivalenti a due impedenze, variabili l'una a pulsazione Ω, l'altra a pulsazione ω.

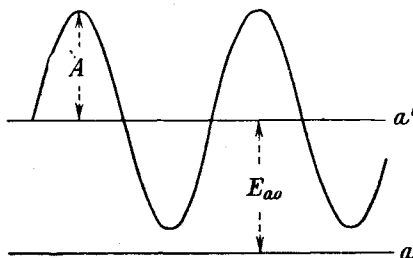
Se il generatore G_ω è regolato in guisa che la proporzionalità fra E ed I_a, sia assicurata per ampie variazioni delle tensioni E d'alimentazione del suo anodo, parrebbe che si potesse anche realizzare la modulazione al 100 % ($m = 1$) senza introdurre deformazione del segnale. A tale riguardo devesi però notare che, per raggiungere questo risultato, la tensione che alimenta l'anodo di G_ω deve poter variare fra 0 e $2A$. D'altro canto, la tensione anodica di G_Ω non deve mai scendere al di sotto di un certo valore, in quanto che G_Ω deve funzionare in classe A, e pertanto la tensione di G deve superare tale minimo di un importo uguale all'ampiezza della tensione modulante. Quindi la tensione che va ad alimentare G_ω non potrebbe mai scendere a zero come si renderebbe necessario perchè potesse aversi $m = 1$.

Occorre dunque disporre le cose in modo che la tensione di alimentazione di G_ω possa divenire minore della tensione anodica di G_Ω.

Tutto ciò riesce chiaro se si esamina il diagramma di fig. 315. La curva sinusoidale in esso disegnata rappresenta, riferita all'asse a, l'andamento della tensione ai capi del triodo di sinistra, mentre la ordinata dell'asse a' della sinusoide corrisponde alla tensione E_{a0} del generatore G. Tale curva dunque, riferita ad a, rappresenta le tensioni alimentatrici del generatore G_ω e pertanto essa rappresenta l'inviluppo della corrente modulata che tutto il sistema potrà generare. Il fatto che essa non può raggiungere l'asse a sta ad indicare che la modulazione non può raggiungere il 100%.

Qualora sia desiderato un tale valore, occorrerà far sì che la tensione di alimentazione dell'anodo di G_ω, anzichè essere la curva di fig. 325, sia una da essa dedotta o mediante abbassamento della sinusoide fino a farle toccare l'asse a, o mediante ingrandimento della sua ampiezza, in misura tale (precisamente nel rapporto da A ad E_{a0}) che il nuovo diagramma raggiunga l'asse.

Fig. 325

Per realizzare l'abbassamento, basta sottrarre dalla tensione di G quanto occorre per renderla uguale alla ampiezza A della sinusoide. Ed a ciò appunto provvede la resistenza R. Precisamente, se I_m è il valore medio (durante un periodo della modulante) della componente I_{a0} della corrente anodica di G_ω, basterà che ad R si attribuisca valore tale che il prodotto RI_m equivalga a quella differenza. Siccome però la I_{a0} compie delle oscillazioni (a frequenza di modulazione) intorno ad I_m, occorre shuntare R con un condensatore di congrua capacità per conseguire la (quasi) costanza della corrente in R.

Se per es. si avesse (valori in amp. e volt):

$$I_{a0} = 0{,}16 + 0{,}1 \operatorname{sen} \Omega t + \dots, \qquad E_{a0} - A = 200 \, ,$$

occorrerebbe assegnare alla resistenza R il valore

$$R = \frac{200}{0{,}16} = 1250 \, \Omega \, .$$

Questa resistenza, in generale, sarà abbastanza piccola in confronto a quella equivalente al carico anodico di G_Ω, talchè si potrà ritenere che la sua presenza non alteri sensibilmente la I_{a0}. La tensione ai capi di essa risulterà così:

$$RI_{a0} = 200 + 125 \operatorname{sen} \Omega t + \dots,$$

e, per ridurla ad essere praticamente esente dal termine variabile, disporremo in parallelo un condensatore. Per calcolarne la capacità C, supponiamo che sia ad es. tollerabile, per la componente variabile della tensione, una ampiezza di 4 volt (corrispondenti al 2% della componente costante). Dovremo allora far sì che il rapporto $\frac{1}{RC\Omega}$ fra la reattanza e la resistenza risulti di $\frac{4}{125}$: cioè assumere $C = \frac{125}{4\, R\Omega}$; per es., per $\Omega = 10^4$, risulterebbe $C = 2{,}5 \, \mu\text{F}$.

L'abbassamento della tensione necessario per aumentare la profondità di modulazione, anzichè mediante la caduta attraverso una resistenza, può anche realizzarsi alimentando addirittura l'anodo di G_ω con un separato generatore avente tensione E'_{a0} minore della E_{a0} che alimenta G_Ω.

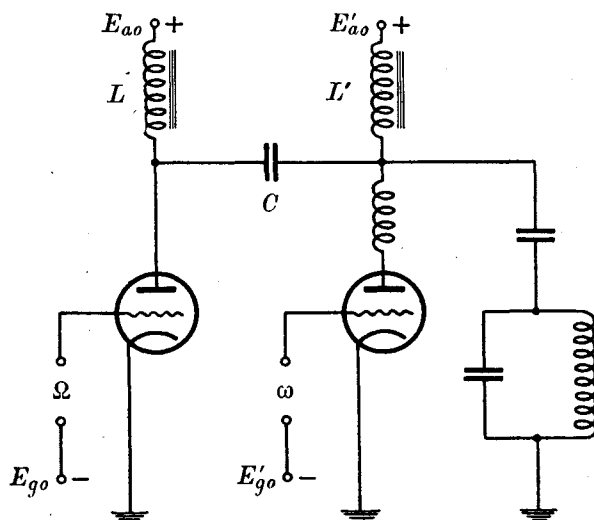



Fig. 326

In tal caso (fig. 326), occorre disporre anche sul circuito di E_{a0} una induttanza L' analoga alla L, e l'adduzione delle tensioni modulanti all'anodo di G_ω viene fatta col tramite di un condensatore C, dimensionato in

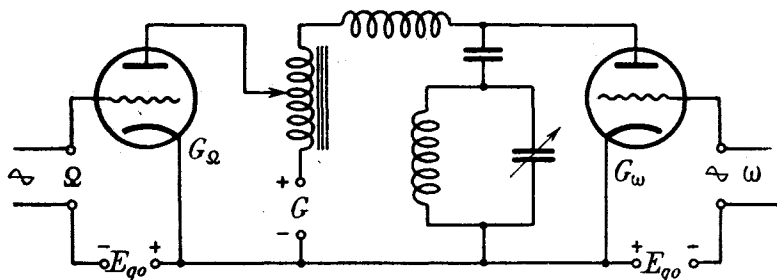



Fig. 327

modo da offrire una piccolissima reattanza per la frequenza modulante, talchè la tensione ai suoi capi si possa considerare praticamente costante ed uguale alla differenza $E_{a0} - E'_{a0}$.

Per realizzare invece l'ingrandimento nel rapporto $A : E_{a0}$, basterà che l'alimentazione di G_ω venga fatta con un capo di un autotrasforma-

tore elevatore, col morsetto intermedio connesso all'anodo di G_Ω, il che, come indicato in fig. 327, può ottenersi costituendo l'autotrasformatore stesso mediante opportuno « allungamento » dell'induttanza L.

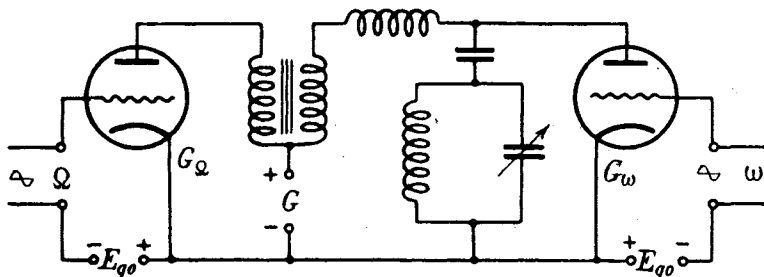



Fig. 328

Si potrebbe anche usare un trasformatore, secondo lo schema di fig. 328, ma i circuiti primario e secondario dovrebbero necessariamente avere un punto comune, quindi in sostanza si avrebbe a che fare con un autotrasformatore (1).

20. - Varianti del metodo precedente. — L'utilizzazione di un generatore G_ω funzionante in classe C può anche farsi in altro modo, cui perveniamo osservando che, in definitiva, col sistema ora descritto la tensione di alimentazione di G_ω, variabile con la legge di modulazione, viene addotta ai capi del suo circuito anodico il quale è posto in derivazione sul generatore G, talchè, rispetto a questo, G_ω e G_Ω sono alimentati in parallelo. Ora, è chiaro che si possono anche disporre le cose in modo che l'alimentazione di G_ω sia invece fatta col sistema G, G_Ω in serie con esso.

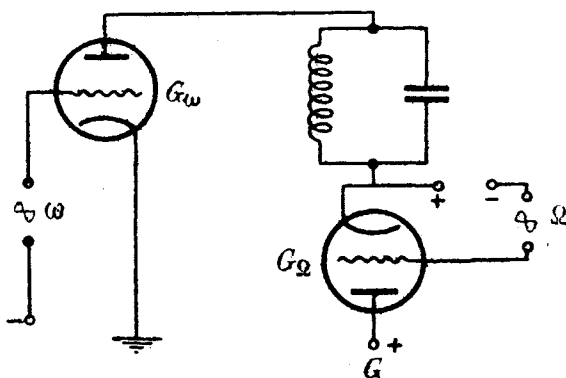



Fig. 329

In tale caso la induttanza L, la cui funzione era quella di riportare ai capi del circuito anodico di G_ω la tensione modulante, si rende inutile.

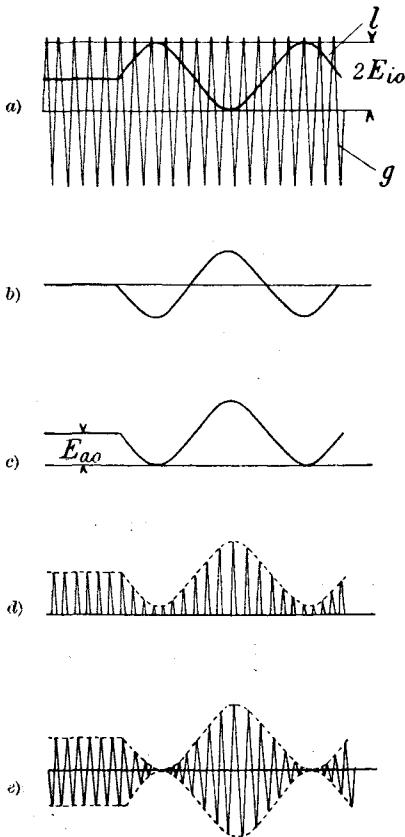
(1) Sarebbero soltanto diverse le connessioni, in relazione al diverso senso delle f. e. m. indotte nei due avvolgimenti.

Si perviene così al dispositivo di modulazione conosciuto col nome — improprio — di metodo a *tensione costante*, rappresentato in fig. 329.

Come agevolmente si comprende, in tal caso, anzichè un generatore G_Ω ai capi del cui triodo si localizza una tensione del tipo $A + B \operatorname{sen} \Omega t$, si può utilizzare una sede di f. e. m. il cui valore corrisponde alla sola parte variabile $B \operatorname{sen} \Omega t$. La profondità di modulazione dipenderà dall'ampiezza B della parte variabile della tensione di segnale introdotta nel circuito anodico, e dalla tensione E_{a0} del generatore anodico G. Se per es., si vuol raggiungere il 100%, bisognerà che quell'ampiezza sia uguale alla tensione del generatore anodico. Supponendo per semplicità che la caratteristica globale del triodo di G_ω sia composta di due tratti rettilinei (cfr. XI, 22), la polarizzazione base di griglia dovrà essere uguale al doppio di quella E_{i0} occorrente per raggiungere l'interdizione relativa alla tensione E_{a0} di G. Invero, variando la tensione alimentatrice dell'anodo di G_ω fra 0 e $2E_{a0}$, la corrispondente tensione di interdizione varierà da 0 a $2E_{i0}$; per modo che riesce assicurato il funzionamento in classe C.

Fig. 330

Ciò può chiaramente vedersi esaminando la fig. 330. In *a*) è rappresentato il diagramma g della tensione eccitatrice di griglia (di pulsazione ω), in *b*) l'andamento della tensione modulante E_Ω, la cui parte sinusoidale ha ampiezza E_{a0}. Pertanto, aggiungendo E_{a0} alle ordinate di *b*), la curva *c*) che così si ottiene rappresenta le tensioni alimentatrici dell'anodo di G_ω. In relazione a ciascun valore di queste, la tensione di interdizione assume i valori rappresentati dalla linea indicata con l in *a*); e quindi in G_ω potrà aversi corrente anodica soltanto negli intervalli di tempo in cui la curva g di fig. *a*) si svolge superiormente ad l. Quanto all'intensità della corrente anodica, essa sarà con molta approssimazione proporzionale alla differenza fra le ordinate di g e di l, limitatamente agli intervalli in cui tale differenza è positiva. L'andamento di tale cor-

rente anodica è mostrato nel diagramma *d*). La tensione ai capi del carico anodico di G_ω (o la corrente nei rami L, C del carico stesso) avrà quindi l'andamento indicato nel diagramma *e*).

Tanto in questo, come nel precedente caso, il generatore potrà anche essere autoeccitato, purchè la polarizzazione di griglia sia regolata in modo da assicurare il funzionamento in classe C, e da soddisfare inoltre, nel secondo caso, alle condizioni imposte dal grado di modulazione desiderato.

21. - Altri metodi di modulazione della prima categoria. — Sempre appoggiandosi al primo dei due principi enunciati al n. 17, si possono

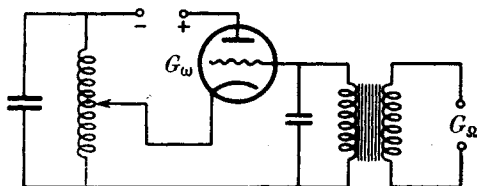



Fig. 331

realizzare altri sistemi modulatori ogni qualvolta si vada ad influire, con legge corrispondente alla funzione modulante, sulla ampiezza della corrente alternata erogata da un generatore di pulsazione ω.

Ad es. a ciò si può pervenire con un generatore, autoeccitato o no (funzionante in classe B o C), variando la polarizzazione di griglia col ritmo della modulazione, il che potrà ottenersi inserendo in serie nel

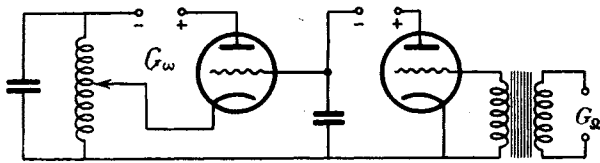



Fig. 332

circuito di griglia il secondario di un trasformatore il cui primario è percorso da una corrente avente la forma della funzione modulante (fig. 331), oppure, se la polarizzazione è ottenuta con condensatore shuntato, variando la resistenza di dispersione, il che ad es. potrà ottenersi costituendo quest'ultima con lo spazio catodo-anodo di un tubo la cui griglia sia eccitata con la tensione modulante, come rappresentato nella fig. 332, dove, come nella precedente, il generatore a triodo è autoeccitato secondo lo schema Hartley.

22. - Modulatori della seconda categoria. — I sistemi modulatori della seconda categoria si fondano sul fatto che un conduttore avente caratteristica curva, quando sia alimentato con una tensione del tipo:

$$E_\omega \operatorname{sen} \omega t + E_\Omega \operatorname{sen} \Omega t \,, \tag{10}$$

cioè somma di due tensioni sinusoidali di diversa frequenza, è attraversato da una corrente la quale ha una componente proporzionale al prodotto sen ωt sen Ωt.

Tale proprietà è agevolmente verificabile. Invero, essendo $I = f(V)$ l'equazione della caratteristica del conduttore, sviluppiamo la $f(V)$ in serie di potenze di $V - V_0 = v$:

$$I = f(V_0) + vf'(V_0) + \frac{v^2}{2} f''(V_0) + \dots \,, \tag{11}$$

essendo V_0 il particolare valore di V attorno al quale si opera.

Se introduciamo al posto di v una espressione del tipo (10), è evidente che fra i termini nascenti da $\frac{v^2}{2} f''(V_0)$ ve n'è uno che ha la forma voluta.

Quando anche si possa limitare lo sviluppo ai termini scritti — il che potrà farsi o perchè la caratteristica del conduttore è parabolica e quindi $f'''(V_0) = f^{\text{IV}}(V_0) = \dots = 0$, o perchè sia ha a che fare con tensioni v sufficientemente piccole —, la corrente I conterrà però anche altri termini, e precisamente alcuni costanti, altri di pulsazioni ω, Ω, 2ω, 2Ω.

Se ad es. ω è la pulsazione portante ed Ω la modulante, non è difficile eliminare, con uno dei consueti processi di filtrazione, tutti i termini costanti e quelli di pulsazioni 2ω e 2Ω. Si perviene così ad una corrente del tipo (2), cioè si è realizzata la modulazione a pulsazione Ω della portante ω.

Si può interpretare in modo più espressivo tale risultato considerando che, quando si possa limitare lo sviluppo (11) ai termini di secondo grado in v, ad esso si può, posto $i = I - f(V_0)$, dare la forma:

$$i = (g + g'v)v$$

con $g = f'(V_0)$, $g' = \frac{f''(V_0)}{2}$, secondo la quale il conduttore considerato appare presentare una conduttanza (differenziale) che, al variare della tensione differenziale v, varia secondo la legge lineare $g + g'v$. In altre parole, si può dire che, mentre per ogni valore della tensione v si ha proporzionalità fra tensione e corrente — e quindi, per tensioni poco variabili attorno ad un determinato valore, si ha un comportamento del tipo ohmico ordinario —, il coefficiente di proporzionalità $g + g'v$ varia con la tensione stessa, per modo che, in presenza di variazioni ampie di questa, le corrispondenti correnti necessariamente ne risentono.

Ora, se v è composta di una parte E_Ω sen Ωt a pulsazione Ω ed una E_ω sen ωt variabile con pulsazione ω, che supporremo di ampiezza sufficientemente piccola, avverrà che, durante ogni periodo di questa, la conduttanza potrà ritenersi sensibilmente costante ed uguale a quella,

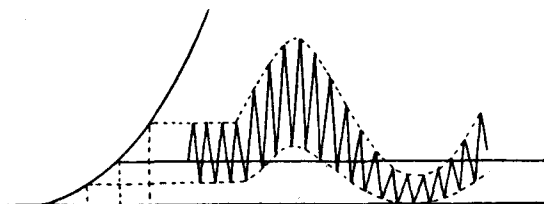



Fig. 333 *a*)

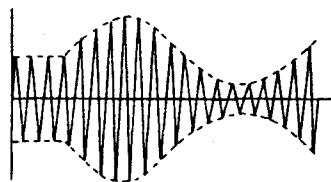



Fig. 333 *b*)

$g + g'E_\Omega$ sen Ωt, pertinente al valore che durante lo stesso periodo ha la tensione v, considerata variabile con la pulsazione Ω. Potremo dunque scrivere:

$$i \cong (g + g'E_\Omega \text{ sen } \Omega t)(E_\omega \text{ sen } \omega t + E_\Omega \text{ sen } \Omega t)\,,$$

il che equivale a dire che il diagramma di i sarà quello di una corrente modulata:

$$E_\omega(g + g'E_\Omega \text{ sen } \Omega t) \text{ sen } \omega t\,,$$

disegnato assumendo per base la curva $(g + g'E_\Omega$ sen $\Omega t)$ E_Ω sen Ωt anzichè l'asse delle ascisse.

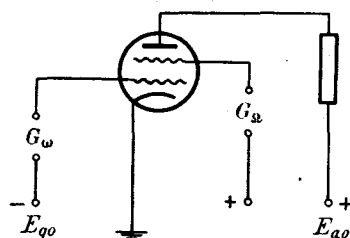
Conduttori di tale tipo sono, ad es., quelli offerti dallo spazio anodo-catodo di un triodo, quando il funzionamento avvenga in prossimità di un ginocchio, cioè in quella stessa regione che può essere utilizzata per la rivelazione anodica (n. 11).

Fig. 334

Il funzionamento di un tale sistema è illustrato nella fig. 333 *a*), ed in fig. 333 *b*) è mostrato l'andamento della componente modulata della corrente anodica.

In sostanza, si può ritenere che, con piccola tensione E_ω ed elevato valore di E_Ω, il modulatore descritto funziona, rispetto ad ω, come un generatore di classe A, ma in condizioni tali che il rapporto di amplificazione varia al variare della polarizzazione base di griglia. Ed è questa che viene appunto fatta variare secondo la legge determinata da E_Ω sen Ωt.

Questo principio può più generalmente applicarsi ad un generatore di classe A quando il rapporto di amplificazione possa essere reso varia-

bile con un mezzo qualunque. Per ricavarne un modulatore, basterà far agire la funzione modulante nel senso di provocare proporzionali variazioni nel rapporto di amplificazione. Se ad es. il generatore di cui si tratta è costituito con un tetrodo a griglia schermante, lo scopo può ottenersi variando la tensione dello schermo secondo la funzione modulante, per il che basterà introdurre la tensione modulatrice nel circuito della griglia-schermo, secondo lo schema di fig. 334 (1).

23. - **Soppressione dell'onda portante.** — Riprendiamo le considerazioni del n. 5, ove fu osservato che un'onda modulata con grado m mette in giuoco una potenza $1 + \frac{m^2}{2}$ volte maggiore di quella che si avrebbe in assenza di modulazione. Per es., per $m = 1$, il rapporto fra le due potenze è di 3 : 2. In altre parole, per una data potenza modulata, due terzi sono dovuti alla portante e soltanto un terzo all'effetto della modulazione.

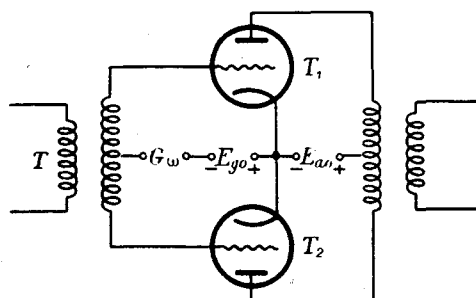



Fig. 335

D'altra parte, è ovvio che la sola parte utile ai fini della trasmissione dei segnali è quest'ultima. Si conclude pertanto che in una trasmissione modulata la parte utile della potenza è piuttosto esigua in confronto del totale. Essa infatti raggiunge $\frac{1}{3}$ del totale soltanto nelle *punte* di modulazione, cioè quando la profondità m raggiunge il valore unitario.

Tale rapporto potrebbe notevolmente migliorarsi sopprimendo l'onda portante, cioè sottraendo da una espressione come la (3) il termine A sen ωt. Una tale soppressione si presenta dunque vantaggiosa per diminuire la potenza richiesta in trasmissione. D'altra parte, come già fu osservato (n. 5), essa è senza importanza ai fini della ricostruzione del segnale, a condizione però che, prima di entrare negli apparecchi rivelatori, il termine soppresso venga ripristinato.

Ciò è messo in evidenza dai diagrammi disegnati in fig. 301, i quali però mostrano che la soppressione del termine A sen ωt modifica la curva modulante ed in particolare — nel caso di modulazione con funzione periodica — raddoppia la frequenza di modulazione. Per potere, dopo rive-

(1) È sottinteso che, per evitare distorsioni, occorrerà operare in condizioni tali che alle variazioni della tensione della griglia-schermo conseguano proporzionali variazioni del rapporto di amplificazione.

lazione, avere il segnale con cui era modulata la curva primitiva, bisogna, come s'è detto, aggiungere il terminè soppresso (od anche un termine alquanto inferiore ad esso, se la modulazione non era al 100 %).

La concreta sottrazione del termine A sen ωt può effettuarsi col dispositivo illustrato in fig. 335. I due triodi T_1 e T_2 sono connessi in push-pull, cioè le loro griglie sono eccitate in opposizione dalla tensione modulante ricavata dal secondario del trasformatore d'entrata T, ed in serie con entrambe è disposto il generatore G_ω a frequenza portante, oltre, ben inteso, alla sorgente (o equivalente dispositivo) di polarizzazione, così calcolata da portare il punto di funzionamento al gomito delle caratteristiche anodiche.

Indichiamo con e_ω la tensione di G_ω e con e_Ω la modulante, misurata fra gli estremi del secondario del trasformatore T. La griglia del primo tubo risulterà così eccitata con la tensione $e_\omega + \frac{e_\Omega}{2}$, la seconda con $e_\omega - \frac{e_\Omega}{2}$, e pertanto, tenuto presente che ciascun sistema funziona come modulatore della seconda categoria, la corrente di uscita del primo triodo sarà della forma:

$$\left(A + \frac{B}{2} \operatorname{sen} \Omega t\right) \operatorname{sen} \omega t \,,$$

mentre quella del secondo sarà:

$$\left(A - \frac{B}{2} \operatorname{sen} \Omega t\right) \operatorname{sen} \omega t \,,$$

avendo indicato con

$$(A + B \operatorname{sen} \Omega t) \operatorname{sen} \omega t \tag{12}$$

la corrente che si avrebbe qualora ciascuna griglia fosse eccitata con $e_\omega + e_\Omega$.

La corrente nel primario del trasformatore di uscita corrisponde alla differenza delle due correnti, e quindi vale

$$B \operatorname{sen} \Omega t \operatorname{sen} \omega t \,,$$

cioè coincide con quella che si avrebbe sopprimendo nell'espressione (12) il termine A sen ωt che corrisponde alla componente portante.

È interessante notare l'analogia di questi procedimenti con quelli usati nella ordinaria telefonia su filo. Anche in questa si ha a che fare (cfr. n. 1) con una corrente modulata, *portata* in generale da una corrente continua [1], la quale può essere soppressa in linea e ricostruita alla ricezione.

---

[1] Non sempre: ad es. nella telefonia ad alta frequenza si ha, come nel caso r.f., una portante di frequenza ultraacustica.

La soppressione si effettua semplicemente connettendo la linea col secondario di un trasformatore il cui primario è alimentato dalla corrente completa. Così si passa dalla disposizione di fig. 336 *a*) a quella di fig. 336 *b*), dove al disotto di ogni circuito è indicato il diagramma della corrispondente corrente.

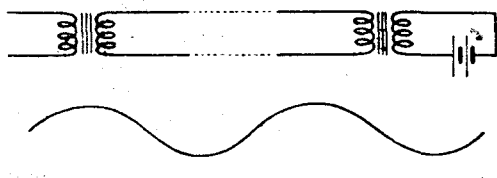
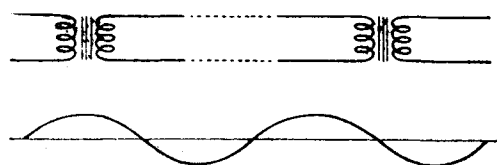



Fig. 336 *a*)

Fig. 336 *b*)

Fig. 336 *c*)

La ricezione si effettua con telefono. Se questo avesse il nucleo di ferro dolce, le oscillazioni della sua membrana avrebbero, nel secondo caso, la forma di fig. 336 *c*), di cui è manifesta l'analogia con la curva inviluppo del diagramma di fig. 301 *b*). Per ristabilire la forma del segnale, occorre inserire nel circuito una sorgente di f. e. m. continua — corrispondente alla introduzione della frequenza portante — o, ciò che fa lo stesso, usare un telefono a nucleo polarizzato.

CAPITOLO DECIMOTERZO

STAZIONI RADIOTRASMITTENTI E RADIORICEVENTI

1. - Generalità. — Con la scorta delle nozioni contenute nei precedenti Capitoli, possiamo iniziare proficuamente lo studio del coordinamento dei vari organi coi quali, secondo lo schema generale già prospettato (IX, 13), si costituiscono le stazioni radiotrasmittenti e radioriceventi, cioè i complessi atti alla trasmissione, rispettivamente ricezione, delle radioonde destinate a realizzare una radiocomunicazione.

Ci limiteremo qui ai sistemi aventi per oggetto la trasmissione di segnali grafici e fonici, cioè di segnali che, come questi ultimi, sono già di per sè di natura meccanica, oppure, come i primi, sono immediatamente traducibili in forma meccanica (a mezzo dei tasti di manipolazione).

Come è noto, e già fu accennato nel Cap. prec., nel caso del segnale fonico, il fatto meccanico di origine acustica (vibrazione del mezzo) può con sufficiente fedeltà venire trasformato in fatto elettrico a mezzo del microfono; nè in modo sostanzialmente diverso vanno le cose nel caso di segnali grafici, in quanto che il tasto manipolatore ha appunto l'ufficio di rendere disponibile in un opportuno circuito elettrico una corrente capace di assumere un certo valore costante diverso da zero, oppure il valore nullo, in relazione alla presenza o all'assenza del fatto meccanico, presenze e assenze che, mercè opportune convenzioni, sostituiscono la parola.

In una stazione trasmittente, sia radiotelegrafica che radiotelefonica, dovremo necessariamente avere un sistema *generatore* di corrente alternata ad alta frequenza, ed uno di *carico*, essenzialmente costituito dall'antenna trasmittente. Nel caso telefonico poi, il sistema generatore sarà completato da opportune apparecchiature aventi la funzione di imprimere alla corrente stessa, mediante la modulazione, gli elementi caratterizzanti il segnale fonico. Nel caso telegrafico, i dispositivi aventi funzione modulatrice si riducono ad una assai semplice espressione, perchè ivi si tratta soltanto di regolare, a prestabiliti intervalli di tempo, la emissione o non delle radioonde da parte dell'antenna.

Per quanto riguarda i generatori di corrente alternata non persistenti

(smorzate), nulla di essenziale vi è da aggiungere a quanto in proposito è stato detto nel Cap. X. Soltanto qui osserveremo che ovviamente essi non possono trovare pratica applicazione se non per trasmissioni di carattere telegrafico (1), ed oggigiorno anche per queste essi non trovano più che scarsa utilizzazione.

Ci riferiremo dunque, salvo avviso contrario, a generatori di correnti alternate persistenti.

Questi ultimi potranno in particolare realizzarsi con l'arco Poulsen o con generatori di tipo elettromeccanico accompagnati da convenienti moltiplicatori di frequenza, ed a tale proposito rimandiamo a quanto sull'argomento è stato esposto nel Cap. X.

2. - **Complessi generatori.** — Qui ci vogliamo particolarmente occupare dei generatori a triodi, cui oggidì quasi esclusivamente si ricorre, sia per la loro semplicità, sia per la loro attitudine a fornire frequenze il cui valore può farsi variare entro una gamma vastissima.

Un complesso di generatori a triodi comprende in generale più *stadi*, cioè è costituito dall'accoppiamento in cascata di un certo numero di generatori dei tipi semplici studiati nel Cap. XI, *A*), *B*), *C*).

Negli impianti di una certa entità, al primo generatore non si affida altro compito che quello di fissare la frequenza, e per tale ragione gli si dà il nome di stadio *pilota* (ingl. *master oscillator* o *driver*). Esso deve presentare tutti quei requisiti atti ad assicurare la costanza della pulsazione, e di cui a suo tempo abbiamo parlato. Spesso si adotta il tipo con controllo a quarzo, quando la frequenza desiderata rientra nella gamma di quelle agevolmente ottenibili con tale cristallo, e la sua erogazione è sempre limitata al carico anodico propriamente detto, escludendosi cioè erogazioni indirette su impedenze accoppiate alla impedenza anodica.

Il generatore così costituito viene quindi utilizzato soltanto per eccitare il circuito di griglia di uno stadio successivo, il quale potrà anche essere erogatore di potenza. Se però si vuole assicurare nel miglior modo la costanza della frequenza, sarà necessario che tale secondo stadio non assorba potenza dallo stadio pilota: in particolare esso dovrà quindi lavorare con polarizzazione base di griglia così commisurata alle massime escursioni della tensione eccitatrice, da potersi escludere la presenza di apprezzabili correnti di griglia, ed inoltre dovranno essere rigorosamente neutralizzati gli effetti di retroazione del circuito anodico su quello di griglia (XI, 12).

Ad uno stadio siffatto si dà il nome di *separatore* (ingl. *buffer*), in

(1) È però da rilevarsi che i primi esperimenti di radiotelefonia furono eseguiti quando ancora non si conoscevano mezzi per la generazione di correnti alternate persistenti ad altissima frequenza, e pertanto per essa si utilizzarono generatori di correnti smorzate convenientemente modulate (Majorana).

quanto che la sua funzione essenziale è quella di evitare la influenza del carico effettivo sul funzionamento dello stadio pilota.

Il circuito anodico del separatore potrà dunque erogare potenza, purchè nei limiti sopra indicati. Esso allora potrà alimentare il circuito di griglia di un generatore funzionante anche con corrente di griglia, in particolare in classe B o C. Se, per soddisfare a tutte le condizioni sopra indicate, non si potrà da quest'ultimo ricavare tutta la potenza desiderata, esso verrà utilizzato per alimentare il circuito di griglia di uno stadio successivo, e così via fino a che non si raggiunga la possibilità di erogazione energetica nella misura voluta, cioè, come si dice, il desiderato *livello* (IV, 10) energetico.

Gli stadi che seguono il separatore potranno in generale funzionare in classe C; anzi sarà bene che così siano previsti, onde elevare il rendimento di conversione del complesso.

Tutto ciò vale quando la frequenza fornita dal pilota sia senz'altro uguale a quella di servizio. Qualora invece occorra passare ad un suo multiplo, si inserirà, *dopo il separatore*, un generatore a moltiplicazione di frequenza (XI, 26). Generalmente si ricorre alle duplicazioni, e quindi, se la frequenza desiderata fosse per es. *otto* volte maggiore di quella fornita dal pilota, occorreranno *tre* successive duplicazioni. Raggiunta la frequenza di servizio, si procederà, come nel caso precedente, con una serie opportuna di stadi, l'ultimo dei quali sia atto ad ergoare la potenza voluta.

3. - Stadi modulatori. - Modulazione. - Manipolazione. — Nel caso di trasmissioni foniche, si deve separatamente provvedere ad un generatore (a bassa frequenza) o ad un sistema in cascata di tali generatori, nel primo dei quali si entrerà con la corrente proveniente dal circuito microfonico (eventualmente con l'intermediario di un trasformatore) e dall'ultimo dei quali si ricaverà l'elemento di entrata nel sistema modulatore.

È evidente che gli stadi a bassa frequenza che collegano l'entrata all'uscita del sistema predetto dovranno essere di tipo tale da non introdurre praticamente deformazioni dei segnali. Pertanto i generatori interposti fra l'entrata e l'uscita dovranno funzionare in classe A, oppure — il che ovviamente equivale — anche in classe B, purchè si tratti di coppie in connessione simmetrica (VIII, 26), con funzionamento limitato al solo tratto rettilineo della caratteristica: in particolare quindi non dovrà aversi mai corrente di griglia. Tale necessità risulta evidente se si pensa che, uscendo dalla classe A, o dalla equivalente B sopra indicata, si avrebbe soltanto conservazione della frequenza, ma non quella della successione dei valori istantanei.

La modulazione in generale viene effettuata col sistema Heising (XII, 19). Occorre pertanto che la potenza raggiunta negli stadi a bassa frequenza sia adeguata a quella in giuoco nel circuito in cui si va ad

imprimere il segnale. Se si tratta di modulazione al 100 %, la potenza richiesta, come ci è noto, raggiunge, nelle *punte* della modulazione, la metà di quella interessata nel sistema a frequenza portante. Si comprende quindi che coi due gruppi di generatori, a radiofrequenza e ad audiofrequenza, si debbono raggiungere potenze dello stesso ordine di grandezza. Anzi, quantunque la seconda sia sempre minore della prima, tuttavia essa richiede necessariamente apparecchiature di maggiore entità, in quanto che, mentre negli stadi a radiofrequenza si utilizza in generale il funzionamento in classe C, e quindi si opera con elevato rendimento, cioè, per così dire, con elevato sfruttamento delle potenze dissipate, per quella ad audiofrequenza invece, la necessità di operare in regione lineare, cioè in classe A oppure B, costringe a tenere basso il rendimento ([1]).

La modulazione potrà effettuarsi in uno qualunque degli stadi di radiofrequenza che seguono il separatore, e, quanto prima essa verrà fatta, tanto minore sarà la potenza modulante da immettersi. Parrebbe quindi che vi fosse vantaggio ad eseguire la modulazione su stadi di piccola potenza. Ma è facile convincersi che un tale vantaggio sarebbe illusorio, perchè una volta effettuata la modulazione, per i successivi stadi non si può più consentire il funzionamento in classe C, ma occorre necessariamente imporre le stesse restrizioni che abbiamo visto doversi richiedere per gli stadi ad audiofrequenza, e pertanto il rendimento ne riuscirebbe sacrificato. Insomma, occorre sempre adattarsi ad operare con bassi rendimenti in tutti quegli stadi in cui, direttamente o indirettamente, è interessata l'audiofrequenza. E sotto questo aspetto è forse da ritenersi più vantaggioso che il sacrificio del rendimento venga fatto sulla potenza modulante anzichè sulla modulata, e precisamente, la prima essendo sempre sensibilmente minore di questa (nel caso di modulazione al 100 % il rapporto fra le due è 1 : 3), apparirebbe utile di modulare sullo stadio finale. Senonchè altre considerazioni — specialmente di carattere economico — possono talvolta consigliare di effettuare invece la modulazione su stadi di moderata potenza.

Molto minori sono le cautele da imporsi nel caso di trasmissioni tele-

---

([1]) Richiamando quanto a suo tempo (XI, 22) fu dimostrato, si ha che il rendimento di conversione di un generatore di classe B vale $\frac{E_a}{E_{a0}} \cdot \frac{\pi}{4}$, e pertanto, quando E_a varia sinusoidalmente con legge del tipo $E_a = A(1 + m \operatorname{sen} \Omega t)$, il rendimento medio durante un periodo della modulazione risulta $\frac{A}{E_{a0}} \cdot \frac{\pi}{4}$. Dovendosi poi (XI, 21) imporre la condizione che il massimo di E_a, cioè $A(1 + m)$, non superi ad es. $0{,}9\, E_{a0}$, ne segue pel rendimento medio il valore $\frac{0{,}9\pi}{4(1+m)}$. In particolare, per modulazione al 100%, esso sarà circa 0,35.

grafiche. Per esse tutti gli stadi che seguono il separatore possono funzionare in classe C, in quanto che l'unico elemento che interessa conservare è la frequenza.

La manipolazione, la quale in questo caso tiene il posto della modulazione, può quindi essere eseguita in uno stadio qualunque. Essa in generale si effettua interrompendo, nelle pause fra i segnali, il circuito di griglia del corrispondente stadio od anche polarizzando molto negativamente la griglia stessa.

Tanto nell'uno quanto nell'altro caso, occorre tenere presente che la modulazione — ed a maggior ragione la manipolazione — adduce a notevoli variazioni della potenza istantanea erogata dallo stadio finale. Per es. nel caso di modulazione al 100%, siccome l'ampiezza, durante un periodo della modulante (supposta sinusoidale), varia da 0 a $2A$, essendo A la ampiezza della portante, la potenza oscilla fra il valore nullo ed il *quadruplo* di quella corrispondente all'assenza di modulazione. Pertanto particolari accorgimenti si impongono per assicurare la costanza della tensione continua che alimenta i corrispondenti anodi, ad onta di tali notevoli variazioni di carico.

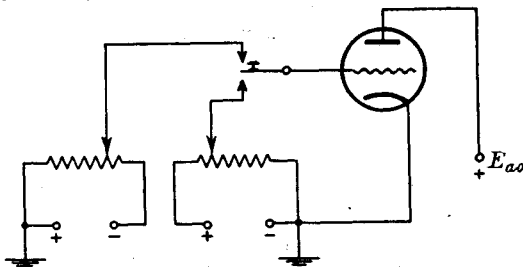



Fig. 337

Questo problema assume poi particolare importanza nel caso di complessi destinati a tramissioni radiotelegrafiche. Per questi anzi, quando non sia altrimenti provveduto coi mezzi di cui parleremo in appresso, si ricorre al così detto metodo per *assorbimento*, vale a dire si dispongono le cose in modo che, nelle pause della manipolazione, il sistema generatore finale, anzichè erogare sull'antenna trasmittente, eroghi su un equivalente carico ohmico, che può ad es. comodamente costituirsi con triodi le cui griglie siano fortemente eccitate con tensione positiva. Talchè, in definitiva, la funzione del dispositivo di manipolazione diviene paragonabile a quella di un commutatore, il quale, in una certa posizione (tasto abbassato) polarizza molto negativamente le griglie dei triodi di carico fittizio e conferisce la giusta polarizzazione a quella dei generatori destinati ad erogare sull'antenna, e nell'altra (tasto alzato) polarizza positivamente le prime e molto negativamente le seconde (fig. 337).

Non sempre però un complesso generatore radiotrasmittente comprende tutti gli stadi di cui si è parlato. A stretto rigore, può bastare un solo generatore (col relativo modulatore nel caso fonico) erogante di-

1
2
3
4
5
6
7
S
R
T
C
B.F.
+ 2000 V
− 65 V
− 250 V
+ 4000 V
1 – Stadio pilota a controllo piezoelettrico
2 – Stadio separatore
3 – Stadio modulato (classe C)
4-5 – Generatori in cascata (classe B)
6 – Stadio amplificatore bassa frequenza (B. F.)
3-7 – Gruppo modulatore (sistema Heising)
C – Condensatori di neutralizzazione
S – Bobine strozzatrici dell'alta frequenza
T – Trasformatore di modulazione
R – Resistenza (per abbassare la tensione)

Fig. 338

rettamente sul carico (antenna). Naturalmente, i criteri variano a seconda dell'importanza della stazione, della sua portata e del tipo di servizio ad essa richiesto, in quanto tali elementi influiscono sia sul grado di costanza della frequenza che si deve raggiungere sia sulla potenza del complesso.

In fig. 338 è schematicamente rappresentato un piccolo complesso trasmittente radiotelefonico atto a fornire una potenza utile di 1000 W in assenza di modulazione. Esso si compone di uno stadio pilota a quarzo con triodo da 50 W, che comanda uno stadio separatore con triodo di pari potenza. Questo alla sua volta va ad alimentare il circuito di griglia di un generatore con triodo da 50 W funzionante in classe C, sul cui anodo agisce la tensione modulatrice proveniente da un complesso a bassa frequenza alimentato inizialmente dalle correnti foniche. La modulazione, grazie all'applicazione di un acconcio sistema trasformatorico, può essere spinta al 100%. A tale stadio modulato seguono due stadi funzionanti in classe B, l'uno da 250 W, l'altro, finale, erogante sull'antenna trasmittente 1000 W (rispettivamente 1500 W nelle punte di modulazione). L'anodo dello stadio finale è alimentato a 4000 V, il complesso modulatore a 2000 V, ed a tensione alquanto inferiore (ottenuta mediante una resistenza zavorra) l'anodo dello stadio intermedio di 250 W. La polarizzazione delle griglie è ottenuta con un generatore di 65 V per tutti gli stadi precedenti il finale, mentre per questo è utilizzato un generatore a 250 V.

4. - Sorgenti di tensione continua. - Raddrizzatori di tensioni alternate. — Importantissimi accessori dei complessi generatori di una stazione radiotrasmittente sono le apparecchiature destinare a provvedere al riscaldamento dei catodi ed a fornire le tensioni continue necessarie per la polarizzazione dei circuiti di griglia e per l'alimentazione dei circuiti di placca dei triodi.

Nelle piccole installazioni si ricorre a pile od accumulatori, ma, nel caso di impianti importanti, a queste sorgenti si preferiscono quelle derivate dai generatori elettromeccanici. Senonchè alle dinamo a corrente continua non si possono richiedere tensioni superiori a un certo limite, e quantunque la moderna tecnica consenta di raggiungere con tali generatori anche alcune migliaia di volt, tuttavia il loro impiego va riducendosi sempre più, talchè ormai si può dire che la produzione di elevate tensioni continue (dell'ordine di 10, 20 e più kV) è esclusivamente riservata ai processi di rettificazione o raddrizzamento delle correnti alternate, il che fra l'altro presenta la grande comodità di poter fruire comodamente delle grandi distribuzioni di energia elettrica per uso industriale.

Tale rettificazione si compie essenzialmente mediante l'uso di conduttori a conduttività unilaterale, cioè del tipo diodi.

Per le ragioni già dette a suo tempo (VIII, 6), i diodi a vuoto spinto o kenotron non possono trovare proficua utilizzazione se non nel caso

in cui si tratti di rettificare tensioni piuttosto alte, nel qual caso la loro elevata resistenza interna non è di ostacolo al raggiungimento di un buon rendimento, e la potenza dissipata pel riscaldamento del catodo si riduce ad una trascurabile frazione della totale potenza in giuoco.

Una caratteristica assai importante che rende preziosi tali tubi è la loro attitudine a resistere ad elevate tensioni inverse. Per *tensione inversa* si intende la tensione negativa che, negli intervalli in cui il tubo non è conduttivo, risulta applicata fra anodo e catodo (VIII, 5). Si costruiscono invero dei kenotron capaci di erogare 7 ÷ 8 amp. ed atti a resistere a tensioni inverse di oltre **100 kV**.

Ma i tipi di diodi più comodamente usati per lo scopo di cui qui si tratta sono quelli a riempimento gassoso, e segnatamente quelli a vapori di mercurio a catodo caldo, che, come già fu segnalato a suo tempo, possono erogare correnti assai intense con d.d.p. di soli 15 ÷ 20 volt fra anodo e catodo. Anzi le condizioni di funzionamento debbono essere studiate in guisa da non superare 22 volt, per evitare che la caduta di un eccessivo numero di ioni positivi sul catodo abbrevi la vita di questo ultimo. Da tale esigenza consegue una limitazione per la corrente erogabile, in quanto che, col crescere di questa, cresce — per quanto in lievissima misura — la tensione fra anodo e catodo. Si deve peraltro osservare che la tensione inversa che tali apparecchi possono sopportare non è così elevata come per i kenotron di pari portata amperometrica. Per es., per tubi a vapori di mercurio da 2,5 amp., la tensione inversa sopportabile con sicurezza è di 2,5 kV, e si arriva a 20 kV per tubi da 20 amp.

Tuttavia queste limitazioni non sono proibitive per un largo e proficuo uso di questi rettificatori nella creazione delle tensioni continue occorrenti per i circuiti anodici e di griglia dei più grandi triodi con cui si costituiscono gli stadi finali dei complessi generatori radiotrasmittenti.

5. - Raddrizzatori monofasi. — I circuiti all'uopo utilizzabili sono di vario tipo, a seconda che il sistema delle tensioni da raddrizzare è mono-

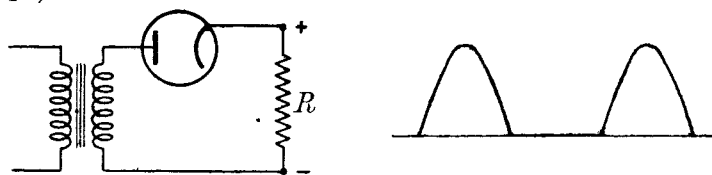



Fig. 339

fase o polifase, per il quale ultimo il caso che interessa la pratica è quasi esclusivamente quello del trifase.

Dei raddrizzatori di tensione monofase, ad un diodo o a due diodi, cioè, come si dice a *mezza onda* o a *onda piena*, è stato già parlato nel Cap. VIII, 5. Qui ci limiteremo ad aggiungere che, trascurando la caduta

di tensione entro il tubo, il valore medio E della tensione ottenuta è, nel primo caso, $\frac{E_m}{\pi}$, nel secondo $\frac{2E_m}{\pi}$, se E_m rappresenta il valore massimo della tensione alternata esistente fra ciascun catodo ed il polo negativo del circuito a corrente raddrizzata. Nel caso della fig. 339, E_m si riferisce alla tensione secondaria del trasformatore, in quello di fig. 340, la E_m corrisponde invece alla metà della tensione secondaria stessa. Nelle

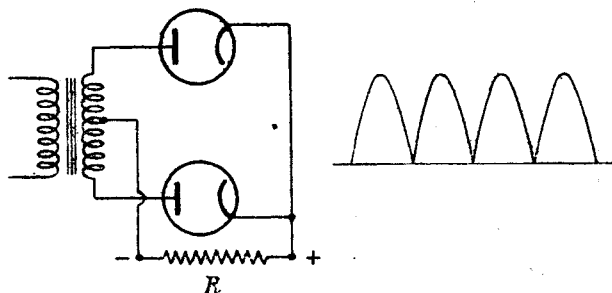
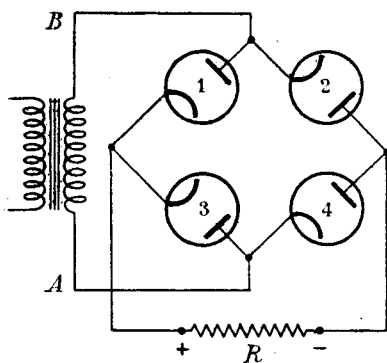



Fig. 340

stesse figg., accanto ad ognuno dei circuiti è indicata la forma della curva di tensione che va ad alimentare il circuito di carico, simboleggiato dalla resistenza R. Quanto alla tensione inversa E_i, essa è ovviamente uguale ad E_m nel primo caso, mentre nel secondo caso raggiunge $2E_m$: infatti, quando l'anodo di uno dei due tubi — e quindi il catodo dell'altro — si trova al massimo positivo della tensione, l'anodo di questo ultimo si trova al massimo negativo, e pertanto la d. d. p. fra i due elettrodi del secondo raggiunge appunto $2E_m$.

Fig. 341

In entrambi i casi il rapporto fra la tensione inversa massima E_i e la tensione media raddrizzata E vale

$$\frac{E_i}{E} = \pi .$$

Si può ottenere l'utilizzazione di entrambe le semionde anche senza far uso del punto centrale dell'avvolgimento secondario del trasformatore. Anzichè due tubi, ne occorrono allora quattro, secondo lo schema della fig. 341: ogni terminale del trasformatore è connesso ad un catodo e ad un anodo, i due catodi liberi costituiscono così l'estremo positivo, i due anodi l'estremo negativo del circuito di utilizzazione. In tal modo avviene che, oltre alla tensione esistente fra gli estremi A e B del secondario, si utilizza anche la sua opposta, cioè quella fra B ed A. Quando A è

positivo rispetto a B, sono conduttivi i diodi *2* e *3*, e pertanto attraverso essi la tensione BA produce corrente nel carico, nel successivo semiperiodo invece le stesse funzioni sono disimpegnate dai diodi *1* e *4*. Il diagramma della tensione ai capi del carico corrisponde dunque a quello dell'intera tensione secondaria del trasformatore, salvo il raddrizzamento delle semionde negative.

Rispetto al caso precedente, a parità di tensione fra A e B, il valore della tensione media E è doppio, mentre quello della tensione E_i rimane inalterato. Si ha pertanto:

$$\frac{E_i}{E} = \frac{\pi}{2} \cong 1{,}57 .$$

6. - Raddrizzatori trifasi. — Per rettificare sistemi trifasi di tensioni, si possono usare vari schemi, i quali però sostanzialmente si riducono a tre tipi fondamentali.

Col primo (fig. 342), che costituisce l'estensione del tipo monofase di fig. 340, si fa uso del punto centrale del sistema secondario del trasformatore di alimentazione, il quale pertanto deve essere connesso a stella. I tre terminali del secondario stesso sono connessi agli anodi di tre tubi: i tre catodi, fra loro metallicamente connessi, costituiscono il polo positivo del carico, mentre il polo negativo fa capo al centro della stella.

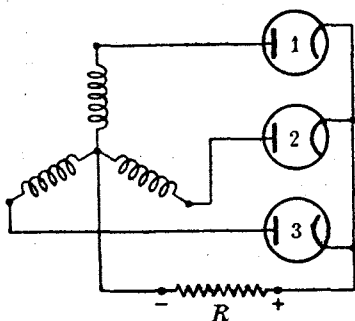



Fig. 342

Ci interessa conoscere la relazione fra il valore massimo E_m di ciascuna delle tensioni di fase del secondario del trasformatore, il valore medio E della tensione ai capi del carico, ed il massimo valore E_i della tensione inversa.

Per effettuare tali valutazioni, conviene servirsi della consueta rappresentazione delle tensioni dei tre rami del secondario mediante tre segmenti OA, OB, OC di lunghezza E_m e spostati angolarmente di 120° l'uno rispetto all'altro (fig. 343). Come è noto (El., VII, 3), se xx è una retta arbitraria, le proiezioni su di essa dei tre segmenti, supposti rotanti con velocità angolare uguale alla pulsazione, danno i valori istantanei e_1, e_2, e_3 delle tensioni fra il centro della stella e ciascuno dei morsetti secondari, e tali valori, se si prescinde dalle resistenze interne dei tubi e dalle impedenze interne dei circuiti del trasformatore, coincidono con quelli delle tensioni che si trovano applicate agli anodi.

Se intendiamo che le tensioni positive siano quelle dirette nel senso della freccia segnata su xx, avremo che l'adduzione della corrente al carico è affidata al tubo *1* (o *2* o *3*) per tutto il tempo per cui il vettore

OA (rispettivamente OB, OC) si trova ad avere proiezione positiva e superiore a quella di ogni altro. Ciò manifestamente avviene durante un terzo del periodo, e precisamente per quell'intervallo di tempo in cui OA percorre l'angolo $\widehat{A''OA'}$, essendo $\widehat{A'OA} = \widehat{AOA''} = 60^o$. Il valore medio della proiezione stessa uguaglia quindi il prodotto di E_m per la media di cos α fra $\alpha = -\frac{\pi}{3}$ e $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Si ha dunque:

Fig 343

$$E = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} E_m \cong 0{,}827 \; E_m \; (^1) .$$

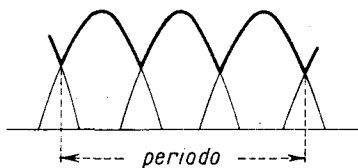
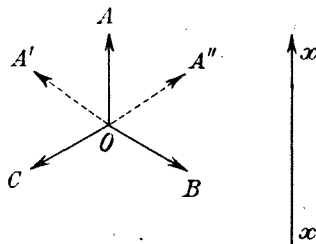
Il diagramma della tensione ai capi del carico è quello rappresentato con tratto pieno in fig. 344 e, come si vede, le sue fluttuazioni attorno all'ordinata media si compiono con frequenza tripla di quella delle tensioni di alimentazione. In considerazione del fatto che per ogni fase si utilizza una sola semionda, tale dispositivo viene comunemente denominato *a mezza onda*; è però da osservarsi che tale denominazione non è propria, in quanto che ogni semionda viene utilizzata, per ciascuna fase, per $\frac{2}{3}$ della sua durata. Quanto alla tensione inversa, essa corrisponde ovviamente al massimo valore della tensione fra due morsetti del secondario del trasformatore, cioè si ha:

periodo

Fig. 344

$$E_i = \sqrt{3}\,E_m ,$$

e, combinando con la precedente, si ha pel rapporto $\frac{E_i}{E}$ il valore:

$$\frac{E_i}{E} = \frac{2\pi}{3} \cong 2{,}09 .$$

Per utilizzare entrambe le semionde, si può modificare lo schema usando sei tubi anzichè tre e disponendo le cose in modo analogo a quello, che, nel caso monofase, ci ha condotto dal tipo di fig. 340 a quello di fig. 341. Basta all'uopo connettere ciascun terminale del trasformatore ad un catodo e ad un anodo, e gli estremi del carico ai tre catodi, rispettivamente ai tre anodi dei tubi i cui anodi (rispettivamente catodi) sono connessi ai terminali del trasformatore, come indicato in fig. 345.

(1) Infatti si ha $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos\alpha \, d\alpha = [\operatorname{sen}\alpha]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3}$.

Con tale disposizione la tensione media risulta doppia di quella che si aveva nel caso precedente, cioè:

$$E = \frac{3\sqrt{3}}{\pi} E_m \cong 1{,}654\, E_m\,,$$

dove E_m rappresenta al solito l'ampiezza della tensione stellata del trasformatore d'alimentazione, del che ci si può rendere conto pensando che il diagramma della tensione viene a corrispondere alla somma di uno come il precedente con quello che da esso si ottiene mediante lo spostamento di un semiperiodo, ed osservando che la media della somma di due funzioni coincide con la somma delle medie delle due. In fig. 346 tali due diagrammi sono quelli indicati con *a*) e *b*), e con *c*) è indicato il diagramma somma di essi, il quale presenta ovviamente oscillazioni, attorno alla sua ordinata media, sensibilmente minori del precedente ed aventi frequenza sestupla di quella della tensione d'alimentazione. Esso corrisponde evidentemente alla ripetizione di tratti di sinusoidi che hanno, come in figura, l'ordinata massima uguale a $\sqrt{3}E_m$, mentre l'estensione nel senso della ascissa angolare è soltanto di $\frac{\pi}{6}$, in luogo degli analoghi valori E_m e $\frac{\pi}{3}$ che si avevano nel caso precedente (1).

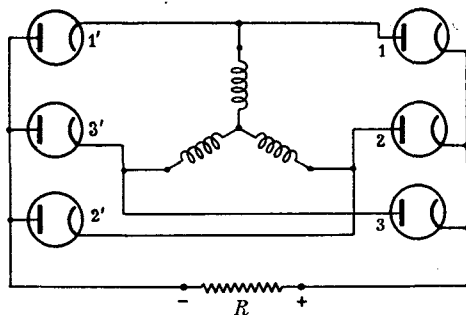
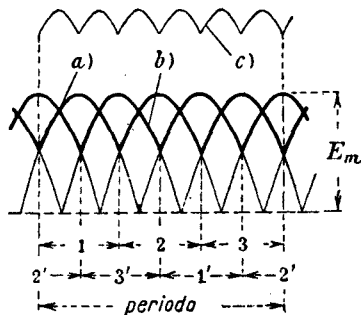



Fig. 345

Fig. 346

La tensione inversa massima conserva lo stesso valore $E_i = \sqrt{2}E_m$ del càso precedente, quindi si ha:

$$\frac{E_i}{E} = \frac{\pi}{3} \cong 1{,}045\,.$$

(1) L'ordinata media può dunque calcolarsi anche come prodotto di $\sqrt{3}\,E_m$ pel valore medio di $\cos\alpha$ fra $-\frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{6}$, con che si ritrova il valore di 1,654 E_m dianzi calcolato.

Come nello schema di fig. 342, anche qui si ha che ogni diodo adduce corrente al carico per $\frac{1}{3}$ del periodo, ma, conformemente alle indicazioni contenute nella fig. 346, in ogni istante vi sono sempre due diodi che partecipano a tale adduzione, ed essi si trovano disposti *in serie*.

Anche con altro schema si può ottenere che si abbia sempre il contemporaneo funzionamento di due tubi, ma invece con disposizione di questi *in parallelo*, ferma restando la condizione che ciascuno dei sei tubi partecipi al carico per $\frac{1}{3}$ di periodo. Esso è quello rappresentato in fig. 347: il trasformatore di alimentazione porta due secondari trifasi, identici, ma avvolti in senso opposto, ed i centri delle due stelle sono fra loro connessi, esternamente al trasformatore, mediante una bobina L a nucleo di ferro, il cui punto centrale costituisce il polo negativo del carico. I sei terminali dei sei secondari sono connessi agli anodi di sei diodi, i cui catodi, fra loro metallicamente connessi, costituiscono il polo positivo del carico.

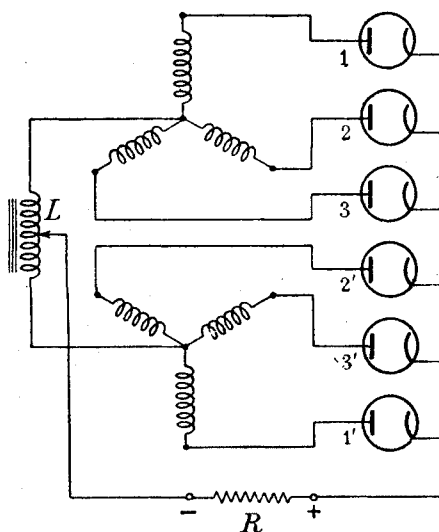



Fig. 347

Per comprendere l'ufficio della bobina L, occorre riflettere che, se i centri delle due stelle venissero connessi direttamente, il sistema dei due secondari non differirebbe da un secondario unico esafase, talchè, ragionando come nel caso di fig. 342, si concluderebbe che ogni tubo adduce corrente al carico soltanto per $\frac{1}{6}$ di periodo, e quindi non si avrebbe il contemporaneo funzionamento di due tubi. Volendo invece che ciascun tubo, come nei casi precedenti, partecipi all'alimentazione del carico per $\frac{1}{3}$ del periodo, occorre far sì che le due stelle, per così dire, possano funzionare l'una indipendentemente dall'altra. Se si pon mente al diagramma vettoriale delle sei tensioni interessate al sistema (fig. 348), si vede subito che ad es. i due tubi connessi ad *1* e *3'* possono contemporaneamente funzionare (e precisamente nell'intervallo di tempo in cui il vettore *1* percorre l'angolo α e *3'* l'angolo β) a condizione che i corrispondenti anodi possano trovarsi allo stesso potenziale rispetto al polo negativo del carico. Ora, per raggiungere tale intento, bisogna evidentemente che venga com-

pensata la differenza fra le tensioni che ciascuno presenta verso il centro della rispettiva stella. A tale funzione appunto provvede la bobina L, la cui induttanza consente precisamente di assorbire quella differenza, permettendo così ai sei tubi di partecipare alla erogazione di corrente ciascuno per $\frac{1}{3}$ del periodo. È da osservarsi che la corrente (raddrizzata) di carico è senza influenza magnetica sul nucleo di tale bobina, perchè le due metà di quest'ultima sono percorse da correnti uguali ed in senso opposto, e pertanto, data anche la elevata frequenza delle oscillazioni di cui sopra [1], la bobina stessa risulta di dimensioni assai ridotte in confronto a quelle del trasformatore d'alimentazione.

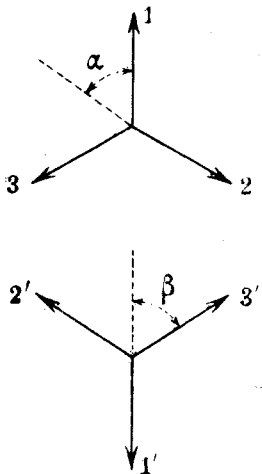



Fig. 348

Con tale dispositivo, la tensione ai capi del carico compie, attorno al suo valore medio E, oscillazioni di frequenza sestupla di quella delle tensioni di alimentazione. La media E poi risulta la stessa di quella che, a pari tensione E_m di ogni fase del secondario, si realizzerebbe col tipo di fig. 342, cioè si ha:

$$E = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} E_m = 0{,}827\ E_m ,$$

ma la tensione inversa massima E_i sale a $2E_m$, perchè tale è il valore della tensione massima istantanea fra due dei *sei* terminali del trasformatore, per cui si avrà:

$$\frac{E_i}{E} = 2{,}42 .$$

I circuiti primari dei trasformatori destinati all'alimentazione dei sistemi descritti in questo num. sono sempre connessi a triangolo, allo scopo di meglio equilibrare elettricamente e magneticamente i trasformatori stessi.

7. - Filtri. — Le tensioni raddrizzate ottenibili coi sistemi di cui ci siamo occupati nei due nn. precc. ovviamente non sono rigorosamente continue, e pertanto i sistemi stessi debbono completarsi con opportuni

---

[1] Tale frequenza è tripla di quella delle tensioni di alimentazione, del che ci si può agevolmente render conto riflettendo che il diagramma delle oscillazioni di cui si parla non è altro che quello della differenza fra le ordinate di due curve come le *a*) e *b*) di fig. 346.

filtri, cioè con dispositivi atti a ridurre quanto più è possibile le oscillazioni che la tensione compie attorno al suo valore medio E.

Queste oscillazioni, come si è osservato, hanno le frequenze f, $2f$, $3f$, $6f$ rispettivamente nei casi corrispondenti agli schemi delle figg. 339; 340 e 341; 342; 345 e 347. Esse non sono mai sinusoidali, ma pensandole sviluppate in serie di Fourier [1], le potremo ritenere risultanti dalla coesistenza di successive armoniche delle frequenze fondamentali predette. In ogni caso è evidente che l'efficienza dei filtri dovrà commisurarsi alla frequenza delle componenti armoniche che si hanno da eliminare nonchè alla entità della loro ampiezza rispetto al valore medio della

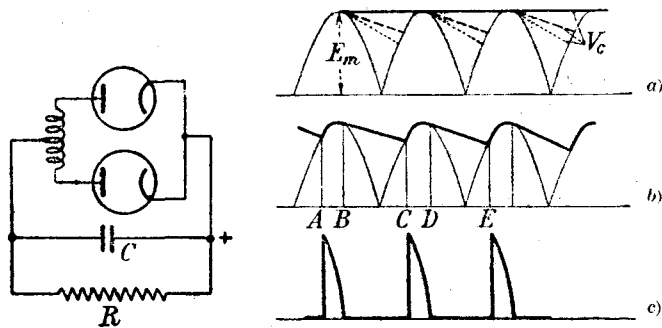



Fig. 349

tensione raddrizzata. Così, nel caso ordinario di $f = 50$ Hz, si avrà a che fare con elementi estranei di frequenze 50, 100, 150, 300 rispettivamente per i vari schemi sopra richiamati, e di ampiezze relative che, passando dal primo all'ultimo gruppo, vanno via via diminuendo.

Gli elementi essenziali per la costituzione di tali dispositivi filtranti sono, come risulta in generale da quanto abbiamo veduto al Cap. VI, le reattanze, cioè le induttanze e le capacità. Nel caso attuale, dovendosi sostanzialmente costituire dei filtri passa-basso, le induttanze saranno sempre disposte in serie e le capacità in derivazione.

Conviene pertanto esaminare separatamente l'effetto di una induttanza in serie e quello di una capacità in derivazione.

Cominciando da questa, supponiamo in primo luogo che il circuito di utilizzazione sia aperto, cioè sia infinita la resistenza di carico. Se, per fissare le idee, ci riferiamo al raddrizzatore monofase a doppia onda (fig. 349), si avrà che, non appena la d. d. p. alle armature del condensatore avrà raggiunto il valore corrispondente alla ordinata massima E_m del diagramma di fig. 349 *a*), la tensione V_c del condensatore si trova a non essere mai inferiore a quella, ad essa opposta, fornita dai generatori che alimentano i due diodi, e pertanto, non essendo mai possibile

[1] Per i casi di fig. 338 e 340 un tale calcolo è fatto in App., *A*, 8.

la scarica del condensatore stesso, la tensione V_c si serba costantemente uguale a quella ordinata massima, come indicato in figura dalla linea orizzontale a tratto pieno.

Ma se il circuito è caricato con una resistenza R, il condensatore può, dopo avere raggiunto la tensione E_m, iniziare la sua scarica attraverso R. Pertanto la V_c andrà diminuendo con legge esponenziale fino a che la corrispondente curva — linea tratteggiata — non incontri la successiva semionda, dopo di che il condensatore può nuovamente caricarsi fino alla tensione E_m (1) assorbendo corrente dal generatore, per poi scaricarsi come dianzi, e così via.

La linea punteggiata indicata nella stessa figura rappresenta l'analogo andamento del fenomeno, ma per un valore più piccolo della resistenza di carico R.

Un tale dispositivo non differisce essenzialmente da quello da noi esaminato in altre occasioni (XI, 31; XII, 12). Possiamo dunque, analogamente a quanto fu allora osservato, asserire che la corrente nel circuito di carico è sostanzialmente erogata dal condensatore, il quale riversa nel circuito stesso, distribuendole negli intervalli di tempo come BC, DE (fig. 349 *b*)), le cariche che esso ha prelevato dalla sorgente negli intervalli come AB, CD. La funzione livellatrice che il condensatore esplica nei riguardi della corrente di carico è dovuta alla sua attitudine ad immagazzinare cariche elettriche per poi distribuirle nel tempo; e, quanto al grado di livellazione della corrente nel carico R, esso dipende essenzialmente dalla costante di tempo RC del sistema costituito dal condensatore e dal carico, nel senso che la regolarità della corrente in R sarà tanto maggiore quanto maggiore è il prodotto RC in confronto degli intervalli di tempo compresi fra due creste successive del diagramma della tensione, cioè in definitiva quanto maggiore è l'angolo della impedenza (R, C) valutata alla frequenza del diagramma stesso.

Per quanto riguarda invece la corrente prelevata dalla sorgente, il suo andamento risulterà tanto più irregolare quanto più grande è quell'angolo, in quanto che la erogazione di essa (fig. 349 *c*)) è limitata agli intervalli come AB, CD, la cui entità varia in senso opposto a quella degli intervalli BC, DE.

Con tale dispositivo dunque, se $RC\omega$ è abbastanza grande, si realizza una discreta costanza della corrente nel carico, ed un valore della tensione pure poco variabile attorno ad un certo valore medio, variabile necessariamente col variare del carico R; mentre la erogazione di corrente da parte del generatore avviene ad impulsi, come schematicamente indicato nel diagramma di fig. 349 *c*).

(1) Si suppongono, al solito, trascurabili la resistenza interna dei diodi attraverso ai quali si effettua la carica, e le impedenze interne dei trasformatori di alimentazione.

Come si vede, con l'aumentare del carico, cioè col *diminuire* di R, la corrente nel carico avrà andamento via via meno règolare, e così pure avverrà della tensione utile, ma — e ciò è particolarmente importante — il valore massimo della tensione V_c non cessa di essere assai prossimo ad E_m, fatto questo che deve essere bene tenuto presente nello studiare il dimensionamento del condensatore.

La regolarità della corrente erogata dal generatore va invece aumentando, nel senso che migliora il rapporto fra il tempo di erogazione ed il periodo, pur avendo essa sempre la caratteristica fondamentale di un diagramma la cui ordinata massima è assai maggiore della media, del che occorrerà tenere conto nel dimensionamento dei diodi.

Per farsi un'idea dei valori da assegnare alla capacità C, si pensi che, se con I_m si indica il valor medio della corrente fornita dal generatore durante il tempo τ di effettiva erogazione, e con I il valor medio della corrente nel carico, si avrà:

$$I_m\tau = TI ,$$

essendo T il semiperiodo della tensione alternata alimentatrice. Se poi si indica con p il rapporto fra la variazione della tensione ai capi del condensatore durante τ e la tensione media E, la carica assorbita dal condensatore nell'intervallo τ sarà espressa da pCE. D'altra parte, potendosi, in prima approssimazione, ritenere che questa carica sia uguale al prodotto della corrente media I per la durata $T-\tau$ della scarica, si avrà:

$$pCE = I(T-\tau) ,$$

dalla quale relazione, sostituendo a τ il valore $\frac{IT}{I_m}$ ricavato dalla precedente, si ottiene:

$$C = \frac{IT}{pE}\left(1-\frac{I}{I_m}\right).$$

Per es. per $p = \frac{1}{50}$, $T = 10^{-2}$ sec (frequenza d'alimentazione 50 Hz), $E = 400$ V, $I = 0{,}04$ A, $I_m = 0{,}05$ A, si avrebbe $C = 10\,\mu$F.

Esaminiamo ora l'effetto di una induttanza L posta in serie. La tensione ai morsetti di uscita compie, attorno al suo valore medio E, delle oscillazioni che, mediante lo sviluppo di Fourier, potremo pensare al solito decomposte nelle successive armoniche, la cui fondamentale avrà una certa pulsazione ω legata al tipo di rettificatore considerato ed alla pulsazione ω_0 di alimentazione. In particolare, nel caso di cui ci stiamo occupando, sarà $\omega = 2\omega_0$, e pertanto la predetta tensione si comporrà di una parte costante E e di elementi sinusoidali di pulsazioni ω, 2ω, 3ω, ... La induttanza L introduce nel circuito di carico una reattanza i cui valori, per le predette componenti, sono $L\omega$, $2L\omega, \ldots$, mentre per

la componente costante E la reattanza stessa ha un valore nullo. Ne consegue una depressione delle componenti variabili delle correnti ed una regolazione della tensione ai capi del carico, tanto più efficienti, per un dato R, quanto maggiore è L. La riduzione delle componenti armoniche delle correnti fa sentire i suoi effetti anche sul sistema alimentatore, il quale pertanto si trova a funzionare con erogazioni più regolari di quelle che si avevano nel caso precedente. Più esattamente, la forma di tali erogazioni si presenta approssimativamente come in fig. 350 *b*), cioè il diagramma relativo ha l'aspetto di una curva *sfasata* in ritardo rispetto a quella della tensione variabile, che alla sua volta può in prima approssimazione assimilarsi ad una sinusoide di pulsazione $2\omega_0$ svolgentesi attorno alla ordinata della tensione media E (1). La tensione ai capi del carico si trova invece liberata dalle componenti alternative assorbite da L, e conseguentemente le sue oscillazioni attorno al valore medio non raggiungono massimi così notevoli come quelli che si avevano nel caso precedente.

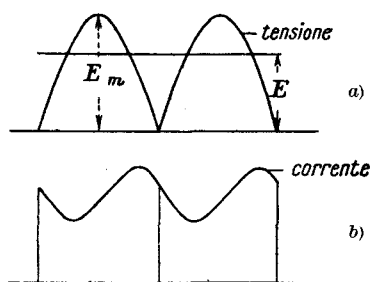



Fig. 350

Ciascuno dei dispositivi esaminati può poi efficacemente integrarsi con l'altro. Si perviene così ai tipi di filtri rappresentati nelle figg. 351 *a*) e *b*), nel primo dei quali l'elemento d'entrata è il condensatore, nel secondo

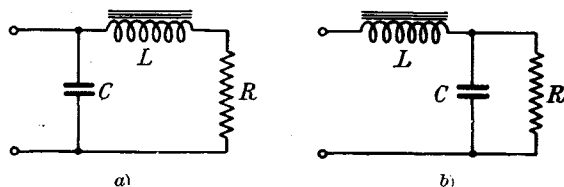



Fig. 351

l'induttanza. Nel primo l'induttanza L tende ad assorbire la componente variabile della tensione ai capi di C ed a conferire alla corrente di scarica un valore pressochè costante, con che la tensione stessa ai capi di C, durante la scarica, compirà le sue variazioni con legge più prossima alla lineare che alla esponenziale. Nel secondo, il condensatore tende invece ad assorbire le componenti variabili della corrente erogata dal complesso

(1) Tale sfasamento, che sarebbe di un quarto di periodo se fosse $R = 0$, andrà via via diminuendo mano a mano che aumenta R.

rettificatore-induttanza, caricandosi e scaricandosi con alterna vicenda. A parità di carico, la tensione media ai capi di R riesce minore nel secondo caso che nel primo.

Per quanto riguarda il cimento dei vari organi, secondo quanto precedentemente è stato detto, occorre tener presente, che, con lo schema *a*), il primo condensatore è sollecitato a massimi di tensione assai maggiori

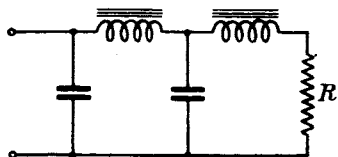



Fig. 352

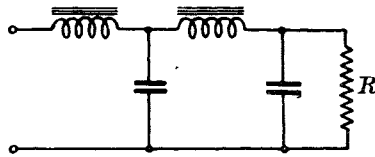



Fig. 353

che col *b*), e che i massimi di intensità della corrente diodica sono pure assai notevoli, in relazione al fatto che l'assorbimento della corrente di carica da parte del condensatore d'entrata si verifica per breve tempo.

Le cellule filtranti effettivamente usate in pratica si compongono in generale di più d'uno dei sistemi descritti. In generale due elementi opportunamente dimensionati bastano per raggiungere la regolarità richiesta. Si arriva così ai tipi schematicamente indicati nelle figg. 352 e 353.

8. - Raddrizzatori a tre elettrodi. — Recentemente sono stati introdotti nella Tecnica dei diodi a vapori di mercurio muniti di un terzo elettrodo (griglia) il quale, analogamente a quel che si pratica nei raddrizzatori a macchia catodica (El., XVI, 1), non compie, come per i poliodi a vuoto spinto, una vera e propria funzione di controllo, ma si limita a consentire o meno il funzionamento del diodo per determinati intervalli di tempo. Precisamente, siccome la griglia può impedire tale funzionamento quando ad essa sia attribuita una tensione fortemente negativa rispetto al catodo, lo scopo predetto è ottenuto connettendo la griglia stessa con una opportuna sorgente di tensione negativa, e regolando, con un commutatore azionato da un motorino sincrono alimentato dalla stessa tensione da raddrizzare, l'istante in cui si inizia il funzionamento del corrispondente diodo.

In tal modo, mediante una semplice regolazione del calettamento del commutatore predetto, si consegue la possibilità di far variare la frazione di periodo durante la quale è consentito il passaggio della corrente attraverso il diodo.

Nei sistemi destinati all'alimentazione di grandi complessi trasmittenti, una tale possibilità riesce particolarmente utile nella fase d'*avviamento* nel sistema, in quanto essa permette che il carico dell'alimentatore venga portato gradualmente da zero al suo valore normale.

9. - Filtrazione delle tensioni fornite da generatori elettromeccanici. — L'uso di cellule filtranti come quelle descritte nel n. 7 non si impone soltanto nel caso di raddrizzatori a diodi, ma anche quando le tensioni continue sono ottenute con generatori elettromeccanici, in quanto che evidentemente anche in questo caso la tensione generata è sempre oscillante attorno al suo valore medio, e precisamente con una frequenza dipendente dalla costituzione dell'avvolgimento (El., XI, 1).

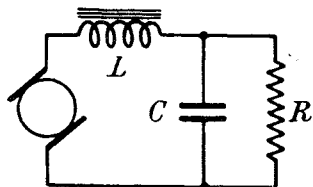
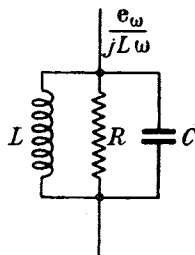



Fig. 354

Il funzionamento delle corrispondenti cellule filtranti è però più semplice che non nel caso di raddrizzatori a diodi, in relazione al fatto che, mentre questi rappresentano tratti di circuito la cui resistenza, a seconda del senso della corrente, è trascurabile oppure infinita, nel caso delle dinamo si tratta invece sempre solo del primo caso.

Pertanto il sistema filtrante può essere studiato come un ordinario sistema di impedenze alimentato da una f. e. m. risultante in generale da infinite armoniche.

Fig. 355

Per es., se si tratta di un filtro del tipo indicato in fig. 354, composto di una induttanza di entrata L e di una successiva capacità in derivazione C, se R è la resistenza di carico, si potrà agevolmente calcolare la componente di pulsazione ω che percorre il carico R al modo seguente. Detta $\mathbf{e}_\omega$ la componente della relativa tensione, il sistema disegnato può ritenersi equivalente a quello di fig. 355 alimentato dalla corrente $\dfrac{\mathbf{e}_\omega}{jL\omega}$ (I, 12). Pertanto, per la corrente nel ramo R si avrà:

$$\mathbf{I}_\omega = \frac{\mathbf{e}_\omega}{jL\omega} \cdot \frac{\dfrac{1}{R}}{\dfrac{1}{jL\omega} + jC\omega + \dfrac{1}{R}} = \frac{\mathbf{e}_\omega}{R(1 - LC\omega^2) + jL\omega},$$

il cui modulo vale:

$$I_\omega = \frac{e_\omega}{\sqrt{R^2(1 - LC\omega^2)^2 + L^2\omega^2}}.$$

Suppongasi ad es. che si tratti di una dinamo di 40 kW a 2000 volt, cioè destinata ad un carico normale di:

$$\frac{2000^2}{40\,000} = 100\ \Omega\,,$$

e che gli elementi del filtro abbiano i valori $L = 1H$, $C = 2\mu F$. Per le componenti di pulsazione 2000, 4000, 6000 (frequenze 320, 640, 960 Hz), si avrebbe rispettivamente:

$$\cong \frac{e_{2000}}{2120}, \quad \frac{e_{4000}}{5000}, \quad \frac{e_{6000}}{9250},$$

valori questi assolutamente trascurabili in quanto che le tensioni che compaiono al numeratore sono sempre frazioni assai esigue della tensione continua ai morsetti della macchina. Ad es. per una macchina a due poli avente un avvolgimento diviso anche in sole 36 sezioni, essendo 1200 giri/min = 20 giri/sec la velocità dell'indotto, la frequenza minima delle componenti armoniche sarebbe:

$$20 \cdot 36 = 720 \text{ Hz} \quad (\omega = 4520),$$

e l'oscillazione *massima* della tensione sarebbe di (El., XI, 1)

$$\left(1 - \cos\frac{\pi}{36}\right) 2000 = 0{,}0038 \cdot 2000 \cong 8 \text{ volt}.$$

Molto spesso, nel caso di dinamo, la induttanza d'entrata può addirittura essere soppressa, essendo sufficiente quella offerta dagli avvolgimenti della macchina stessa.

10. - Alimentazione dell'aereo. — La energia fornita dai complessi generatori di una stazione r. t. viene poi, in definitiva, utilizzata nei sistemi trasmettitori, cioè negli aerei o antenne trasmittenti.

Nelle piccole installazioni, l'antenna costituisce senz'altro il circuito di carico dell'ultimo stadio, oppure è accoppiata magneticamente al circuito anodico dello stadio stesso. L'inserzione potrebbe anche farsi nel ramo capacitivo, ma ciò non è in generale raccomandabile in quanto che (VI, 13) in questo ultimo le componenti armoniche della corrente anodica hanno intensità non del tutto trascurabili, e pertanto ne risulterebbe una emissione meno *pura*.

Negli impianti di maggiore rilievo, l'antenna è spesso situata ad una certa distanza dal luogo ove sono installati i complessi generatori, ed allora si presenta la necessità di una «linea» di collegamento fra questi ed il sistema radiante propriamente detto.

Particolari accorgimenti si impongono nello studio e nella esecuzione di tali linee, inquantochè esse debbono soddisfare ai requisiti fondametali di:

a) consentire l'effettivo trasferimento dell'energia al sistema radiante,

b) non dare luogo a sensibili perdite energetiche.

Per soddisfare al primo requisito è necessario che la linea sia chiusa sulla sua impedenza caratteristica; giacchè in caso contrario si avrebbe,

almeno parzialmente, una distribuzione di tipo stazionario cui conseguono pendolazioni energetiche fra i suoi estremi (generatore ed antenna) cioè, in definitiva, riduzione dell'energia effettivamente trasferita all'organo radiante. Per raggiungere tale intento, occorrerebbe che l'impedenza del carico terminale (antenna) uguagliasse esattamente l'impedenza caratteristica della linea. In generale ciò non avverrà, e pertanto si ricorrerà ad uno qualunque dei mezzi noti (Cap. VI) per realizzare l'uguaglianza desiderata. Per es., se si volesse usare il collegamento a ponte descritto in VI, 3 (fig. 111) e si trattasse di *adattare* una resistenza terminale di 50 Ω ad una linea avente l'impedenza caratteristica di 800 Ω, essendo $\omega = 10^7$, si determinerebbero i valori di L e C mediante le relazioni:

$$\frac{L}{C} = 4 \cdot 10^4 , \qquad LC = 10^{-14} ,$$

da cui

$$L = 20\,\mu\text{H} , \qquad C = 500\,\mu\mu\text{F} .$$

Per il secondo requisito, si esige che la linea abbia piccolissimi valori delle costanti g ed r (V, 2). Perchè sia piccola g occorre che la linea stessa sia assai bene isolata; affinchè sia piccolo r bisogna che i conduttori presentino una piccola resistenza ohmica — da valutarsi tenendo conto dell'effetto pellicolare (II, 4) — e che la linea *non irradii*, in quanto che, come sappiamo (IX, 7), l'attitudine radiativa mette in giuoco una resistenza equivalente, la resistenza di radiazione.

Nel caso di onde corte, che è quello in cui più di frequente si presenta la necessità di una linea di alimentazione elettricamente lunga, a queste ultime condizioni si soddisfa abbastanza bene costituendo la linea stessa con due conduttori foggiati a cilindri concentrici, convenientemente isolati l'uno dall'altro, e di cui l'esterno è in comunicazione col suolo.

Connessioni di questo tipo fra i sistemi generatore e radiatore si incontrano, specie nel caso di onde corte, anche senza che sia soddisfatta la prima delle due condizioni sopra espresse, cioè senza che la linea sia chiusa all'estremità sulla sua impedenza caratteristica, ma allora non si tratta di una connessione propriamente detta, bensì piuttosto di un organo, che, pur non avendo di per sè proprietà radianti, fa parte integrante del sistema radiante, come vedremo nel Cap. seg.

11. - Vari tipi di antenne per onde lunghe e medie — Il sistema radiante propriamente detto assume diversi aspetti a seconda che si tratti di onde lunghe e medie, oppure di onde corte. La trattazione del secondo caso, in quanto involge generalmente anche problemi inerenti alla direttività dell'onda emessa, verrà fatta nel prossimo Capitolo: qui ci limiteremo ad occuparci del primo caso, cioè delle antenne per onde lunghe e medie.

Il tipo fondamentale da cui tali aerei si possono ritenere tutti derivati è quello costituito da un semidipolo verticale (IX, 5) con l'estremo inferiore connesso al suolo. Approssimativamente equivalente a questa è la disposizione a *ventaglio* (fig. 356), in cui si ha un complesso di semidipoli fra loro riuniti alle estremità inferiori, ed allontanati alle superiori, le quali sono fra loro metallicamente connesse.

Fig. 356

In generale, allo scopo di avvicinarsi al semidipolo classico, si presenta in generale la necessità di concentrare, per quanto possibile, una conveniente capacità in alto. Ciò si ottiene mediante un sistema di conduttori disposti alle estremità superiori, in direzione orizzontale o quasi.

I tipi più semplici di antenne cui così si perviene sono quelli così detti ad L rovesciato ed a T, schematicamente rappresentati nelle figg. 357 *a*) e *b*). I tratti orizzontali superiori possono interpretarsi come elementi atti a determinare una capacità concentrata, od anche, più esattamente, come prolungamenti della parte verticale.

Per tali prolungamenti la ipotesi della costanza della capacità per unità di lunghezza è senza dubbio più attendibile che per il tratto verticale. Così, nel caso di eccitazione sulla lunghezza d'onda fondamentale, il diagramma della distribuzione della corrente può al solito (V, 12) in-

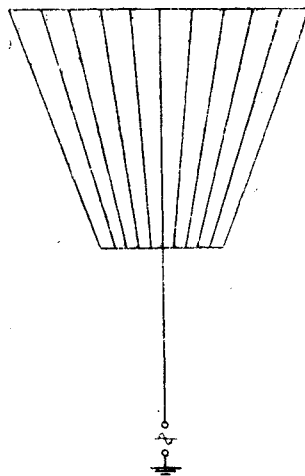
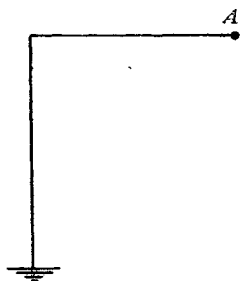
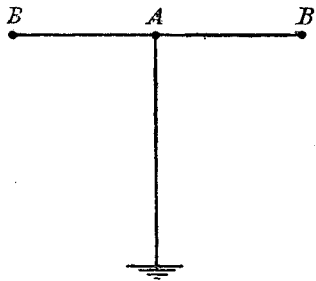



Fig. 357 *a*) Fig. 357 *b*)

tendersi rappresentato da un quarto di sinusoide, essendo il punto nodale situato all'estremità effettiva A, rispettivamente B (e B') nelle due disposizioni delle figg. prec., ove è da avvertire che, per la seconda, i due tratti orizzontali si comportano come due *derivazioni* rispetto al tratto verticale, cosicchè i diagrammi stessi si presentano come indicato nelle figg. 358 *a*) e *b*).

Sostituendo al filo unico orizzontale un sistema di più fili paralleli, non si ottengono sistemi sostanzialmente distinti dai precedenti. Natu-

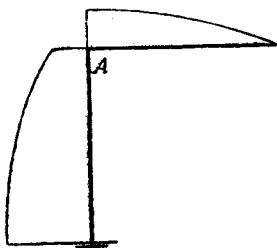



Fig. 358 *a*)

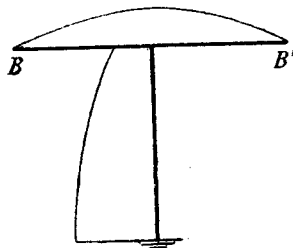



Fig. 358 *b*)

ralmente, la capacità unitaria risulta in tal caso moltiplicata per il numero n dei fili, perchè i condensatori costituiti da questi e dal suolo sono fra loro in parallelo; e per la stessa ragione la induttanza unitaria l riesce divisa per n (1).

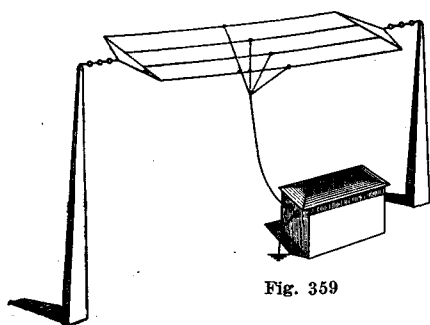



Fig. 359

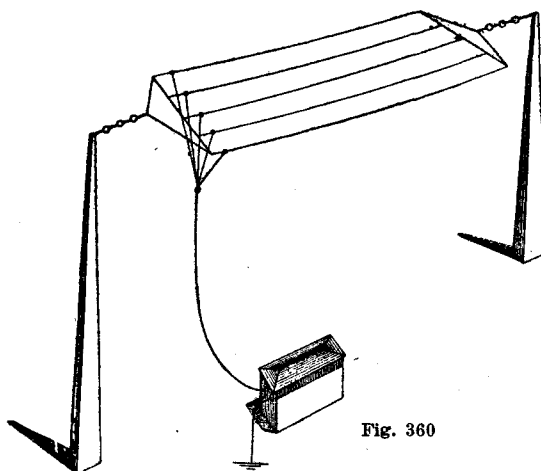
Si perviene così ai tipi schematicamente rappresentati nelle figg. 359 e 360, corrispondenti rispettivamente a quelli delle figure 357 *b*) e 357 *a*).

A questi tipi fondamentali sono sostanzialmente riducibili le ormai classiche antenne ad onde lunghe, fra le quali citeremo qui quella di S. Paolo (Roma), quella di Croix d'Hins (presso Bordeaux), quella di Sainte Assise (Parigi). Per es., il terminale superiore di quest'ultima è costituito con 40 fili metallici di 300 metri di lunghezza, sostenuti da enormi piloni a traliccio dell'altezza di 250 metri.

Fig. 360

(1) Così non muta il prodotto lc, che sappiamo equivalere all'inverso del quadrato della velocità della luce.

A questi dispositivi può approssimativamente ricondursi il tipo così detto ad *ombrello* rappresentato in fig. 361, che si trova per lo più appli-

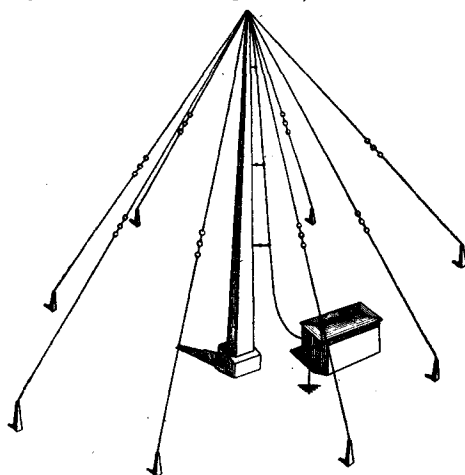



Fig. 361

cato nelle installazioni di carattere mobile, quantunque non ne manchino esempi anche in istallazioni fisse (per es. Nauen presso Berlino).

12. - Prese di terra. — L'estremo inferiore delle antenne di ognuno dei tipi suindicati deve essere connesso con quegli strati del suolo che si comportano approssimativamente come conduttori di bassa resistenza.

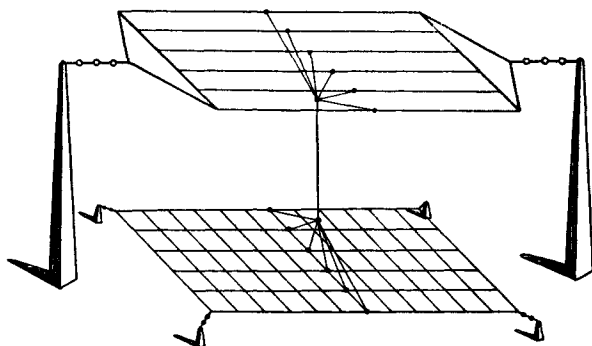
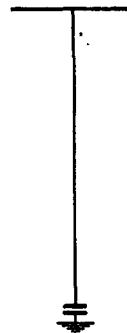



Fig. 362 *a)* Fig. 362 *b)*

Qualora gli strati superficiali non consentano di fare assegnamento su un valore sufficientemente elevato della conducibilità (terreni granitici, sabbiosi, ecc.), occorre immergere profondamente la presa di terra propriamente detta, limitandola eventualmente a pochi punti. In tali casi però si ricorre spesso anche ad un altro artificio, quello cioè di sostituire al

suolo una rete di conduttori situati a fior di terra, o poco sotto, od anche addirittura superiormente al suolo, ma isolati da questo, e costituenti il così detto *contrappeso* (fig. 362 *a*)). Un tale sistema è riducibile allo schema di fig. 362 *b*), cioè ad un'antenna caricata, oltre che con capacità terminale, anche con capacità alla base. Talvolta infine — secondo un dispositivo suggerito da Alexanderson — i conduttori superiori e gli inferiori sono fra loro connessi mediante induttanze, un punto opportuno delle quali è connesso con gli strati permanentemente umidi del sottosuolo (fig. 363).

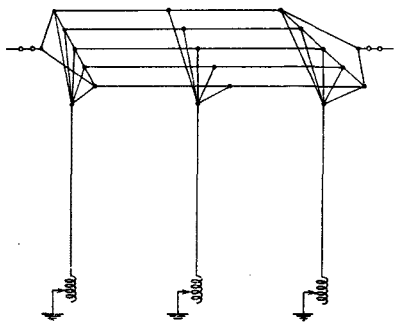



Fig. 363

In certi casi poi, come ad es. per aerei a bordo di un velivolo, la sostituzione di un contrappeso alla presa di terra propriamente detta si impone addirittura.

13. - Potenza irradiata e dissipata. - Rendimento. — Per valutare la potenza che il complesso generatore deve immettere nel sistema radiante, occorre conoscere innanzi tutto la costituzione dell'antenna propriamente detta, e specialmente la sua *resistenza di radiazione*, in quanto che, come sappiamo (IX, 7), a questa si commisura quello che si potrebbe chiamare il *carico utile*. A questo poi debbono aggiungersi tutte le altre potenze che il sistema radiante, durante il suo funzionamento, richiede per sopperire alle inevitabili dissipazioni, talchè la potenza W erogata dai generatori viene a corrispondere alla somma della potenza irradiata P_i e di quella dissipata P_d. Quest'ultima alla sua volta può distinguersi in due parti, a ciascuna delle quali si commisura una particolare resistenza equivalente (nel senso spiegato in II, 1), e precisamente si hanno:

a) perdite di potenza localizzate nei conduttori. Si tratta in primo luogo di quelle dovute all'effetto Joule nei conduttori costituenti l'antenna propriamente detta e la eventuale linea che l'alimenta, ed in quelli sui quali l'antenna agisce trasformatoricamente (ad es. masse metalliche vicine). A tali potenze corrisponde una resistenza ohmica effettiva, il cui valore, a causa dell'effetto di pelle, varia in generale con la frequenza f di lavoro e precisamente, come sappiamo (II, 5), in misura proporzionale a $\sqrt{f}$. Rientrano nello stesso tipo le perdite che si verificano nel suolo pel fatto che la conducibilità non è infinita, e in generale in tutti quei corpi più o meno conduttori che vengono investiti dalle linee del campo elettrico; in particolare quindi anche negli stessi dielettrici (aria, isolatori, ecc.) in quanto essi non sono mai perfettamente tali;

b) dissipazioni dovute a fenomeni di isteresi dielettrica (cfr. II, 14), e quindi necessariamente localizzate nei dielettrici.

Le resistenze equivalenti a tali perdite sono tutte variabili con la frequenza e precisamente, mentre le prime, come si è detto, variano con la radice quadrata della frequenza, le seconde invece risultano all'incirca inversamente proporzionali alla frequenza stessa f. Invero, come per l'analogo caso magnetico, l'energia dissipata per isteresi in un dato volume di dielettrico, per una data intensità di campo F (e quindi per una data tensione V), ha un valore ben determinato per ogni periodo dell'alternazione di questa, e quindi la potenza P risulta proporzionale a $V^2 f$; talchè la resistenza equivalente risulta inversamente proporzionale ad f.

La resistenza complessiva R di un'antenna si può dunque pensare decomposta in tre parti, l'una delle quali, la resistenza di radiazione R_i,

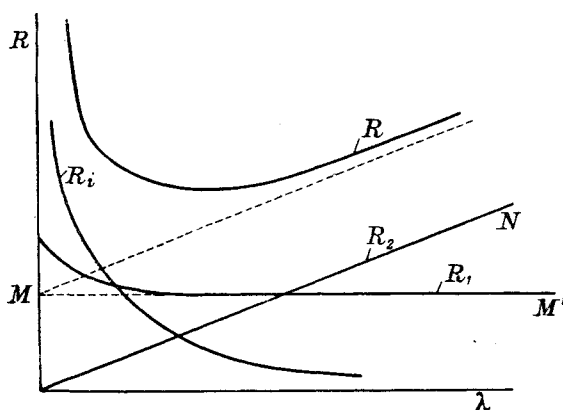



Fig. 364

è la parte utile, ed è inversamente proporzionale al quadrato della lunghezza d'onda λ (IX, 7), le altre due, R_1 e R_2, a carattere dissipativo, sono rispettivamente l'una inversamente proporzionale a $\sqrt{\lambda}$, l'altra direttamente proporzionale a λ.

Il numero η definito da

$$\eta = \frac{R_i}{R} = \frac{R_i}{R_i + R_1 + R_2}$$

misura quello che si chiama il *rendimento* dell'antenna, in quanto esso corrisponde al rapporto fra la potenza utile ai fini della radiazione e la potenza totale assorbita dal sistema radiante.

È interessante osservare che esiste in generale una lunghezza d'onda cui corrisponde un valore minimo di R. Infatti, se si tracciano i diagrammi di R_i, R_1, R_2 in funzione di λ, essi si presentano come alla fig. 364, e

precisamente, quello di R_i ha un andamento all'incirca iperbolico [1] discendente, il secondo non è molto dissimile da una parallela MM' all'asse λ, il terzo è una retta ON uscente dall'origine con inclinazione tanto maggiore quanto maggiore è il rapporto $\frac{R_2}{\lambda}$. La somma dei tre diagrammi si ottiene agevolmente conducendo da M la parallela ad ON ed aumentando le ordinate della curva R_i di tanto quant'è la corrispondente ordinata di tale parallela. Si comprende che, se l'inclinazione di questa, come generalmente accade, è sufficientemente grande, il diagramma cui si perviene presenta una ordinata minima.

Il rendimento di antenna è in generale assai piccolo se l'onda di lavoro è molto lunga, perchè, come ci è noto, in tal caso risulta piccola la resistenza di radiazione, mentre le resistenze dissipative non possono ovviamente scendere al di sotto di un certo valore. Queste ultime invero variano, per piccole stazioni, da 5 ohm circa (buona terra, per es. navi) a 30 ohm circa (terreno secco); nelle grandi stazioni si può, con gli artifici indicati (contrappesi, prese di terra multiple, ecc.) ridurle sensibilmente. Per es. per l'antenna di Croix d'Hins essa è di circa 0,67 ohm, tuttavia il rendimento è assai basso perchè, l'onda di lavoro essendo di 18900 metri e l'altezza equivalente di 170 metri, la resistenza di radiazione risulta (IX, 7):

$$R_i = 1580\left(\frac{170}{18\,900}\right)^2 = 0{,}123\ \Omega\,,$$

onde il rendimento vale:

$$\eta = \frac{0{,}123}{0{,}123 + 0{,}67} \cong 0{,}15\,.$$

La corrente efficace alla base essendo di 480 amp., la potenza immessa nell'antenna raggiunge, è vero, 184 kW, ma di questi soltanto il 15%, cioè circa 29,5 kW, vengono irradiati. Ancora peggiore è la situazione dell'antenna di S.te Assise per la quale la resistenza di radiazione è di 0,19 ohm, mentre la resistenza totale è di 1,9 ohm: il rendimento raggiunge dunque appena 0,10.

Con onde di lavoro dell'ordine di quelle in uso per la radiodiffusione ad onde medie (200 ÷ 550 metri) si possono agevolmente raggiungere rendimenti assai più elevati. Basta pensare che un'antenna dell'altezza equivalente di soli 60 metri, presenta per $\lambda = 400$ metri una resistenza di radiazione:

$$R_i = 1580\left(\frac{60}{400}\right)^2 = 35{,}5\ \Omega\,,$$

per cui ad es., con $R_1 + R_2 = 24{,}5\ \Omega$, si avrebbe $\eta = 0{,}59$.

---

[1] Si tratta più propriamente di una curva del terzo ordine (di equazione $R_i\lambda^2$ = cost.).

14. - Generalità sulle radioricezioni. — Prima di accingerci allo studio della costituzione effettiva di una stazione radioricevente è necessario che premettiamo un esame dei precisi termini in cui si presenta il problema della radioricezione, onde trarne i criteri generali che dominano il progetto e l'esecuzione di tali apparecchiature.

A tale scopo, si osservi in primo luogo che in trasmissione, sia telegrafica che telefonica, il problema fondamentale che si presenta è quello di far pervenire al posto ricevente una certa potenza mediante onde elettromagnetiche modulate in guisa da riprodurre la forma dei segnali che interessa di trasmettere. Come abbiamo a suo tempo veduto, la trasmissione si effettua sempre con rendimenti energetici enormemente piccoli, e pertanto, fermi restando i requisiti di *forma*, occorre che le potenze immesse nell'antenna siano di ordine di grandezza piuttosto elevato. Dal punto di vista tecnico, sempre si impone la opportunità di pervenire allo scopo coi minimi mezzi, e pertanto in questo caso, come in ogni altro in cui si tratta di operare trasformazione di energia con potenze piuttosto importanti, ha parte non indifferente il *rendimento* dei complessi generatori-trasmettitori.

In ricezione invece si ha *sempre* a che fare con potenze di entrata di ordine estremamente piccolo, non solo, ma neppure sono richiesti elevati valori delle potenze di uscita. Si pensi invero che per l'azionamento di un apparecchio telefonico od anche telegrafico (cuffie, altoparlanti, ecc.) si utilizzano potenze che variano da piccolissime frazioni di watt a pochi watt.

Segue subito che la considerazione del rendimento energetico ha, in ricezione, una importanza affatto secondaria. Quel che preme, in effetto, non è che la riproduzione del segnale trasmesso avvenga in modo *economico*, ma sopratutto in modo *fedele*, in guisa che il posto ricevente sia messo in grado di disporre di segnali la cui *forma* sia il più possibilmente uguale a quella dei segnali che il posto trasmittente ha impresso all'onda emessa.

Queste semplici considerazioni bastano per comprendere come la fisionomia di un complesso ricevente debba necessariamente essere del tutto diversa da quella di uno trasmittente. Si potrebbe *grosso modo* dire che, mentre in questo si ha a che fare con un problema di *quantità*, in quello invece il problema è essenzialmente di *qualità* ([1]).

Ma non è questo il solo elemento che bisogna aver presente nello studio di un sistema ricevitore. Occorre anche por mente alla sua *sensibilità*, cioè alla sua attitudine a fornire segnali percettibili dagli apparecchi connessi al sistema ricevitore, anche quando l'energia localizzata in pros-

([1]) Ciò è però soltanto approssimativo in quanto che, come abbiamo visto nei nn. precc., anche in trasmissione si presentano importanti questioni di qualità.

simità del posto ricevente abbia una piccola densità cubica. In particolare è da tener presente che, quantunque nello studio di una stazione trasmittente sia fondamentale la nozione della portata che si intende assegnare alla stazione stessa, tale portata può, all'atto pratico, per un complesso di fattori malamente valutabili, variare sensibilmente, non solo, ma spesso si presenta il caso che un posto ricevente debba comunicare con più trasmettitori situati in località diverse (si pensi ad es. al caso della radiodiffusione circolare). Si impone pertanto di far si che un radioricevitore sia in grado di fornire segnali percettibili anche quando la potenza in esso entrante abbia ordini di grandezza variabili entro limiti relativamente vasti ed eventualmente anche valori particolarmente piccoli.

Ma infine vi è un altro elemento importantissimo del quale deve sempre preoccuparsi chi progetta un sistema radioricevente, ed è la *selettività* del ricevitore stesso.

Per ben comprendere i termini del relativo problema, bisogna aver presente che le stazioni trasmittenti sono numerosissime e ciascuna è adibita a compiti determinati: si hanno invero non soltanto trasmissioni telegrafiche o telefoniche colleganti coppie di località ben determinate (*ponti radio*), ma anche trasmissioni a carattere circolare (caratterizzate dall'indeterminazione a priori del posto ricevente), altre concernenti la sicurezza delle vite umane (ad es. le chiamate di soccorso, le quali sono in certo qual modo funzionalmente assimilabili alle trasmissioni circolari), e così via.

Orbene, ogni trasmissione è fatta con una ben determinata onda di lavoro. A tal proposito, abbiamo veduto nei capp. prec. come la tecnica si sia opportunamente occupata di escogitare i mezzi per assicurare un elevato grado di precisione nella frequenza. Senonchè, dato lo stragrande numero di comunicazioni contemporaneamente esistenti, è evidente che nello spazio si sovrappongono le perturbazioni elettromagnetiche emananti da innumerevoli posti trasmittenti, per modo che è condizione fondamentale per la *possibilità* stessa delle radiocomunicazioni che un posto ricevente sia in grado di discriminare la ricezione desiderata da ogni altra.

Infine, bisogna considerare che ogni trasmissione non interessa una sola frequenza, ma una intera banda [1], che ad es., nel caso telefonico si estende dalle due parti della frequenza portante per un intervallo corrispondente alla larghezza della banda fonica.

Ciò premesso, appare in primo luogo assolutamente necessario che le trasmissioni siano regolate in guisa che le ricezioni effettuabili in una determinata località siano in condizioni tali da non dar luogo a possibilità di sovrapposizioni di segnali provenienti da due diverse trasmit-

[1] Ciò è stato da noi dimostrato nel caso telefonico, ma, con l'ausilio di opportune nozioni d'Analisi superiore, si potrebbe vedere che vale anche pel caso telegrafico.

tenti [1]. Ma inoltre — e questo è essenziale per il problema che ci occupa — occorre che, volta per volta, una stazione ricevente possa mettersi in grado di corrispondere con una fra le trasmittenti capaci di farle pervenire i loro segnali, senza che i suoi apparecchi siano praticamente influenzati dalle altre. Per ottenere ciò, bisogna che il posto ricevente abbia una sensibilità sufficiente per tutte le frequenze comprese entro la gamma interessante una determinata ricezione, e praticamente nulla per le altre. In ciò consiste quella che comunemente si chiama la *selettività* del ricevitore. Se poi si pensa che un posto ricevente potrà in generale essere destinato a ricevere le comunicazioni provenienti da più trasmittenti, si conclude che, mentre da un lato esso dovrà essere munito di organi capaci di modificare la banda ricevibile, dovrà inoltre presentare il richiesto grado di selettività relativamente a ciascuna delle bande che sarà chiamato a ricevere.

I requisiti che così abbiamo passato in rassegna, fedeltà, sensibilità, selettività, sono elementi assai importanti per giudicare delle peculiari attitudini di una stazione ricevente. Per effettuare però dei congrui confronti capaci di condurre a valutazioni quantitative di tali attitudini, occorrerà sempre riferirsi a misure o diagrammi concreti [2], con la esplicita dichiarazione delle condizioni in cui ciascuno di essi è stato rilevato, senza di che si arriverebbe a giudizi non rispondenti alla realtà obbiettiva.

15. - Ricevitori per radiodiffusione. — Inizieremo lo studio dei ricevitori partendo da quelli per ricezione di tipo telefonico e precisamente destinati alla radioricezione circolare, perchè tali ricevitori sono quelli in cui si sommano, per così dire, tutte le difficoltà costruttive ed i particolari tecnici che si incontrano nei ricevitori destinati anche ad altre funzioni.

Essi comprendono sempre le seguenti parti essenziali:

a) un organo (antenna o aereo) per la captazione delle onde e. m. modulate in arrivo;

b) un sistema destinato ad elevare la potenza captata dall'aereo ed in pari tempo a limitare il funzionamento della stazione ricevente alla banda di frequenze interessata alla ricezione voluta;

c) un sistema rivelatore, il cui ufficio è quello di eliminare la frequenza portante ed isolare la funzione modulante;

d) un sistema destinato ad elevare la potenza erogata dal precedente fino al desiderato livello d'uscita.

Talvolta (anzi quasi sempre nei moderni apparecchi radioriceventi), fra i sistemi *b*) e *c*) è intercalato:

---

(1) A ciò provvedono apposite convenzioni nazionali ed internazionali.
(2) Cfr. successivo n. 21, figg. 376 e 377.

b') un sistema variatore di frequenza, il cui ufficio è quello di modificare la pulsazione portante dell'onda modulata in arrivo, seguito da organi atti ad elevare la potenza prima dell'entrata nel sistema *c*).

Inoltre, nel caso ordinario in cui alle funzioni *b*), *b'*), *c*), *d*) sono interessati tubi elettronici, dovranno aversi:

e) sistemi alimentatori degli anodi, delle eventuali griglie-schermo, dei circuiti d'accensione dei filamenti o degli scaldatori dei catodi, nonchè opportune sorgenti o equivalenti dispositivi per provvedere alla polarizzazione delle griglie;

f) organi adibiti alla regolazione della potenza uscente ed alla correzione di taluni elementi di essa (ad es. i regolatori di sensibilità, di volume, di tonalità, ecc.).

16. - Struttura di un sistema radioricevente. — L'aereo di una stazione ricevente non è, in linea di principio, diverso da un aereo trasmittente. Senonchè, in relazione alla intensità del campo alla ricezione ed alla sensibilità della stazione, esso può per lo più avere dimensioni assai più ridotte. Per es., se l'apparecchiatura ricevente, per operare nelle sue normali condizioni, ha bisogno di disporre di 50 μV all'entrata, e la intensità del campo dovuto alla stazione che si vuole ricevere è di 100 μV/m, è evidente che basterà disporre di un'antenna la cui altezza efficace sia di 0,5 metri.

Salvo nel caso di onde corte, le dimensioni dell'aereo non sono paragonabili con quelle delle lunghezze d'onda ricevibili, e pertanto l'aereo stesso comporta sempre l'aggiunta di elementi reattivi (induttanze e capacità) i cui valori possono essere fatti variare entro limiti tali da rendere possibile l'*accordo* con ognuna delle frequenze per le quali il ricevitore deve funzionare. Generalmente, l'elemento variabile è la capacità; come quello che meglio si presta ad una regolazione di tipo continuo; le induttanze invece sono fisse oppure, se variabili, capaci di assumere pochi (tre o quattro) valori.

Il circuito d'antenna, integrato con gli organi predetti, è messo in grado di fornire, ai capi di uno dei suoi elementi reattivi, una tensione sensibilmente maggiore di quella indotta nell'aereo dall'onda incidente. Tale tensione è quella con cui si va ad eccitare il sistema amplificatore ad alta frequenza, in generale composto di uno o più stadi a triodi, funzionanti in classe A, mediante i quali la tensione stessa viene elevata ad un multiplo grandissimo (dell'ordine da 50 000 a 100 000) [1] di quella d'entrata, lasciandosene inalterata la forma.

Per raggiungere tale intento, e contemporaneamente assicurare la sola ricezione dell'onda desiderata escludendo le altre, occorre in primo luogo

[1] Si realizzano cioè guadagni (IV, 10) dell'ordine di 94 $\div$ 100 decibel.

che il circuito di entrata abbia un conveniente coefficiente di risonanza, ed è opportuno anche che la selettività stessa venga acutizzata mediante l'uso di circuiti risonanti per l'accoppiamento in cascata fra i successivi stadi.

Negli stadi amplificatori di radiofrequenza bisogna evitare nel modo più rigoroso gli accoppiamenti parassiti, cui potrebbero conseguire regimi oscillatori indipendenti dagli impulsi di comando che alle griglie degli stadi stessi vengono impressi dalle uscite degli stadi precedenti. Pertanto i tetrodi a griglia schermo saranno da preferirsi ai triodi, e in ogni caso dovranno, con accurate schermature, evitarsi le mutue influenze elettrostatiche fra gli organi interessati.

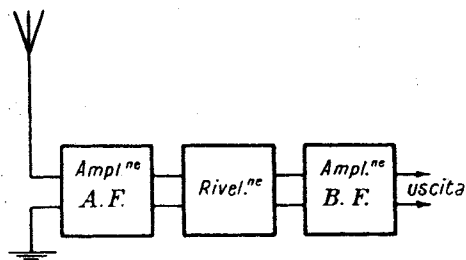



Fig. 365

Raggiunto il desiderato livello di tensione, si entrerà nello stadio *rivelatore*, il quale a seconda dei casi sarà costituito da un contatto a cristallo (XII, 8) o da un triodo, funzionante come rivelatore per caratteristica anodica o per caratteristica di griglia (XII, 11, 12), o da un binodo (XII, 15). Ed infine l'uscita del rivelatore servirà come elemento di entrata in una catena di stadi amplificatori di bassa frequenza, fino al raggiungimento della potenza richiesta all'uscita finale (telefono, altoparlante).

Lo schema di principio di un complesso ricevente si presenta dunque come alla fig. 365.

17. - Cambiamento di frequenza. — L'amplificazione in alta frequenza presenta delle difficoltà notevoli specialmente nel caso di frequenze elevate, dipendenti essenzialmente dalla necessità di evitare accoppiamenti parassiti, ed inoltre da quella di realizzare sistemi amplificatori ugualmente efficienti e selettivi per una vasta gamma di frequenze ricevibili.

Per questa ragione, anzichè spingere a livelli notevoli le prime amplificazioni in alta frequenza, nelle quali le pulsazioni in giuoco sono essenzialmente variabili in relazione alla lunghezza d'onda che si vuole ricevere, è ormai d'uso generale procedere immediatamente dopo il primo stadio amplificatore al *cambiamento della frequenza portante*, disposto in guisa da far assumere a questa un valore fisso, detto *frequenza intermedia*, indipendente da quello della frequenza incidente, per poi eseguire le amplificazioni successive sulla frequenza intermedia.

È questo il sistema di ricezione detto a *supereterodina*, di cui è già stato fatto un cenno nel Cap. prec.

Per portare la frequenza dal valore che f ha nell'incidenza al valore f_i, che per fissare le idee potremo ad es. supporre $< f$, basta operare in uno

dei due modi ivi descritti ai nn. 6, 7. Usando per es. il secondo, occorrerà generare localmente una tensione di frequenza uguale ad $f \pm f_i$, e sovrapporla, in apposito circuito, alla tensione ricevuta (previamente amplificata); dopo rivelazione, si avrà un risultato che corrisponde ad una frequenza portante f_i modulata allo stesso modo della incidente.

È evidente che il generatore locale dovrà essere regolato volta per volta, in relazione al valore di f, in guisa che la sua frequenza di funzionamento corrisponda sempre ad $f \pm f_i$, per ogni valore di f, ben inteso entro la gamma delle frequenze di prevista ricezione. Siccome un tale generatore sarà per lo più del tipo a triodo, all'uopo basterà far variare opportunamente la capacità del suo circuito fondamentale *di conserva con quella dei circuiti a frequenza f che lo precedono.* E si comprende che, con

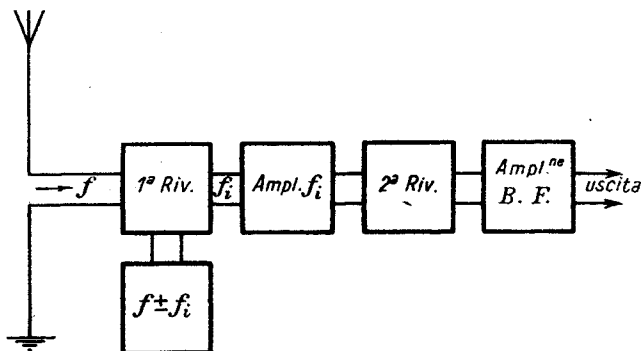



Fig. 366

una accurata regolazione dei circuiti ed un'acconcia costruzione degli elementi variabili, si possono disporre le cose in guisa che la manovra di questi avvenga con comando simultaneo (apparecchiature *a monocomando*) (1). Lo schema di principio di un ricevitore siffatto è quello rappresentato in fig. 366.

Vedremo successivamente come lo scopo possa anche raggiungersi mediante il primo dei metodi descritti al Cap. prec. (n. 6), cioè mediante un processo di modulazione o *moltiplicazione.*

Riservandoci di tornare più tardi su ciò, osserviamo subito che uno dei notevoli vantaggi del sistema di ricezione a cambiamento di frequenza è quello di potere, una volta raggiunta la frequenza intermedia, operare soltanto su questa — il cui valore può essere scelto opportunamente —, realizzandosi così tutte le operazioni successive a mezzo di circuiti funzionanti in condizioni fisse. In particolare i circuiti accordati per

---

(1) La realizzazione del comando unico per circuiti in cui necessariamente sono in giuoco frequenze diverse (la f e la $f \pm f_i$) non è però scevra di difficoltà pratiche.

gli accoppiamenti saranno ad elementi *invariabili*, il che consente una più accurata messa a punto, e così una maggiore efficienza e precisione di funzionamento.

Un altro notevolissimo vantaggio è dato dal miglioramento della selettività del complesso, quando la frequenza intermedia sia minore della incidente.

Suppongasi invero di voler ricevere un'onda di 500 metri (600 kHz) e di usare una frequenza intermedia di 200 kHz, corrispondente a $\lambda = 1500$ metri. Ciò significa che il generatore locale verrà regolato a 400 (oppure 800) kHz. Ora, se sovrapposto al segnale desiderato se ne avesse un altro (intruso) portato da un'onda di frequenza prossima, per es. 610 kHz, nel sistema a frequenza intermedia si avrebbe, insieme al segnale desiderato, la cui frequenza è stata ridotta a 200 kHz, anche l'intruso la cui frequenza viene ridotta a 210 kHz. In definitiva, lo scarto assoluto (10 kHz) si mantiene inalterato, e pertanto lo scarto relativo, che era di $\frac{1}{60}$ all'incidenza, sale ad $\frac{1}{20}$ rispetto alla frequenza intermedia; e così evidentemente la eliminazione dell'intruso riesce assai più agevole.

Come si è detto, la frequenza del generatore locale deve differire di una quantità costante $(= f_i)$ da quella incidente, ma è indifferente che tale differenza sia in più o in meno: cioè si può realizzare la stessa f_i regolando il generatore locale sia sulla frequenza $f + f_i$, sia sulla $f - f_i$.

Di questa circostanza ci si può valere per utilizzare la parte del ricevitore, che è situata a valle del sistema variatore di frequenza, tanto per la ricezione di onde incidenti comprese in una certa gamma come per quelle appartenenti ad una certa altra, senza esagerare l'ampiezza della gamma entro cui deve poter funzionare il generatore locale. Per es. se le gamme ricevibili fossero quelle della radiodiffusione ad onde medie (1500 ÷ 500 kHz) e quelle ad es. comprese fra 2500 e 1500 kHz, lo scopo potrebbe raggiungersi fissando ad es. la frequenza intermedia in 500 kHz, e disponendo che, nel primo campo di ricezione, il generatore locale fornisca la frequenza $f + f_i$, pel secondo la $f - f_i$, con che tale generatore deve poter variare la sua frequenza soltanto fra i limiti 2000 e 1000 kHz.

Bisogna però rilevare un inconveniente cui dà luogo la ricezione a supereterodina, ed è quello della così detta *frequenza immagine*. Se, usando una certa f_i, il sistema viene regolato per la ricezione di una determinata f, ad es. $> f_i$, e ciò, per fissare le idee, è ottenuto generando localmente una $f_0 = f - f_i$, è chiaro che sarebbe contemporaneamente ricevuto un segnale portato da una frequenza f' tale che la somma $f_i + f'$ fosse uguale ad f_0. Fra le quattro frequenze f, f', f_0, f_i si hanno dunque le relazioni:

$$f - f_i = f_i + f' = f_0 \quad \text{donde} \quad f - f' = 2f_i \, .$$

Se ad es. fosse $f_0 = 500$ kHz ed $f_i = 300$ kHz, il sistema a frequenza intermedia riceverebbe tanto la $f = 800$ che la $f' = 200$ kHz.

A tale inconveniente si può ovviare in due modi: un primo metodo consiste nel disporre le cose in guisa che la frequenza f' cada necessariamente nella gamma non ricevibile. Per es., se si tratta di ricezioni comprese soltanto nella gamma $600 \div 1200$ kHz, basterebbe assumere $f_i > 300$; in quanto che la differenza fra due numeri f ed f' compresi fra 600 e 1200 non può superare il doppio di un numero > 300. Però un tale sistema non è perfetto, in quanto che non può assicurarsi a priori la inesistenza di qualche trasmissione portata dalla frequenza immagine.

Il secondo metodo — che è quello oggidì costantemente usato — consiste nel disporre all'entrata un circuito di selettività sufficiente per assicurare l'eliminazione della f'.

Nella ricezione telefonica occorre in ogni caso non dimenticare che la ricezione stessa interessa sempre una *banda* di frequenze, la cui larghezza corrisponde al doppio della massima frequenza acustica praticamente percettibile [1]. E pertanto la selettività dei circuiti non deve essere troppo acuta. Anzi, la curva di risonanza ideale dovrebbe avere una forma del tipo indicato in fig. 367, cioè avvicinarsi ad un rettangolo di larghezza corrispondente a quella occupata dalle bande laterali (XII, 4).

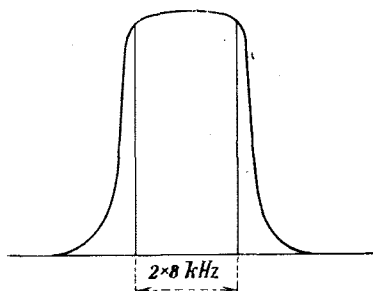



Fig. 367

In pratica, ci si può avvicinare notevolmente a tale diagramma ideale sfruttando il tipo di connessione a doppio circuito accordato (XI, 48), che potrà essere opportunamente disposto nei circuiti a frequenza intermedia, cioè in quelli i quali non hanno bisogno di utilizzare elementi variabili.

18. - Realizzazione effettiva del cambiamento di frequenza. — La immissione della frequenza locale nel circuito del rivelatore viene fatta accoppiando magneticamente il generatore locale al circuito di griglia del tubo interessato al sistema rivelatore, circuito nel quale è pure introdotta, *in serie*, la tensione a frequenza incidente debitamente amplificata.

---

[1] Questa, per ricezioni di alta qualità, dovrebbe spingersi fin verso gli 8 kHz, ma generalmente, specialmente per la ricezione delle stazioni di radiodiffusione, occorre contentarsi di limitarla a poco più di 3 kHz, ed in relazione a ciò, per evitare che si ricevano contemporaneamente le bande estreme di due emissioni contigue, si prescrive che le onde portanti di due stazioni contemporaneamente ricevibili in una data località differiscano di almeno 9 kHz.

Si può costituire il generatore locale usando lo stesso tubo alla cui griglia è applicata la tensione incidente, disponendo le cose in guisa che il funzionamento del tubo si accompagni con effetto di rivelazione. All'uopo, si potrà ad es. utilizzare lo schema Meissner con circuito accordato (L_1, C_1) sulla griglia (XI, 33), connettendo il sistema (L, C) d'aereo ad un conveniente punto di L_1, e disporre fra (L_1, C_1) ed il catodo una resistenza di dispersione R, la quale unitamente ad un condensatore C' interposto fra (L, C) e (L_1, C_1), costituirà il sistema occorrente per la rivelazione di griglia (fig. 368). Tale dispositivo viene denominato

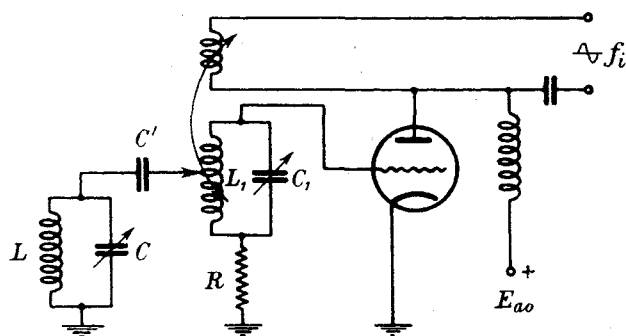



Fig. 368

tropadina. Come si vede dalla figura, il sistema (L, C) è connesso al punto centrale di L_1 (praticamente il giusto punto di connessione deve essere determinato per tentativi), al fine di rendere l'accordo di (L, C) indipendente da quello di (L_1, C_1).

Il dispositivo stesso presenta tuttavia un inconveniente, quello di consentire che l'aereo del posto ricevente irradii sulla frequenza locale, disturbando così le ricezioni vicine [1].

Come abbiamo visto al Cap. prec. (n. 6), il cambiamento di frequenza può anche ottenersi *modulando* con la frequenza locale l'onda incidente, ed anzi questo metodo presenta sul precedente due notevoli vantaggi:

1°) quello di non dare luogo a deformazioni della funzione modulante;

2°) quello di evitare la produzione di armoniche che necessariamente invece accompagnano il processo di sovrapposizione.

Bisogna però ricordare che col metodo di moltiplicazione si ottengono contemporaneamente *due* mutamenti di frequenza, e, precisamente, se f_0 è la frequenza locale, si otterranno sia la $f + f_0$ che la $|f - f_0|$, ma

[1] In generale questo inconveniente è comune a tutti i sistemi nei quali una frequenza locale, diversa dalla incidente, viene generata nello stesso circuito di entrata.

(XII, 6) se questi due numeri, come sempre si procura avvenga, sono molto diversi, l'eliminazione di uno dei due termini si presenta praticamente agevole.

Per la realizzazione di un tale processo si può usare il circuito così detto ad *ultradina*, il quale consiste in ciò, che la tensione a frequenza

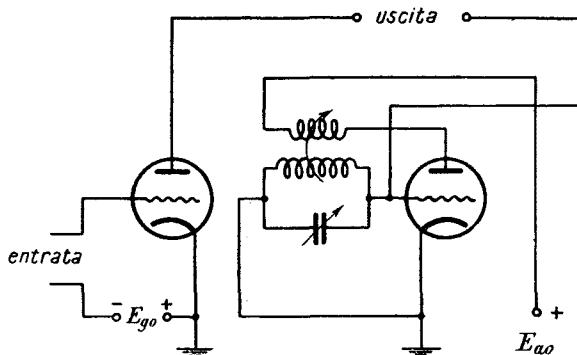



Fig. 369

locale viene introdotta nel circuito anodico di quello stesso tubo la cui griglia è eccitata dalla tensione incidente. Il punto di funzionamento è scelto nelle regioni in cui, le caratteristiche essendo incurvate, la conduttanza g_a non è costante, ma è funzione della stessa tensione di griglia e_g; talchè, per valori sufficientemente piccoli di e_g, si potrà ritenere che sia $g_a = a + be_g$. Ne segue che la parte variabile i_a della corrente anodica comprende un termine proporzionale al prodotto delle tensioni e_a ed e_g. Un tale sistema è quindi atto a funzionare come modulatore (XII, 22) e pertanto nelle condizioni descritte esso funziona (ibid., 6) come variatore di frequenza. Il corrispondente schema di principio è quello rappresentato nella fig. 369.

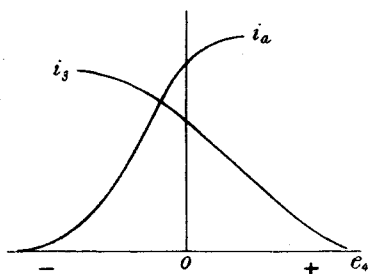



Fig. 370

Nei moderni sistemi riceventi lo scopo viene raggiunto con un unico tubo a quattro griglie, cioè con un exodo (VIII, 21, fig. 168).

La corrente anodica propriamente detta è, entro certi limiti, proporzionale alla tensione e_1 applicata fra la griglia *1* ed il catodo. La griglia *2* funge da schermo e la *3* da anodo rispetto al sistema catodo-griglia *1*. La griglia *4* controlla contemporaneamente l'anodo A e la griglia *3*, e precisamente, quando essa è a potenziale e_0 fortemente negativo, impe-

disce l'afflusso di elettroni ad A, e conseguentemente favorisce la corrente i_3 dell'elettrodo *3*; diminuendo il valore assoluto di quella tensione negativa, aumenta la corrente in A, e diminuisce quella di *3*, il tutto secondo un andamento simile a quello indicato in fig. 370. In altre parole, la conduttanza g_m, intesa come rapporto $\frac{di_a}{de_1}$ fra le corrispondenti variazioni di i_a ed e_1, è, entro certi limiti, proporzionale ad e_4, cosicchè in definitiva la corrente i_a risulta proporzionale al prodotto $e_1 e_4$. Si comprende

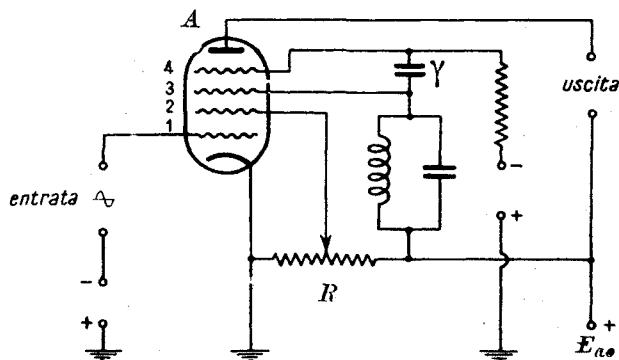



Fig. 371

quindi che, qualora le tensioni e_1 ed e_4 siano rispettivamente proporzionali a quella incidente e a quella di frequenza locale, la corrente i_a può considerarsi ottenuta modulando una di esse con l'altra, con che (XII, 6) si è effettuato il trasporto della frequenza portante da f ad $|f - f_0|$ (oppure $f + f_0$).

Per la generazione della frequenza locale f_0 basta introdurre nel circuito della griglia *3* un corrispondente sistema (L, C) ed accoppiare opportunamente gli elettrodi *3* e *4*. Nello schema di fig. 371 tale accoppiamento è fatto semplicemente con un condensatore γ; in quanto che, avendo la caratteristica (i_3, e_4) andamento discendente, la conduttanza mutua differenziale di questi due elettrodi è negativa, e quindi non è necessaria la inversione di fase per ottenere che il corrispondente circuito differenziale complessivo risulti di resistenza nulla, come appunto si esige per il funzionamento generatorico [1].

L'elettrodo *2* poi (che è mantenuto a una tensione positiva inferiore alla anodica mediante una presa sulla resistenza potenziometrica R), con

[1] Si possono anche usare altri schemi (vedi ad es. fig. 375) in cui la generazione della frequenza locale si effettua nella parte del tubo costituita dal catodo e dalle due prime griglie.

la sua azione schermante, elimina la possibilità di retroazione fra il circuito d'entrata e quello che è sede delle oscillazioni locali.

Un interessante processo di ricezione che può considerarsi rientrare in quelli a cambiamento di frequenza, è quello conosciuto sotto il nome di sistema a *superreazione* o ad *ultrareazione* (Armstrong).

Esso si fonda sul fatto che, se i circuiti di griglia e di anodo di un triodo sono accoppiati, ad es. magneticamente, in modo sufficientemente stretto ed uno dei due circuiti comprende un sistema tipo (L, C) convenientemente dimensionato, il sistema è in grado di funzionare come generatore ad autoeccitazione, su una ben determinata frequenza f, sempre che sia soddisfatta la condizione che l'espressione R, definita dalla formola (13) di XI, 28, risulti negativa. Più precisamente, una oscillazione che si inizii in (L, C) si esalta se R è negativa, mentre si smorza più o meno rapidamente se R è positiva. In particolare, se R è fatta passare da valori positivi a negativi con frequenza sufficientemente elevata, si avrà che, se al circuito di griglia viene impressa una tensione di frequenza uguale ad f, negli intervalli τ in cui R è negativa sorgerà in (L, C) una oscillazione di ampiezza crescente fino ad un certo valore dipendente dalla eccitazione stessa, mentre nei successivi intervalli τ' in cui R è positiva, la medesima oscillazione andrà smorzandosi più o meno rapidamente. Se poi gli intervalli τ sono sufficientemente piccoli, le ampiezze A raggiunte dalle oscillazioni durante essi, varieranno all'incirca linearmente con l'ampiezza E della eccitazione, cioè si avrà:

$$A \cong a + bE \,.$$

Ora, se il ritmo con cui si fa variare R è ultra-acustico, per esempio $15 \div 20$ kHz, si avrà in definitiva che, avendo E una forma del tipo di fig. 372 *a*) (radiofrequenza f_r modulata ad audiofrequenza f_a), l'andamento delle oscillazioni sarà del tipo di fig. 372 *b*); esse cioè avranno ancora la frequenza fondamentale f_r ma saranno, per così dire, modulate in doppio modo. E precisamente, per effetto delle variazioni di R, le ampiezze andranno assumendo i valori pertinenti alla curva *a*) e successivamente cadendo a zero, mentre la successione delle massime ampiezze riprodurrà ancora la curva modulante del diagramma *a*). Ove questo avesse ampiezze nulle (pause della emissione), il diagramma *b*) presenterebbe l'aspetto indicato nel tratto AB. In ogni caso, eliminando poi le componenti di frequenza f_r, si perverrebbe ad un diagramma che può considerarsi ottenuto modulando la frequenza f' di R con la stessa curva modulante del segnale dato: e ciò val quanto dire che si è abbassata da f, ad f' la frequenza portante.

Tutto dunque si riduce a realizzare le predette variazioni di R. A ciò si provvede alimentando l'anodo con una tensione di frequenza f' ottenuta mediante un generatore locale, giacchè, così facendo, l'anodo stesso verrà

alternativamente reso positivo e negativo, il che equivale a rendere possibile, rispettivamente impossibile, un valore negativo di R, come appunto richiesto. Lo scopo potrebbe anche raggiungersi utilizzando il generatore

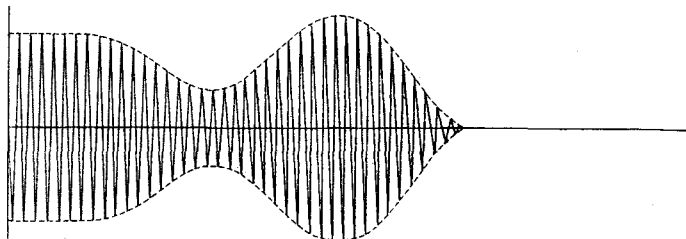



Fig. 372 *a*)

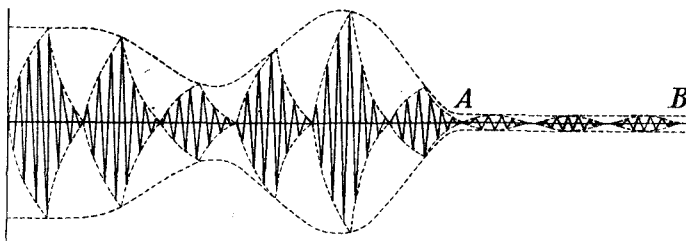



Fig. 372 *b*)

locale di frequenza f' per portare periodicamente la griglia a potenziali tanto negativi che ne risulti un valore positivo di R.

Il sistema a superreazione è di regolazione alquanto delicata; esso può tuttavia ricevere interessanti applicazioni nel caso della ricezione di frequenze assai elevate (onde corte), per le quali i processi ordinari sono malamente applicabili a causa degli inevitabili accoppiamenti parassiti fra i vari circuiti a diverse frequenze.

19. - Stadi di bassa frequenza. - Accessori di regolazione. — Il sistema che abbiamo classificato con *d*) al n. 15 potrà in generale comporsi con uno o più stadi accoppiati in cascata, eventualmente fra loro connessi con trasformatori a nucleo di ferro. Naturalmente, dovranno qui essere osservate tutte quelle norme che assicurano nel miglior modo la fedeltà di riproduzione: in particolare sarà bene che i generatori a triodi funzionino rigorosamente in classe A, oppure anche in classe B — ma senza corrente di griglia — purchè si tratti di una coppia in connessione simmetrica. Naturalmente non è escluso che si possa anche usare una coppia in push-pull di classe A, il quale, rispetto a quello di classe B, presenta il vantaggio di non dare luogo a sensibili variazioni di carico con-

seguenti alla modulazione, il che consente di realizzare più facilmente la costanza della tensione di alimentazione.

Particolarmente adatti in questi stadi sono i pentodi, in quanto che essi permettono di raggiungere, senza uscire dalle regioni rettilinee, elevati valori della potenza di uscita.

Accessori interessanti dei radioricevitori sono, come si è accennato, i dispositivi per le regolazioni della sensibilità, del volume e del tono.

La regolazione della sensibilità, cioè della intensità della ricezione, può ottenersi semplicemente introducendo all'entrata, vale a dire nel circuito d'aereo, una conveniente resistenza regolabile. Tale procedimento, quantunque presenti l'inconveniente di modificare la selettività del ricevitore, e quello di non potere facilmente essere reso automatico, ha però il pregio di permettere che il funzionamento del primo triodo avvenga costantemente nella medesima zona (di linearità) delle caratteristiche, e quindi la regolazione stessa non introduce distorsioni, non solo, ma anzi tende a limitare quelle che potrebbero prodursi qualora si avesse una eccessiva eccitazione dei triodi.

La regolazione del volume, che sostanzialmente può interpretarsi come una regolazione di sensibilità, viene invece generalmente ottenuta agendo sugli stadi a radiofrequenza o su quelli ad audiofrequenza, o meglio su entrambi. Per i primi conviene agire sulla tensione di polarizzazione di griglia, oppure sulla tensione delle griglie-schermo. Usando il primo metodo, bisogna porre attenzione al fatto che, aumentando la polarizzazione negativa della griglia, i tratti di caratteristiche interessati presentano una certa curvatura, il che evidentemente può essere causa di distorsioni, salvo che si utilizzino i tubi a coefficiente di amplificazione variabile, per i quali (VIII, 24) la curvatura delle caratteristiche può considerarsi praticamente trascurabile per quel piccolo tratto che generalmente è interessato durante il funzionamento. La regolazione a frequenza acustica si realizza invece introducendo una opportuna resistenza regolabile in uno degli stadi ad essa relativi; ciò potrà farsi ad es. all'uscita del primo tubo funzionante a bassa frequenza.

Quando la regolazione del volume è richiesta per combattere l'eventuale affievolimento di segnali entranti (*fading*), i corrispondenti dispositivi prendono il nome di *antifading*. Generalmente essi sono automatici e l'automatismo può essere ottenuto provvedendo alla polarizzazione delle griglie degli stadi di entrata mediante polarizzatori del tipo catodico (XI, 15), cioè con resistenze percorse dalla componente continua della corrente ottenuta mediante rivelazione del segnale incidente, previamente amplificato, o da una corrente a questa proporzionale, e ciò tanto nel caso che quegli stadi siano costituiti da tubi ordinari, quanto da tubi a μ variabile.

Le variazioni di polarizzazione richieste per ottenere lo scopo sono però di un ordine abbastanza elevato. Recentemente si è riusciti a ridurre sensibilmente tali variazioni sfruttando le proprietà dei tubi a quattro griglie o exodi, il cui montaggio e la cui funzione è però allora essenzialmente diversa da quella accennata al n. prec. Precisamente, per lo scopo di cui si tratta, l'exodo viene costruttivamente predisposto e fatto funzionare in guisa tale che esso si comporti come una coppia di tubi a griglia schermante disposti, per così dire, in serie, in quanto che, la tensione d'entrata venendo al solito applicata alla griglia *1*, l'elettrodo *2* funge da schermo e il *3* da anodo in un sistema che può considerarsi l'equivalente di un tetrodo a griglia schermante; nello spazio compreso fra gli elettrodi *2* e *3* viene così a formarsi un catodo virtuale la cui emissione è regolata dalla griglia *1*. Rispetto a tale catodo, l'elettrodo *3* funge da griglia di controllo e il *4* da schermo, per modo che in definitiva la conduttanza mutua g_m viene a dipendere anche dalla tensione applicata all'elettrodo *3*, ed in effetto si ha che con piccole variazioni di questa tensione si può far variare entro limiti molto ampi la conduttanza predetta, come può riconoscersi esaminando le curve di fig. 373 dove i punti contrassegnati con tondino sono ottenuti attribuendo agli elettrodi *1* e *3* la stessa tensione, quelli con crocetta invece attribuendo al primo tensione doppia che al secondo.

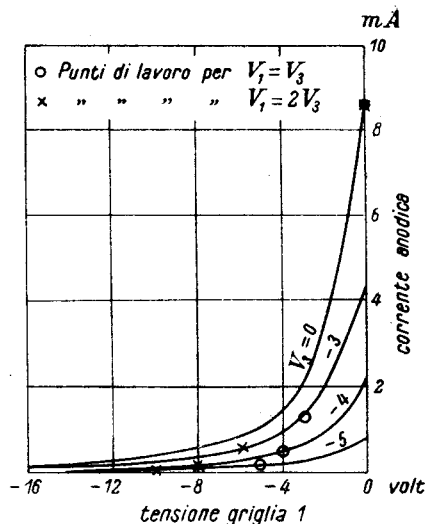



Fig. 373

In effetto, usando un tubo di tale tipo, con alimentazione dell'anodo a 200 volt, e degli schermi *2* e *4* a 80 volt, si riesce, facendo variare le tensioni base degli elettrodi *1* e *3*, supposte uguali, fra 1,5 e 7 volt, ad ottenere variazioni della corrente anodica fra 5000 ed 1 μA, cui corrispondono variazioni della resistenza differenziale anodica fra $5 \cdot 10^5$ e 10^7 ohm, mentre la conduttanza mutua varia fra 2000 ed 1 μA/V. Le variazioni di amplificazione ottenibili possono raggiungere il rapporto di 1 : 10 000 con variazione della tensione regolatrice di soli 10 volt, mentre con gli ordinari tubi bisogna ricorrere a variazioni dell'ordine di 50 volt per realizzare variazioni nel rapporto 1 : 300.

I così detti *regolatori di tono* sono organi destinati a sopprimere alla uscita i toni corrispondenti alle più elevate frequenze acustiche, il che

risulta particolarmente vantaggioso nel caso della ricezione di radiodiffusioni circolari, in quanto che, essendo molto ravvicinate le varie stazioni trasmittenti suscettibili di essere ricevute da un dato posto ricevente, la soppressione predetta allontana il pericolo di interferenze fra l'estremità della banda inferiore di una emissione con quella della banda superiore di un'altra emissione portata da una frequenza poco inferiore alla prima. Esse si realizzano semplicemente shuntando il circuito d'uscita (oppure quello di uno stadio precedente) con un ramo contenente in serie una capacità ed una resistenza regolabile. La presenza del condensatore conferisce al ramo stesso una conveniente attitudine ad « assorbire » le più elevate frequenze acustiche, mentre l'aggiunta della resistenza variabile rende più o meno efficiente l'assorbimento stesso in relazione alla conseguente modificazione dell'impedenza complessiva del ramo.

20. - Sorgenti di tensioni continue per i ricevitori. — Come si è visto, le funzioni occorrenti per la realizzazione dei sistemi fondamentali *a*) *b*) *c*) *d*) (eventualmente anche *b'*)), costituenti nel loro complesso un posto di ricezione telefonica, possono tutte essere disimpegnate da organi utilizzanti tubi elettronici. Ed abbiamo anche veduto che in taluni casi un solo tubo può essere adibito a più di una delle funzioni predette.

La installazione di un ricevitore radiotelefonico si completa poi coi sistemi destinati alla alimentazione dei circuiti degli anodi e delle griglie, nonchè al riscaldamento dei catodi.

Per i primi si provvede in generale o con sorgenti di tensioni continue di adeguati valori o a mezzo di raddrizzamento di tensioni alternate. Per lo più, nei posti riceventi di piccola entità — come ad es. i ricevitori per radiodiffusione — si ricorre ai tipi monofasi a doppia semionda raddrizzata, e all'uopo si usano diodi a doppio anodo, generalmente del tipo ad alto vuoto, ma talvolta anche del tipo a vapori di mercurio. Ovviamente, al raddrizzatore segue un opportuno filtro, generalmente del tipo con entrata a condensatore.

Le varie tensioni occorrenti per i diversi tubi, o per le griglie-schermo, sono ottenute alimentando i corrispondenti elettrodi con l'intermediario di resistenze di zavorra, mentre alla polarizzazione delle griglie di controllo si provvede quasi sempre a mezzo di polarizzatori automatici.

I catodi sono per lo più del tipo a riscaldamento indiretto, e l'alimentazione dei relativi elementi scaldatori viene fatta con un circuito secondario supplementare di cui viene provvisto il trasformatore che alimenta il raddrizzatore; il punto centrale di tale secondario viene poi generalmente connesso ai ritorni delle griglie e degli anodi (terra), cioè corrisponde al potenziale di riferimento. Un tale dispositivo potrebbe usarsi per alimentare direttamente con la corrente alternata anche i ca-

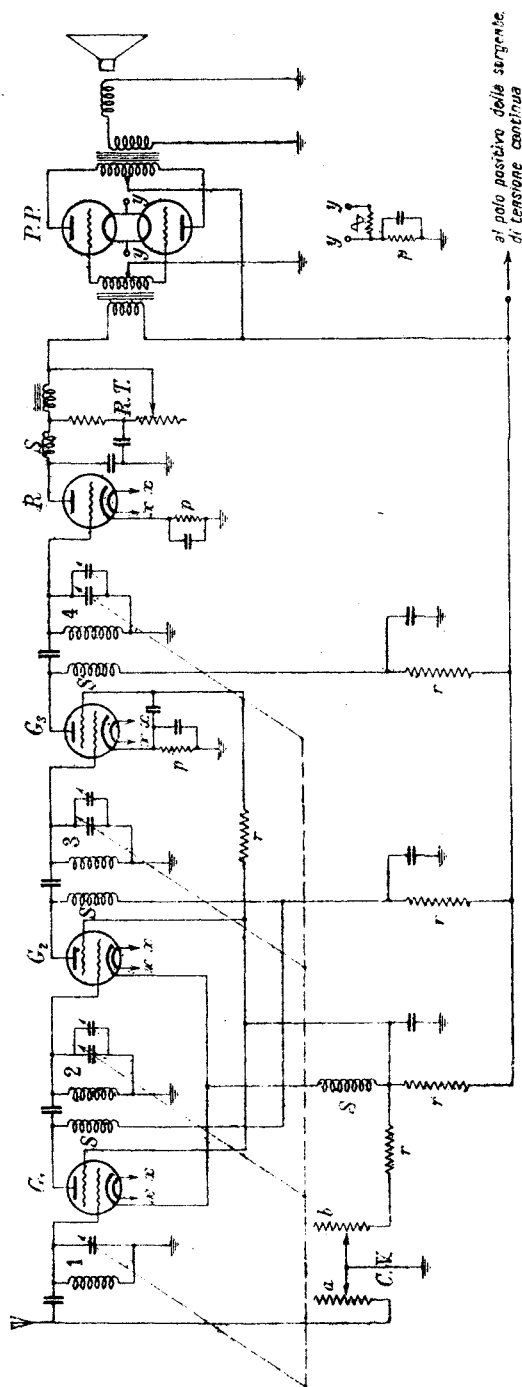



Fig. 374

1, 2, 3, 4 – Circuiti accordati (a monocomando dei condensatori)
G_1, G_2, G_3 – Generatori A. F. accoppiati in cascata
R – Sistema rivelatore (per caratteristica di placca)
P. P. – Stadio finale push-pull
C. V. – Regolatore di volume (*a* = controllo entrata; *b* = controllo polarizzazione delle griglie)

R. T. – Regolatore di tono
S – Bobine strozzatrici dell'alta frequenza
p – Polarizzatori di griglia
r – Resistenza (per abbassare tensione)
x x – alimentazione dei riscaldatori dei catodi (corrente alternata,
y y – alimentazione catodi della coppia di tubi finali.

todi a riscaldamento diretto in quanto che, a causa della simmetria, la oscillazione di tensione nelle due porzioni in cui il catodo viene diviso riesce quasi senza effetto sulle correnti anodiche dei corrispondenti tubi (1).

21. - Esempi. — Le figg. 374 e 375 rappresentano gli schemi di due ricevitori telefonici per radiodiffusione circolare. Il primo è del tipo così detto *a risonanza*; in esso cioè gli stadi ad alta frequenza (generalmente non più di tre), fra loro connessi in cascata, sono del tipo a carico anodico accordato.

Descriveremo qui in dettaglio il secondo, che è del tipo a supereterodina, utilizzante un exodo per la produzione della frequenza intermedia per via di modulazione, confoımemente al terzo dei metodi descritti al n. 18. Il generatore a frequenza locale utilizza le prime due griglie dell'exodo mediante uno schema del tipo Meissner con circuito accordato sulla prima griglia ed accoppiato magneticamente alla seconda, mentre il segnale entrante è ricevuto dalla terza griglia. Con un trasformatore a primaıio e secondario entrambi accordati è ottenuto l'accoppiamento allo stadio successivo, in cui è applicato un tubo a coefficiente di amplificazione variabile, dal quale, col tramite di un nuovo trasformatore a primario e secondario accordati, parte l'alimentazione del binodo rivelatore. La parte di questo che funziona da diodo porta due anodi, uno dei quali serve per la rivelazione, e l'altro è utilizzato per un circuito di polarizzazione supplementare degli stadi precedenti (i quali sono già polarizzati in modo fisso a mezzo della resistenza R_1 inserita fra anodo e catodo dell'exodo), al fine di ottenere l'automaticità di regolazione del volume, e le cose sono disposte in modo che tale regolatore può entrare in funzione soltanto quando il segnale raggiunga una ampiezza predeterminata. L'altra parte del binodo, quella cioè funzionante come triodo, provvede ad amplificare i segnali, ormai ridotti a frequenza acustica, costituenti così l'elemento di entrata al pentodo finale. La polarizzazione di griglia del binodo è effettuata parte automaticamente (a mezzo della resistenza catodica R_2), parte in modo fisso, a mezzo di connessione in un punto opportuno di una resistenza (la R_3 in serie con la R_4) derivata sulla tensione alimentatrice degli anodi.

---

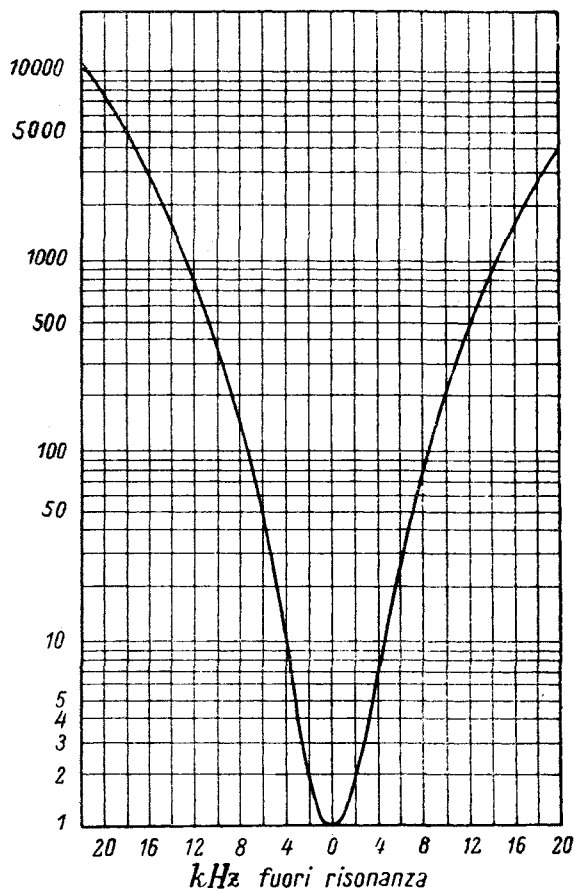
(1) Non completamente però, a causa dell'inerzia termica dei filamenti, nonchè del campo magnetico variabile. L'effetto corrispondente consiste nella comparsa di una indesiderata corrente anodica a frequenza doppia di quella con la quale si alimentano gli anodi. La sua importanza quantitativa è però tanto minore quanto maggiore è la tensione risultante di griglia $e_g + \frac{e_a}{\mu}$ sotto la quale è fatto lavorare il tubo. Ciò spiega perchè talvolta i tubi finali, dove necessariamente sono in giuoco potenze — e quindi tensioni — di gran lunga più rilevanti che nei primi stadi, possono anche venire provvisti di catodi direttamente riscaldati dalla corrente alternata.

Fig. 375

T_e – Trasformatore d'entrata
1 – Exodo variatore di frequenza
C_1 – Circuito accordato sulla frequenza incidente
G – Generatore a frequenza intermedia
T_1, T_2 – Trasformatori media frequenza
2 – Pentodo multi-μ
3 – Binodo
4 – Tubo finale
pg – Polarizzatori di griglia (catodici)
$R. T.$ – Regolatore di tono
5 – Doppio diodo raddrizzatore
C, L – Filtro di livellamento
+, –, – Condensatori elettrolitici
$x\,x$ – Alimentazione riscaldatori catodi (corr. alt.).

Quest'ultima è ottenuta mediante un raddrizzatore monofase a doppia onda alimentato da uno dei secondari di un trasformatore connesso ad una sorgente di tensione alternata a frequenza industriale, essendo l'altro adibito all'alimentazione dei riscaldatori dei catodi di tutti i tubi. Il livellamento della corrente raddrizzata è ottenuto mediante un doppio condensatore in parallelo ed una induttanza in serie, per la quale ultima viene utilizzata la stessa bobina che eccita il campo magnetico dell'altoparlante.

Fig. 376

La fig. 376 mostra con diagramma semilogaritmico (1) l'andamento della curva di selettività di un ricevitore moderno: essa è costruita portando in ordinata il logaritmo del rapporto fra l'ampiezza del segnale alla frequenza indicata dall'ascissa e l'analoga ampiezza alla frequenza fissa di 800 kHz, occorrenti per ottenere un' uscita costante (che generalmente si fissa in 80 mW), essendo l'entrata rappresentata da un segnale modulato a 400 Hz con profondità del 30%. La fig. 377 rappresenta in modo analogo una curva di sensibilità; in essa cioè le ordinate misurano in scala logaritmica la tensione necessaria all'entrata, alle varie frequenze indicate dall'ascissa, onde ottenere un'uscita costante di 80 mW, essendo l'entrata, come dianzi, costituita da un segnale modulato a 400 Hz con profondità del 30 %.

(1) Cioè, mentre le ascisse sono proporzionali alla rispettiva variabile, le ordinate sono invece proporzionali al logaritmo della variabile corrispondente.

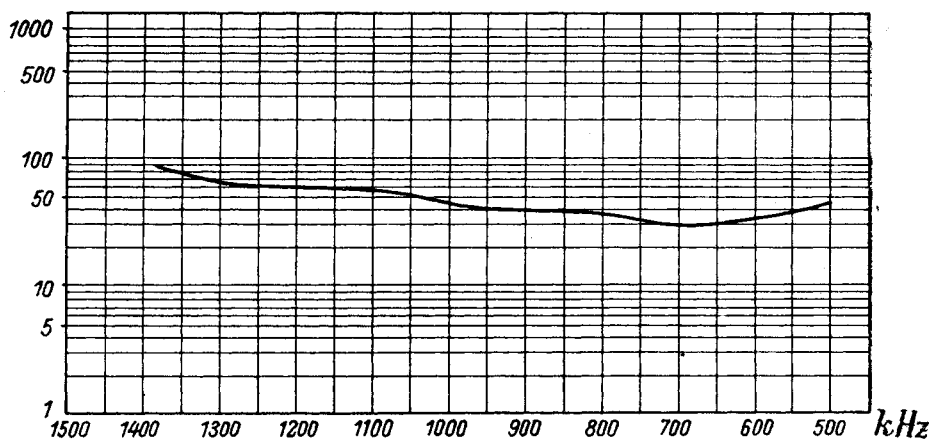



Fig. 377

22. - Ricezione radiotelegrafica. — Quanto sopra è stato detto si riferisce più particolarmente ai ricevitori radiotelefonici, ma, con le dovute varianti, può applicarsi anche al caso di ricevitori radiotelegrafici.

Le emissioni di tipo telegrafico, come già è stato osservato (n. 1), possono, come le telefoniche, considerarsi emissioni modulate. Quantunque la modulazione telegrafica non sia di per sè riferibile a frequenze acustiche, tuttavia quasi tutti i sistemi di trasmissione e ricezione telegrafica sono fondati sugli stessi principi degli analoghi fonici, e ciò perchè, con artifici opportuni, alle comunicazioni telegrafiche si possono conferire alcuni dei caratteri delle foniche.

In primo luogo consideriamo le tramissioni con onde smorzate. Come abbiamo visto a suo tempo (X, 3), queste sono costituite da successioni di treni di brevissima durata e la frequenza dei treni stessi è di un ordine paragonabile alle basse o medie frequenze acustiche. In definitiva dunque, a parte la forma della funzione modulante, si tratta sempre di una modulazione *periodica* [1], e pertanto è ovvio che la corrispondente ricezione può effettuarsi con un qualunque ricevitore fonico. Il telefono o l'altoparlante emetteranno in tal caso un suono di altezza ben determinata, corrispondente alla frequenza dei treni, e la ricezione potrà così senz'altro essere effettuata ad udito. Sostituendo al telefono un opportuno sistema di relais di tipo telegrafico, potrà invece ottenersi la impressione dei segnali sulla carta.

Attualmente le emissioni smorzate non sono più in uso e in loro vece le stazioni r. t. trasmettono i segnali Morse con emissioni di onde persistenti, modulate o non, di durate corrispondenti ai punti ed alle linee

[1] Separatamente per ogni punto e per ogni linea del codice Morse.

(cfr. XII, 1). La modulazione può essere fatta inserendo nel circuito del tasto manipolatore un interruttore ad elevata frequenza (cicalina o simile) oppure addirittura un modulatore atto a fornire una nota musicale ben determinata. Per la ricezione fonica di segnali di questo tipo, si può ripetere quanto detto nel caso precedente. Del resto, come facilmente si riconosce, i due casi sono, dal punto di vista formale, perfettamente equivalenti.

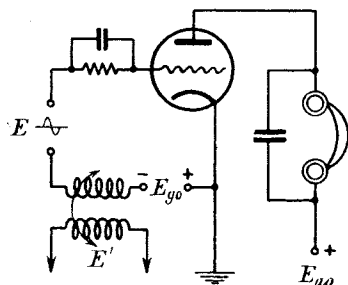



Fig. 378

Se invece la emissione è *non modulata*, occorre modularla all'arrivo, per potere poi, dopo rivelazione, effettuarne la ricezione per via fonica.

La modulazione all'arrivo può farsi assai agevolmente usando una eterodina; cioè un generatore locale che si fa funzionare con frequenza f' prossima a quella f dell'onda incidente, talchè il valore assoluto della differenza $f - f'$ sia dell'ordine fonico. Noi invero sappiamo che in tali condizioni la sovrapposizione — o, come anche si dice, l'interferenza — del segnale entrante con quello generato localmente dà luogo ad un battimento di frequenza $|f - f'|$ che, dopo rivelazione, può essere percepito sotto forma di nota musicale di altezza corrispondente ad $|f - f'|$. Particolarmente adatti per tal caso si presentano i rivelatori quadratici (XII, 9), in quanto che, entrando in essi con la somma di due termini di frequenze f ed f', si ottiene, oltre a termini di frequenze prossime o molto superiori ad f ed f', anche un termine di frequenza $|f - f'|$. Anzi, è da osservare che se E, E' sono le ampiezze delle f. e. m. di frequenze f ed f', il termine cui alludiamo è quello del tipo

$$aEE' \operatorname{sen} 2\pi(f - f')t\,,$$

dove a è una costante dipendente dal tipo di rivelatore. Questa espressione mostra che al segnale rivelatore si può attribuire una intensità elevata, anche se il segnale entrante ha piccola ampiezza E: basta all'uopo elevare l'ampiezza E' della tensione generata localmente.

Il corrispondente schema è rappresentato in fig. 378; la tensione di segnale E e quella E' proveniente dal generatore locale vanno ad agire in serie sul circuito di griglia di un tubo che, a mezzo di un conveniente sistema R, C, è messo in condizione di funzionare come rivelatore; un telefono, shuntato da un conveniente condensatore, è inserito nel circuito anodico.

Come nel caso della ricezione a supereterodina, la tensione incidente può essere introdotta senz'altro nel circuito di griglia di un generatore

adibito alla produzione di E', come allo schema di fig. 379. Si realizza allora la così detta ricezione ad *endodina* o *autoeterodina*.

La ricezione ad eterodina presenta, come si è detto, il vantaggio di presentarsi assai comodamente alla ricezione di segnali deboli in quanto che, in sostanza, la sensibilità del ricevitore, come mostra la precedente formola, può ritenersi proporzionale alla tensione generata localmente.

Ma un altro e non lieve vantaggio è quello di prestarsi alla selezione acustica dei segnali stessi. Se ad es. un posto telegrafico è in ricezione di una emissione a 500 kHz ed ha regolata la sua eterodina a 500,8 kHz,

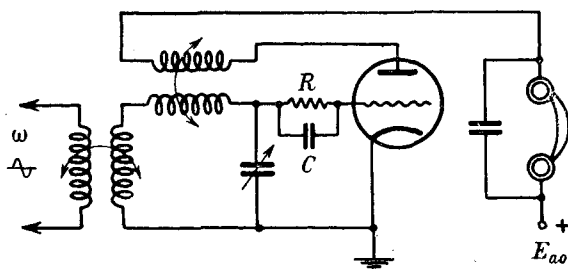



Fig. 379

udrà al telefono i segnali sotto forma di nota musicale di 800 Hz. Se contemporaneamente all'emissione desiderata, l'antenna captasse anche un'altra emissione di frequenza prossima a quella, per es. 503 kHz, essendo l'eterodina regolata a 500,8 kHz, la nota corrispondente all'onda intrusa sarebbe di 2200 Hz, quindi assai agevolmente distinguibile da quella di 800 Hz, per modo che la ricezione praticamente non ne sarebbe disturbata. Ma se poi si volesse addirittura sopprimere il disturbo prodotto dalla stazione indesiderata, basterebbe accordare l'eterodina locale sull'onda stessa di quest'ultima, oppure su una frequenza tanto diversa da portare praticamente fuori dalla banda udibile la nota cui darebbe luogo la emissione intrusa. Il primo risultato potrebbe ottenersi accordando l'eterodina su 503 kHz, con che la nota corrispondente al segnale desiderato si eleverebbe a 3000 kHz; trattandosi però di altezza di suono per cui l'orecchio non ha grande sensibilità, converrebbe portare l'eterodina a 498 o 498,5 kHz, con che la nota predetta assumerebbe l'altezza di 2000 o 1500 Hz, mentre la stazione intrusa non sarebbe praticamente ricevuta, perchè un suono di 5000 Hz è molto scarsamente percettibile dall'orecchio umano.

23. - Ricezione di emissioni mancanti di alcuni degli elementi componenti un'onda modulata. — Quando la trasmissione di un segnale fonico venga effettuata previa soppressione di una delle bande laterali, non

sono necessarie cautele particolari, in quanto che, come agevolmente si riconosce, la ricezione non richiede la ricostruzione della banda mancante. Infatti, siccome il segnale incidente è sostanzialmente composto di un elemento a pulsazione portante ω e di un altro avente pulsazione $\omega \pm \Omega$, dove Ω è la pulsazione modulante, basterà entrare con esso in un rivelatore per ricavare in uscita un elemento di pulsazione corrispondente alla differenza fra le due, cioè precisamente della pulsazione Ω desiderata, e la cui ampiezza riproduce proporzionalmente quella del segnale modulante, se la modulazione non è eccessivamente profonda.

Se invece la trasmissione è fatta previa soppressione dell'onda portante, bisogna, come sappiamo (XII, 23), che questa venga ripristinata alla ricezione. Occorre appena rilevare come sia strettamente necessario che la riproduzione della frequenza portante venga fatta nel modo più perfetto, diversamente si avrebbero gravi deformazioni nei suoni ricevuti rispetto a quelli trasmessi. Invero, si supponga ad es. che la emissione consti di una portante di frequenza 800 kHz modulata con le frequenze 500 e 800 Hz, con che la emissione stessa consta di elementi sinusoidali di frequenze 800,8; 800,5; 799,5; 799,2 kHz. Se la ricostruzione della portante alla ricezione venisse effettuata sulla frequenza di 800,1 kHz, cioè con un errore di 100 Hz, all'uscita del sistema rivelatore si troverebbero le frequenze 400, 700, 600, 900 Hz, in luogo delle due (500 e 800 Hz) originarie. È pertanto evidente la necessità che sia usata la massima precisione nel valore della frequenza sia alla emissione che alla ricezione.

Una tale necessità si fa parimenti sentire quando in trasmissione si sia soppressa, oltre l'onda portante, anche una delle bande laterali. Ovviamente occorrerà provvedere alla ricostruzione della portante alla ricezione, ed è facile rendersi conto che, anche in questo caso, tale ricostruzione deve essere fatta con altissima precisione, senza di che potrebbero aversi deformazioni intollerabili. Si pensi ad es. che il segnale modulante originario contenga due frequenze l'una doppia dell'altra (due note con intervallo d'ottava), ad es. 400 e 800 Hz, con le quali si è modulata una portante di 500 kHz, soppressa poi in trasmissione insieme ad una delle bande laterali. Ciò significa che l'onda incidente alla ricezione comprende la sola coppia di frequenze 500 400 e 500 800 (oppure la sola coppia 499 600 e 499 200). Ora, se, alla ricezione, anzichè generare una frequenza di 500 kHz, se ne generasse una di 500 050 Hz, differente cioè di soli 50 Hz, dopo rivelazione si avrebbero al telefono due note di 350 e 750 Hz rispettivamente, tali quindi da presentare fra di loro un intervallo fortemente dissonante.

La trasmissione con onda portante soppressa con o senza soppressione di una banda laterale è del resto assai raramente usata in radiotelefonia, ed in ogni modo limitatamente ai casi di frequenze portanti molto basse (onde lunghe) per le quali è relativamente più agevole evi-

tare quegli scarti di frequenza che possono addurre alle deformazioni di cui sopra si è parlato. Se ne fa talvolta uso per le trasmissioni — sempre caratterizzate da frequenza portante molto bassa — su filo, ed in questo caso si sopprime anche una delle bande laterali, ma per lo più la esatta riproduzione della frequenza portante è assicurata mediante un apposito segnale non modulato (detto segnale *pilota*) che viene convogliato sulla stessa conduttura, in generale con una frequenza diversa dalla portante effettiva, ma univocamente determinata da quella, e, per contro, tale che con essa si possa univocamente ricostruire la portante originaria: tale potrebbe ad es. essere la frequenza doppia o la tripla, o la metà o un terzo, od anche due terzi, quattro quinti, e così via. Per es., per una frequenza portante di 60 kHz, quella del pilota potrebbe essere di 40 kHz, utilizzandosi il seguente artificio: alla trasmissione si provvede affinchè la terza armonica del pilota sia in accordo con la seconda della portante effettiva, ed analogamente alla ricezione il generatore locale produrrà una frequenza tale che la sua seconda armonica sia in accordo con la terza del segnale pilota ricevuto.

24. - Disturbi alla ricezione. — Moltissime sono le cause che possono provocare disturbi alla ricezione regolare delle comunicazioni radiotelegrafiche e radiotelefoniche. Fra queste annoveriamo le modulazioni incrociate (ingl. *cross-talk*), i disturbi dovuti ai parassiti di ogni genere, e le evanescenze (ingl. *fading*), già accennate al n. 19.

Il fenomeno della modulazione incrociata può verificarsi quando una emissione modulata va ad incidere la propria modulazione sulla portante di una emissione diversa. Essa può avvertirsi segnatamente in ricezione di stazioni radiodiffondenti quando, avendosi l'apparecchio ricettore in ascolto su una certa stazione A di notevole potenza, talchè il regolatore di volume (del tipo agente sulla polarizzazione di griglia) sia disposto in modo che il funzionamento del primo tubo interessi un tratto curvo della caratteristica, vi sia contemporaneamente un'altra stazione B, emittente su una frequenza pochissimo diversa da quella di A. Avviene allora che, se A cessa di trasmettere segnali modulati ed emette soltanto la sua onda portante, il segnale modulato di B, arrivando alla griglia del primo tubo del ricevitore insieme a quella, viene parimenti rivelato come se fosse portato dalla portante di A; ed il fenomeno scompare se A cessa di emettere la sua onda portante. In generale la modulazione disturbante, cioè quella che B imprime sulla portante di A, è assai meno profonda di quella pertinente all'effettivo segnale disturbatore, e precisamente si può dimostrare che il rapporto fra la prima e la seconda profondità varia all'incirca proporzionalmente al quadrato della tensione E corrispondente alla portante di B, ed è inoltre inversamente proporzionale alla conduttanza mutua del primo tubo dell'apparecchio ricevi-

tore e direttamente proporzionale alla derivata seconda di tale conduttanza mutua rispetto alla tensione di griglia, cioè, per così dire, alla derivata dell'attitudine rivelatrice (XII, 9) che il tubo necessariamente presenta nelle condizioni di funzionamento supposte. Ne consegue che per eliminare un tale inconveniente basterà evitare di far lavorare il tubo là dove la curvatura ha variazioni *rapide*, per il che si potrà ad es. diminuire l'efficienza degli organi d'entrata (antenna), oppure converrà ricorrere ad un tubo a coefficiente di amplificazione variabile, per il quale la $\frac{d^2 g_m}{de_g^2}$ è sempre assai piccola anche in vicinanza della tensione di interdizione. In ogni caso conviene che il ricettore sia molto selettivo, in quanto che ciò giova a diminuire E.

I disturbi di carattere parassitario sono dovuti alla captazione, cui l'aereo ricevente non può sottrarsi, di qualsivoglia fatto elettromagnetico indipendente da quelli che si desiderano effettivamente raccogliere. Tali fatti possono essere dovuti alle cause più svariate, ad es. brusche aperture di circuiti elettrici posti nelle vicinanze (interruttori, scintillii di spazzole di macchine a collettore, ecc.). Fenomeni di questo genere hanno il carattere fondamentale della variabilità con leggi a priori imprecisabili, le quali, in virtù di un teorema d'Analisi, possono pensarsi ottenute sovrapponendo fatti sinusoidali ricoprenti una gamma *continua* di frequenze, e che, almeno in linea teorica, comprende *tutte* le frequenze possibili. Si comprende quindi che essi possono assimilarsi ad emissioni, talune delle quali necessariamente rientrano nella gamma di frequenze per la quale il ricevitore è predisposto. Ne consegue che, tanto più acuta sarà la selettività del ricevitore, tanto minore sarà l'importo dei fatti estranei che riescono ad influenzarlo, e pertanto una acuta selettività può rappresentare un mezzo di difesa contro tal genere di disturbi. In particolare può segnatamente giovare un aereo direttivo in quanto esso consente anche di limitare la zona di provenienza dei disturbi captabili. Senza dubbio giova anche una elevata sensibilità del ricevitore stesso, a condizione però che la intensità del campo dovuta al segnale che si vuol ricevere sia notevolmente maggiore di quella prodotta dal disturbo.

Possono rientrare in questa categoria i disturbi provenienti dai così detti parassiti *atmosferici*, i quali dipendono da fatti elettrici dell'atmosfera interessanti in qualunque modo il percorso delle onde e. m. che il ricevitore si propone di captare. Anche questi hanno la caratteristica fondamentale di ricoprire una estesissima gamma di frequenze, e pertanto la difesa contro tal genere di disturbi è ottenibile aumentando l'acutezza della selettività oppure procurando che sia elevato il rapporto fra la intensità del segnale e quella del disturbo.

Il fenomeno di affievolimento o evanescenza che spesso si verifica, nella ricezione di segnali r. t., per lo più per brevissimi intervalli di

tempo e segnatamente nel caso di onde corte, consiste in sostanza in ciò, che nel posto ricevente può giungere non un solo raggio d'onda, ma più raggi, i cui cammini, per cause imprecisabili e comunque capricciosamente variabili, hanno lunghezze diverse, e quindi i campi corrispondenti hanno fasi diverse; se, per es., ne giungono due di uguale direzione attraverso cammini che differiscono di mezza lunghezza d'onda, l'effetto complessivo è nullo, quindi il segnale è estinto.

Ciò costituisce senza dubbio un grave inconveniente in quanto che un tale stato di cose può evidentemente rendere addirittura inintelligibile il segnale. Ad esso si può porre un efficace rimedio disponendo più (generalmente tre) aerei riceventi situati a distanze anche dell'ordine di poche diecine di lunghezza d'onda, e sovrapponendo nel posto ricevente i segnali rivelati pertinenti alle relative ricezioni. Siccome la probabilità che il fenomeno si presenti contemporaneamente per tutti gli aerei è praticamente nulla, la ricezione riesce così scevra dall'inconveniente accennato.

CAPITOLO DECIMOQUARTO

RADIOCOMUNICAZIONI DIRETTIVE
CENNI DI RADIOGONIOMETRIA

1. - Il problema della direttività delle onde e. m. — Come abbiamo osservato a suo tempo (IX, 3), la distribuzione del campo elettromagnetico prodotto da un radiatore verticale — che potrà essere un dipolo, o un semidipolo, o in generale un'antenna reale equivalente ad una serie verticale di tali elementi — ha carattere essenzialmente simmetrico rispetto all'asse del radiatore, cioè la sua distribuzione, in ogni piano verticale, risulta indipendente dalla orientazione o *azimut* del piano stesso (rispetto ad un piano verticale fisso di riferimento, che potrebbe ad es. essere quello del meridiano del luogo). Ben inteso, si prescinde qui dalle asimmetrie dovute alla presenza di corpi o di fatti estranei al campo stesso, come potrebbero essere ostacoli di vario genere, diverso comportamento delle varie regioni del mezzo interessato, campi elettrici o magnetici esterni di altra origine, ecc.

La emissione da parte di un tale radiatore *non* può dunque avere carattere *direzionale*; in particolare quindi essa si presta ad essere ugualmente ricevuta da tutti i posti ricettori le cui posizioni possano essere condotte a coincidere mediante una conveniente rotazione attorno all'asse di simmetria del sistema.

Ciò costituisce senza dubbio un vantaggio in quei casi (radiodiffusione circolare, chiamate di soccorso) in cui il posto ricettore è a priori indeterminato, ed interessa precisamente che non vi siano località o direzioni privilegiate; ma per contro, quando si tratti di stabilire una comunicazione fra due punti determinati (radiotrasmissioni per scopi commerciali, militari, ecc.), può invece interessare che la maggior parte dell'energia e. m. irradiata dall'antenna trasmittente vada a raggiungere preferibilmente l'antenna ricevente e solo essa; e ciò, sia per realizzare una migliore utilizzazione della energia trasmessa dal posto trasmittente, sia per altri scopi (come ad es. segretezza). Se poi anche al posto ricevente si riesce a creare uno stato di privilegio di alcune direzioni in confronto di altre, esso avrà un analogo vantaggio, nel senso che gli sarà facilitata la discriminazione dei vari segnali che contemporaneamente potessero raggiungerlo.

Proponiamoci quindi in generale il problema di realizzare, con un sistema trasmittente, un diagramma azimutale d'emissione — o, come si dice, un *diagramma di direttività* — di forma *non simmetrica*. Per tale diagramma intendiamo una curva — tracciata nel piano orizzontale contenente la località trasmittente — i cui raggi vettori, secondo ogni azimut, sono proporzionali alla intensità del campo elettrico di radiazione ad una predeterminata distanza dal trasmettitore stesso ([1]).

Più generalmente, si dovrebbe parlare di una *superficie* di direttività, anzichè di una curva, intendendo che i raggi vettori possano essere spiccati non soltanto in direzione orizzontale, ma in una qualsivoglia direzione comunque inclinata sull'orizzonte.

Tratteremo in primo luogo delle questioni concernenti la direttività orizzontale, e successivamente di quelle riguardanti il comportamento delle onde e. m. secondo le varie direzioni contenute in un piano verticale.

2. - **Allineamenti di radiatori verticali.** — La creazione di azimut privilegiati è generalmente ottenuta, nel caso di antenne trasmittenti, sfruttando le peculiari proprietà dei così detti *allineamenti*.

Il tipo più semplice di allineamento è costituito in generale da n radiatori uguali, ad es. verticali, situati in un medesimo piano verticale ed a uguale distanza l'uno dall'altro, ed alimentati in modo che le rispettive

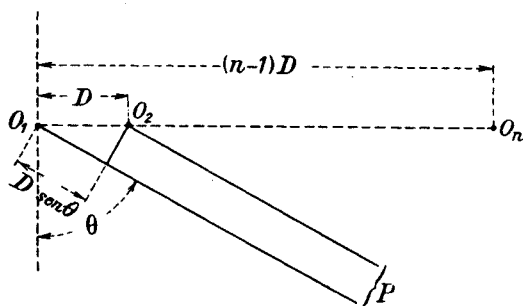



Fig. 380

correnti eccitatrici siano tutte in fase, oppure ciascuna presenti un medesimo sfasamento angolare φ rispetto alla precedente. Per modo che, se con $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \ldots, \mathbf{I}_n$ indichiamo i numeri complessi rappresentativi delle varie correnti, si avrà:

$$\mathbf{I}_2 = e^{j\varphi}\mathbf{I}_1\,, \quad \mathbf{I}_3 = e^{j\varphi}\mathbf{I}_2 = e^{2j\varphi}\mathbf{I}_1\,, \ldots, \quad \mathbf{I}_n = e^{j(n-1)\varphi}\mathbf{I}_1\,,$$

ed il primo dei casi considerati corrisponderebbe a $\varphi = 0$.

([1]) Nel caso del radiatore verticale, tale diagramma sarebbe evidentemente una circonferenza col centro nel punto traccia del radiatore.

Proponiamoci di calcolare il campo elettrico in un punto P a grande distanza da un tale sistema e posto nel piano orizzontale contenente le basi $O_1, O_2, \ldots, O_n$ dei radiatori, o i loro centri (fig. 380). Siccome i campi prodotti da ciascun radiatore hanno tutti la stessa direzione (verticale), la calcolazione che ci interessa si farà semplicemente sommando i numeri complessi corrispondenti ai campi dovuti ai singoli radiatori.

Ora, in primo luogo osserviamo che, se la distanza fra P ed il sistema degli n radiatori è assai grande in confronto alla massima distanza $O_1O_n = (n-1)D$ fra le loro tracce, le ampiezze $F_1, F_2, \ldots, F_n$ dei vari campi sono sensibilmente uguali. Invero, F_1 differisce ad es. da F_2 unicamente pel fatto che la distanza O_1P differisce da O_2P; e precisamente l'importo di tale differenza vale sensibilmente $O_1O_2 \operatorname{sen} \theta$, se θ è l'angolo che le O_1P, O_2P (che possono ritenersi parallele) formano con la direzione normale all'allineamento. D'altra parte noi sappiamo (IX, 3) che F_1 ed F_2 sono inversamente proporzionali ad O_1P, O_2P, talchè potremo scrivere:

$$F_1 = \frac{k}{O_1P}, \qquad F_2 = \frac{k}{O_2P}.$$

Quindi, assimilando le differenze ai differenziali e sostituendo $-D \operatorname{sen} \theta$ a $d(O_1P)$, si avrà:

$$F_2 - F_1 \cong d\left(\frac{k}{O_1P}\right) = \frac{k}{(O_1P)^2} D \operatorname{sen} \theta = F_1 \operatorname{sen} \theta \cdot \frac{D}{O_1P}.$$

Tale differenza pertanto risulta trascurabile se tale è la distanza D *in confronto ad* O_1P.

Se ora poniamo:

$$\beta = 2\pi \frac{D}{\lambda},$$

cioè indichiamo con β il valore angolare della distanza D *valutata in lunghezze d'onda*, si vede immediatamente che, se le correnti eccitatrici delle antenne sono fra loro in fase, i campi $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$ ad esse dovuti presenteranno successivi sfasamenti angolari

$$0, \quad \beta \operatorname{sen} \theta, \quad 2\beta \operatorname{sen} \theta, \quad \ldots, \quad (n-1)\beta \operatorname{sen} \theta \text{ (1) (2)},$$

in quanto che tali sono i valori angolari delle differenze dei cammini di propagazione delle emissioni partenti da $O_1, O_2, \ldots, O_n$ rispetto a quella di O_1.

Se si tiene conto anche degli sfasamenti esistenti fra le correnti eccitatrici dei successivi radiatori, si conclude che i numeri complessi rappresentativi dei campi che ci interessano saranno:

$$\mathbf{F}_1, \quad \mathbf{F}_2 = e^{j(\varphi + \beta \operatorname{sen} \theta)} \mathbf{F}_1, \quad \mathbf{F}_3 = e^{2j(\varphi + \beta \operatorname{sen} \theta)} \mathbf{F}_1, \ldots$$

---

(1) Si tratterà propriamente di anticipi se il punto P è situato nel semipiano posto da quella parte della normale ad O_1 che contiene l'allineamento, come in fig. 380.

(2) In generale questi angoli non saranno trascurabili se D, pur essendo piccolissimo rispetto ad O_1P, O_2P, ..., è comparabile con la lunghezza d'onda λ.

In ogni caso, per l'osservazione precedente, il complesso rappresentativo del campo risultante in P sarà:

$$\mathbf{F}_1(1 + e^{j\gamma} + e^{2j\gamma} + \ldots + e^{(n-1)j\gamma}) , \tag{1}$$

dove si è posto:

$$\gamma = \varphi + \beta \operatorname{sen} \theta .$$

Per avere l'ampiezza F_r del campo risultante basterà calcolare il modulo del numero (1), cioè il prodotto dell'ampiezza F del campo dovuto a ciascuna delle antenne per il modulo della espressione fra parentesi. Ora, quest'ultima è la somma di n termini in progressione geometrica di ragione $e^{j\gamma}$, quindi essa vale in generale

$$\frac{1 - e^{jn\gamma}}{1 - e^{j\gamma}} , \quad \text{per } \gamma \neq 2k\pi \quad (k \text{ intero}) ,$$

ed

$$n , \quad \text{per} \quad \gamma = 2k\pi .$$

Il modulo cercato è dunque:

$$F \left| \frac{\operatorname{sen} \frac{n\gamma}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\gamma}{2}} \right| \quad \text{oppure} \quad nF , \tag{2}$$

secondo che è $\gamma \neq 2k\pi$ oppure $\gamma = 2k\pi$ [1].

3. - Coppia di allineamenti paralleli. — Più generalmente supponiamo ora che, insieme all'allineamento considerato, se ne abbia anche un secondo, disposto come in fig. 381, costituito cioè da n radiatori $O'_1, O'_2, \ldots, O'_n$ identici ai precedenti e situati alla distanza D' dai corrispondenti $O_1, O_2, \ldots, O_n$. Quanto alle eccitazioni, supporremo che la fase di ogni O' anticipi angolarmente di ψ rispetto a quella del corrispondente O, per modo che gli sfasamenti di $O'_2, O'_3, \ldots, O'_n$ rispetto ad O'_1 saranno, come per l'allineamento $O_1, O_2, \ldots, O_n$, misurati da $\varphi, 2\varphi, \ldots (n-1)\varphi$.

Per calcolare il campo prodotto in P dal sistema dei due allineamenti basterà sommare i contributi ad essi portati dai radiatori O e dai radiatori O'.

Tale ultimo contributo è in modulo uguale al precedente valore (2), ma quanto alla fase, occorre al solito tener conto sia dello spostamento ψ

---

[1] Infatti, in generale, il modulo di

$$1 - e^{jx} = 1 - \cos x - j \operatorname{sen} x$$

vale

$$\sqrt{(1 - \cos x)^2 + \operatorname{sen}^2 x} = 2 \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} = 2 \left| \operatorname{sen} \frac{x}{2} \right| ,$$

e analogamente quello di $1 + e^{jx}$ vale $2 \left| \cos \frac{x}{2} \right|$.

fra le correnti dei due radiatori omologhi, sia di quello dovuto al fatto della diversa lunghezza del cammino di propagazione.

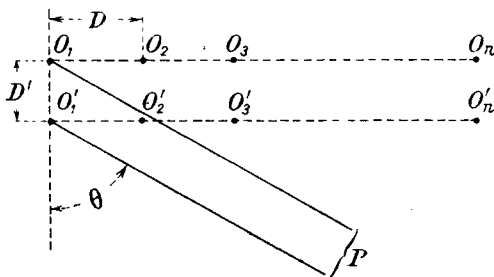



Fig. 381

La differenza di cammino relativa a due radiatori come O_1, O_1' equivale a $D' \cos\theta$, quindi lo spostamento di fase che ci interessa corrisponde ad un anticipo il cui valore angolare è misurato da

$$\beta' \cos\theta ,$$

dove

$$\beta' = 2\pi \frac{D'}{\lambda}$$

è il valore angolare della distanza fra i due allineamenti misurata, al solito, in lunghezze d'onda.

Ne consegue che il contributo di cui si parla anticipa rispetto al primo di:

$$\delta = \psi + \beta' \cos\theta .$$

L'ampiezza F_r' del campo risultante si otterrà dunque moltiplicando il precedente valore (2) per il modulo di

$$1 + e^{j\delta} .$$

Si avrà dunque finalmente (cfr. nota prec.):

$$F_r' = 2F_r \left| \cos\frac{\delta}{2} \right| = 2F \frac{\left| \operatorname{sen}\frac{n\gamma}{2} \cos\frac{\delta}{2} \right|}{\left| \operatorname{sen}\frac{\gamma}{2} \right|} . \tag{3}$$

In modo analogo si procederebbe se si avessero 3, 4,... allineamenti analoghi, anzichè due soli.

4. - Casi particolari. - Coppie di radiatori. — Dalle precedenti formole si possono trarre importanti conseguenze che qui svolgeremo limitatamente ai casi che più interessano le pratiche applicazioni.

Ad es., il caso di una coppia di radiatori può trattarsi o con la (2) in cui si ponga $n = 2$, o con la (3) in cui si ponga $n = 1$. Dall'un caso all'altro variano soltanto i valori di γ e δ.

Partendo ad es. dalla (2), si avrà:

$$F_r = |\, p\,|\, F \qquad \text{con} \qquad p = 2 \cos \frac{\gamma}{2} = 2 \cos \frac{\varphi + \beta \operatorname{sen} \theta}{2} .$$

Per giungere a risultati concreti occorre attribuire a φ e β valori particolari.

a) Se i radiatori sono eccitati in fase e la loro distanza è uguale ad una lunghezza d'onda, si avrà:

$$\varphi = 0 \qquad \text{e} \qquad \beta = 2\pi ,$$

quindi il fattore p assume il valore:

$$p = 2 \cos (\pi \operatorname{sen} \theta) .$$

Per $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$, si ha rispettivamente $p = 2, -2, 2, -2$, cioè $F_r = 2F$, vale a dire si hanno così i valori massimi di F_r, giacchè è evidente che F_r non può mai superare $2F$.

Si avrà invece $F_r = 0$ in quelle direzioni per cui risulta $\operatorname{sen} \theta = \pm \frac{1}{2}$, vale a dire per $\theta = \pm 30^\circ, \pm 150^\circ$.

Il diagramma di direttività azimutale si presenta dunque nel modo indicato in fig. 382. Come si vede, vi sono due direzioni di campo massimo, e sono quelle parallela e normale all'allineamento, e due di campo nullo, inclinate di 30° rispetto alla seconda. Di ciò possiamo renderci intuitivamente conto osservando che ad es., nella direzione dell'allineamento, il maggior cammino di una propagazione rispetto all'altra uguaglia esattamente una lunghezza d'onda e quindi non dà luogo a sfasamento, ed altrettanto avviene in direzione normale perchè non vi è differenza di cammino; invece, per le direzioni inclinate di 30° rispetto alla normale, i due cammini differiscono di mezza lunghezza d'onda $\left(\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2}\right)$ e quindi i due campi componenti si trovano in opposizione.

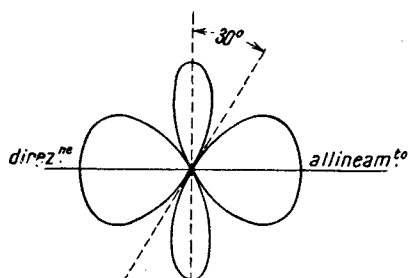



Fig. 382

b) Se i due radiatori sono eccitati in opposizione di fase, sarà da porre, nella (2), $\varphi = \pi$. Si ottiene così per l'ampiezza F_r del campo risultante l'espressione:

$$F_r = 2F \left| \operatorname{sen} \left(\frac{\beta \operatorname{sen} \theta}{2} \right) \right| ,$$

dove, essendo D la distanza fra i due radiatori, è:

$$\beta = 2\pi \frac{D}{\lambda} .$$

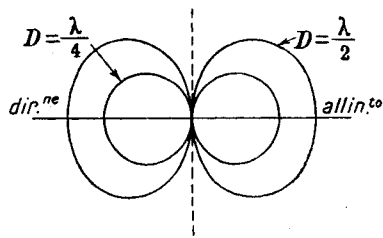



Fig. 383

Se è $D \leq \frac{\lambda}{2}$, cioè $\beta \leq \pi$, il fattore $\operatorname{sen}\left(\frac{\beta \operatorname{sen} \theta}{2}\right)$ raggiunge il suo valore massimo $\operatorname{sen} \frac{\beta}{2}$ soltanto per $\theta = \frac{\pi}{2}$, cioè nella direzione dell'allineamento, mentre nella direzione normale ($\theta = 0$) si ha sempre $F_r = 0$. $\left(\text{La fig. 383 rappresenta i diagrammi di direttività per } D = \frac{\lambda}{2} \text{ e } D = \frac{\lambda}{4}\right)$.

Ma, per $D > \frac{\lambda}{2}$, si possono avere dei massimi anche in direzioni diverse da quella, non solo, ma perfino in direzioni molto prossime alla normale, purchè $\frac{D}{\lambda}$ sia sufficientemente grande.

Infatti, per $\frac{D}{\lambda} > \frac{1}{2}$, cioè $\beta > \pi$, il fattore $\left| \operatorname{sen} \frac{\beta \operatorname{sen} \theta}{2} \right|$ può, in direzioni opportune, raggiungere il valore 1. I corrispondenti angoli θ sono quelli che soddisfano alla relazione

$$\beta \operatorname{sen} \theta = (2k + 1)\pi \qquad (k \text{ intero}) ,$$

cioè:

$$\operatorname{sen} \theta = (2k + 1) \frac{\pi}{\beta} = (2k + 1) \frac{\lambda}{2D} .$$

Gli angoli cercati sono dunque quelli i cui seni, in valore assoluto, valgono:

$$\frac{\lambda}{2D}, \quad \frac{3\lambda}{2D}, \quad \frac{5\lambda}{2D}, \ldots ,$$

essendo questa successione formata da tanti elementi quanti sono i numeri dispari non superiori a $\frac{2D}{\lambda}$.

Il più piccolo θ_0 di tali angoli è quello per cui si ha

$$\operatorname{sen} \theta_0 = \frac{\lambda}{2D} ;$$

e, come si vede, è tanto più prossimo a zero quanto maggiore è il rapporto $\frac{2D}{\lambda}$, come s'era asserito.

Le direzioni cui corrisponde valore nullo del campo sono tutte quelle per le quali $\frac{\beta \operatorname{sen} \theta}{2}$ risulta multiplo di π, quelle cioè soddisfacenti a

$$\operatorname{sen} \theta = k \frac{\lambda}{D} \quad (k \text{ intero}).$$

Fra esse non manca mai la direzione $\theta = 0$, anzi questa è la sola finchè sia $D \leq \lambda$; ma se D supera λ, se ne hanno anche altre, e precisamente quelle per le quali $|\operatorname{sen} \theta|$ vale:

$$\frac{\lambda}{D}, \quad \frac{2\lambda}{D}, \quad \frac{3\lambda}{D}, \ldots,$$

la successione avendo tanti elementi quanti sono gli interi contenuti in $\frac{D}{\lambda}$, cioè quante sono le lunghezze d'onda contenute in D.

Ad es., per

$$D = \lambda, \quad \frac{3\lambda}{2}, \quad 2\lambda, \quad 4\lambda,$$

si hanno i massimi nelle seguenti direzioni:

per $D = \lambda$: $|\operatorname{sen} \theta| = \frac{1}{2}$ cioè $\theta = 30^\circ$,

» $D = \frac{3\lambda}{2}$: $|\operatorname{sen} \theta| = \frac{1}{3}, 1$ » $\theta = 19^\circ 30', 90^\circ$,

» $D = 2\lambda$: $|\operatorname{sen} \theta| = \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$ » $\theta = 14^\circ 30', 48^\circ 40'$,

» $D = 4\lambda$: $|\operatorname{sen} \theta| = \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}$ » $\theta = 7^\circ 10', 2^\circ, 38^\circ 40', 61^\circ$;

e valori nulli nelle seguenti:

per $D = \lambda$: $|\operatorname{sen} \theta| = 0{,}1$ cioè $\theta = 0^\circ, 90^\circ$,

» $D = \frac{3\lambda}{2}$: $|\operatorname{sen} \theta| = 0, \frac{2}{3}$ » $\theta = 0^\circ, 41^\circ 45'$,

» $D = 2\lambda$: $|\operatorname{sen} \theta| = 0, \frac{1}{2}, 1$ » $\theta = 0^\circ, 30^\circ, 90^\circ$,

» $D = 4\lambda$: $|\operatorname{sen} \theta| = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$ » $\theta = 0^\circ, 14^\circ 30', 30^\circ, 48^\circ 40', 90^\circ$ (1).

---

(1) Naturalmente, insieme ad ogni $\theta = \theta_0$ devesi considerare anche $\theta = \pi \pm \theta_0$ e $\theta = -\theta_0$, il che corrisponde ad una coppia di direzioni simmetricamente disposte rispetto alla normale all'allineamento.

Le figure 384 *a*) *b*) *c*) *d*) mostrano i corrispondenti diagrammi polari, i quali sono tutti inscritti in un cerchio di raggio corrispondente al massimo $2F$.

Tali comportamenti sono facilmente comprensibili anche per via diretta. Ad es., è chiaro a priori che in direzione normale ($\theta = 0$) il campo

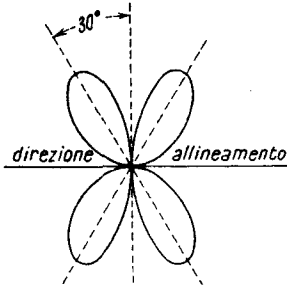



Fig. 384 *a*)

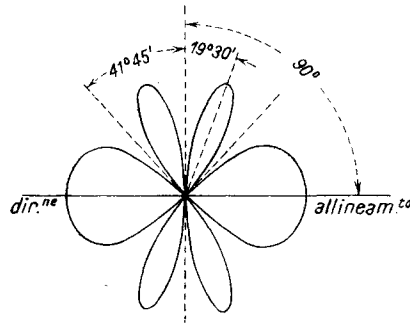



Fig. 384 *b*)

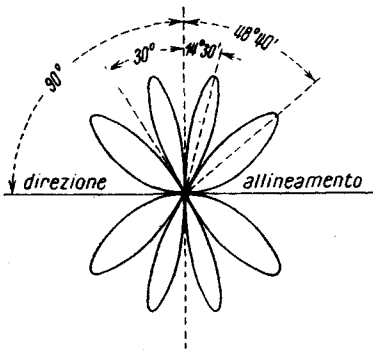



Fig. 384 *c*)

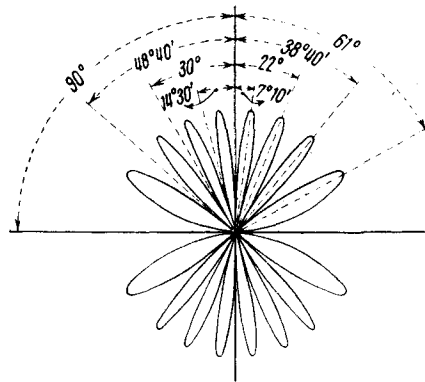



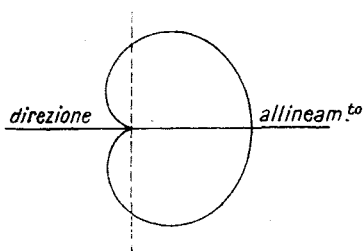
Fig. 384 *d*)

risultante debba essere sempre nullo, perchè i contributi ad esso apportati dai due campi singoli hanno in ogni istante valori opposti. Così nei casi $D = \frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}$ è facile vedere che la direzione dell'allineamento corrisponde ad un massimo, in quanto che i contributi recati dai due campi componenti risultano in fase, essendo la originaria differenza di fase compensata dalla differenza di cammino. Invece quando D uguaglia un numero intero di lunghezze d'onda, i due contributi si trovano nelle stesse

condizioni come se i due radiatori fossero sovrapposti, quindi il risultato è nullo. E così via.

c) Un terzo caso assai interessante è quello in cui i due radiatori sono eccitati in quadratura e distano di un quarto di lunghezza d'onda. In questo caso è da porre $\varphi = \frac{\pi}{2}$ e $\beta = \frac{\pi}{2}$ nella formola generale (2), e, ragionando come nei casi precedenti, si trova che vi è *una sola* direzione di massimo; essa è parallela all'allineamento e va dal radiatore che è eccitato in anticipo verso quello che ritarda, mentre nella direzione opposta il campo è *nullo*. Ciò si può facilmente comprendere riflettendo che, nel senso dal radiatore in anticipo a quello in ritardo, la differenza di fase è compensata dalla differenza di cammino, invece nel senso opposto le due differenze si sommano per dare luogo ad un comportamento identico a quello che potrebbe prodursi con due radiatori sovrapposti ed eccitati in opposizione.

Fig. 385

Il diagramma di direttività ha l'aspetto della fig. 385. Come si vede, l'effetto direttivo, in questo caso, non concerne solo la direzione, ma anche il senso, in quanto che, nei due sensi della direzione dell'allineamento, si ha rispettivamente il valore massimo ed il valore nullo. Si ha cioè un diagramma *unidirezionale*, come se il radiatore situato dalla parte *oscura* funzionasse da *riflettore*.

5. - Allineamenti semplici e doppi. — Esaminiamo ora alcuni sistemi di allineamenti a più di due elementi. Quelli che più interessano le applicazioni sono i seguenti:

a) Allineamento di n radiatori distanziati di mezza lunghezza d'onda ed eccitati in fase.

Sarà da porre, nella (2), $\beta = \pi$ e $\varphi = 0$, quindi $\gamma = \pi \operatorname{sen} \theta$. Si ottiene così:

$$F_r = F \frac{\left| \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi \operatorname{sen} \theta}{2}\right) \right|}{\left| \operatorname{sen} \frac{\pi \operatorname{sen} \theta}{2} \right|} \qquad \text{per } \operatorname{sen} \theta \neq 2k,$$

$$F_r = nF \qquad \text{per } \operatorname{sen} \theta = 2k \qquad (k \text{ intero}).$$

Alla seconda non può soddisfarsi che con $k = 0$, e quindi $\theta = 0$ oppure $= \pi$, nel quale caso si ha $F_r = nF$. Questo è evidentemente il massimo

dei valori assumibili da F_r, e si verifica nella direzione normale all'allineamento. La intensità F_r risulta nulla in tutte quelle direzioni per le quali $\frac{n\pi \operatorname{sen} \theta}{2}$ è diverso da zero e multiplo di π, cioè per

$$n \operatorname{sen} \theta = 2h \quad (h = 1,2, \ldots),$$

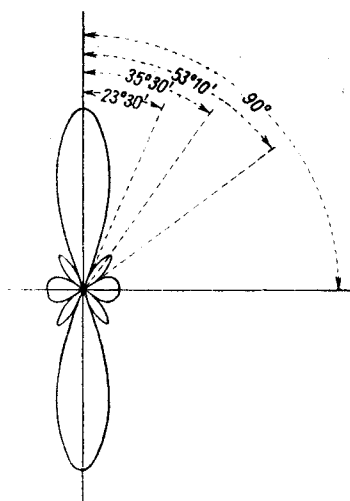
vale a dire per

$$|\operatorname{sen} \theta| = \frac{2}{n}, \frac{4}{n}, \ldots, \frac{m}{n},$$

dove m è il massimo numero pari contenuto in n.

Fra ogni coppia di tali direzioni ve n'è una cui corrisponde un massimo di F_r; si tratta però di massimi secondari, minori cioè di quello corrispondente a $\theta = 0$ [1].

Fig. 386

Il diagramma di direttività assume l'aspetto di fig. 386 (che si riferisce ad $n = 5$). È da osservarsi che con l'aumentare di n diminuisce l'angolo, definito da $\operatorname{sen} \theta = \frac{2}{n}$, che delimita il *lobo* principale del diagramma, cioè aumenta l'*acutezza* del diagramma di direttività.

b) Doppio allineamento composto di due gruppi di n radiatori separatamente eccitati in fase e distanziati di mezza lunghezza d'onda, essendo il secondo allineamento distanziato di un quarto di lunghezza d'onda dal primo ed i corrispondenti radiatori eccitati in quadratura rispetto ai primi.

In questo caso sarà da utilizzarsi la (3) in cui per γ, come sopra, sarà da porsi il valore $\pi \operatorname{sen} \theta$, mentre a δ dovrà attribuirsi il valore $\frac{\pi}{2}(\pm 1 + \cos \theta)$ a seconda che l'eccitazione del secondo allineamento è in anticipo o in ritardo rispetto a quella del primo.

L'espressione del modulo del campo sarà dunque:

$$F'_r = 2F_r \left| \cos \frac{\delta}{2} \right|,$$

---

[1] Con un semplice calcolo si dimostra che le direzioni di tali massimi secondari sono quelle definite da:

$$n \operatorname{tg} \frac{\pi \operatorname{sen} \theta}{2} = \operatorname{tg} \frac{n\pi \operatorname{sen} \theta}{2}.$$

cioè si otterrà dalle precedenti moltiplicando per

$$2\left|\cos\frac{\delta}{2}\right| = 2\left|\cos\left(\pm\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\cos\theta\right)\right|.$$

Il massimo principale si ha soltanto per $\theta = \pi$, ed ha valore doppio del precedente, mentre per $\theta = 0$ si ha $F'_r = 0$ se la fase del secondo allineamento anticipa; l'opposto avviene nel caso di ritardo.

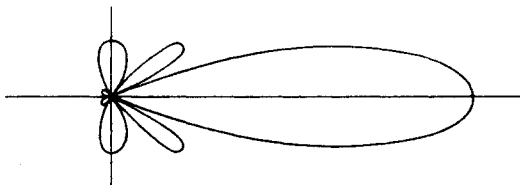



Fig. 387

Si realizza così un diagramma *unidirezionale*. Il tipo di un tale diagramma è indicato in fig. 387 la quale si riferisce al caso di $n = 5$.

I diagrammi delle figg. 386 e 387 manifestano chiaramente le proprietà direzionali dei corrispondenti sistemi di radiatori, analoghe, ma più marcate, di quelle dei sistemi di due radiatori considerati al n. prec.

6. - *Economia realizzabile coi sistemi direttivi.* — È di grande importanza rilevare che tutti i sistemi direttivi precedentemente esaminati consentono di realizzare una sensibile economia energetica nel senso che, per ottenere a parità di distanza la medesima intensità di campo nella direzione del massimo principale con un radiatore *unico*, questo dovrebbe irradiare una quantità di energia notevolmente maggiore di quella che invece è richiesta dal sistema direttivo considerato. Più precisamente, se si pensa che la potenza irradiata è proporzionale al quadrato dell'intensità F del campo (IX, 4), si conclude agevolmente che il «guadagno» energetico di cui si tratta è misurato dal rapporto fra le aree dei diagrammi di direttività, ritenendo che quello relativo al radiatore unico ha ovviamente forma circolare [1]. Per convincersene, basta pensare che la potenza irradiata in ogni angolo $d\theta$ è proporzionale ad $F^2 d\theta$, e che se ϱ è il raggio vettore del diagramma di direttività, $\frac{1}{2}\varrho^2 d\theta$ misura quella parte dell'area di questo, che è compresa entro lo stesso angolo. Per

[1] Tali considerazioni hanno soltanto carattere indicativo, in quanto che, come si potrebbe rilevare da uno studio più profondo, che non può trovare posto qui, la radiazione prodotta dalle singole antenne è influenzata dalla presenza delle altre.

dare un'idea di tale economia energetica, ci limiteremo ad asserire che, ad es., si può dimostrare che il vantaggio ottenibile con un allineamento composto di infiniti elementi occupanti una ampiezza uguale ad n lunghezze d'onda, munito di analogo allineamento riflettore, corrisponde ad un rapporto 5,33 n.

La realizzazione effettiva dei sistemi considerati richiede ovviamente la utilizzazione di una estensione spaziale tanto maggiore quanto maggiore è la lunghezza d'onda. Ciò spiega perchè non possa praticamente pensarsi a radiotrasmissioni direttive nel caso di onde lunghe.

Non bisogna dimenticare poi che, come già osservammo al n. 1, gli ovvi vantaggi delle comunicazioni a spiccato carattere direzionale ne limitano però evidentemente l'applicazione al caso in cui si tende a realizzare una comunicazione fra due punti ben determinati.

7. - **Alimentazione degli allineamenti.** — Vogliamo ora vedere come in effetto si pervenga alla concreta realizzazione di allineamenti di radiatori soddisfacenti alle condizioni volute per la direttività della emissione.

In generale, nel caso di onde corte, il radiatore elementare può essere un'antenna avente nel punto centrale un ventre di corrente: essa quindi è costituita da un conduttore di lunghezza corrispondente a $\frac{\lambda}{2}$ ed isolato dal suolo.

A tali radiatori elementari daremo, come di solito si fa, il nome di *dipoli*, quantunque non si tratti di dipoli propriamente detti, bensì della riunione di due antenne a quarto d'onda, cioè di un sistema in cui la distribuzione dei moduli delle correnti e delle tensioni è dei tipi sinusoidali esaminati al Cap. IX [1].

La disposizione solitamente usata è quella descritta nei nn. prece. e precisamente al n. 5 *a*) *b*), ed il solo problema di cui dobbiamo ormai occuparci è quello relativo alla eccitazione di un tale sistema di dipoli, la quale dovrà effettuarsi in modo da realizzare le desiderate relazioni di fase.

La eccitazione potrà essere fatta nei nodi di tensione (ventri di corrente) oppure anche nei nodi di corrente (ventri di tensione), e in ogni caso occorrerà che la linea cui è affidato il compito di addurre la corrente sia così costruita e dimensionata in lunghezza da far sì che ognuno dei punti di alimentazione corrisponda effettivamente, secondo i casi, ad un ventre o ad un nodo di corrente.

La linea di alimentazione che dai generatori raggiunge i dipoli è in tal caso nelle condizioni di cui si è fatto cenno in XIII, 10; essa cioè costituisce parte integrante del sistema radiante (pur non avendo in generale

[1] In un dipolo propriamente detto la distribuzione del modulo della corrente sarebbe costante e quella della tensione lineare.

sensibili proprietà radiative) e sarà essa stessa sede di regime stazionario. Se si tratta [di alimentare un solo dipolo, potrà usarsi la disposizione indicata in fig. 388; se i dipoli sono più d'uno (fig. 389), le lunghezze

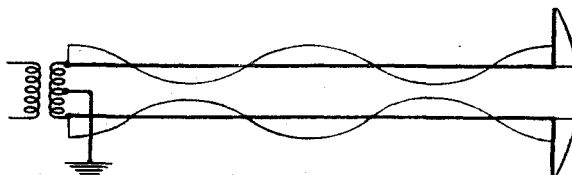



Fig. 388

dei vari tronchi della linea dovranno essere studiate in modo che i punti A, B, C, ... di immissione della corrente ai centri dei dipoli corrispondano tutti a ventri di corrente.

Su una stessa verticale si dispongono in generale più dipoli — o, il che equivale, l'eccitazione viene fatta su una armonica (V, 11) — e pertanto per ogni fila verticale si avrà un solo punto di alimentazione.

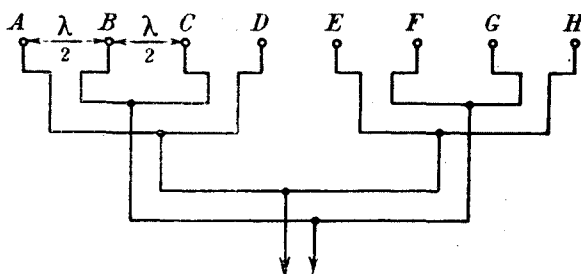



Fig. 389

In altre parole, ogni tratto verticale comprenderà un certo numero di dipoli elementari di lunghezza $\frac{\lambda}{2}$. Contemporaneamente bisognerà però disporre le cose in modo che, per ogni coppia di dipoli contigui, sia annullato l'effetto di uno di essi; diversamente l'effetto complessivo, per un numero pari di dipoli, sarebbe nullo.

A tutte queste condizioni si può soddisfare usando vari metodi, di cui qui segnaleremo i principali:

a) *Aereo tipo Marconi-Franklin.*

Seguendo il concetto accennato in V, 13, ogni filo verticale contiene un certo numero di mezze lunghezze d'onda, e fra le estremità di due tali elementi contigui è intercalata una induttanza in cui viene a *concentrarsi* la mezza lunghezza d'onda fra di essi compresa, quella cioè alla quale corrisponderebbe una distribuzione di corrente opposta alla prece-

dente ed alla seguente (fig. 390). Preferibile a questo dispositivo è quello indicato in fig. 391, pure dovuto alla Compagnia Marconi, e conosciuto sotto il nome di

b) ***Aereo a distribuzione costante di corrente.***

Lo sviluppo del filo verticale non è rettilineo, ma comporta dei tratti ripiegati secondo disposizioni opportunamente studiate. Ad es., con quella

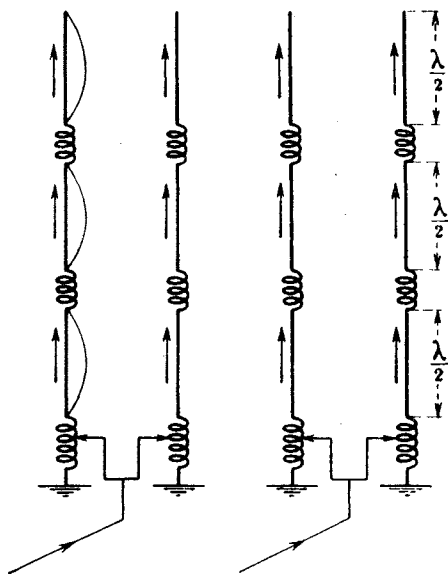



Fig. 391

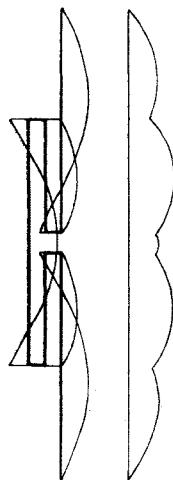



Fig. 390

rappresentata in fig. 391, l'andamento dei moduli delle correnti lungo l'asse verticale del sistema corriponde al diagramma a fianco disegnato. Come si vede, esso presenta variazioni relativamente modeste rispetto all'ordinata media, donde appunto deriva la denominazione attribuita a tale tipo di aereo.

Per ciascuno dei tipi precedenti si ricorrerà in generale a più elementi verticali analoghi ed allora si presenta la questione del come effettuare l'alimentazione in fase dei vari dipoli, o sistemi di dipoli verticali, costituenti l'allineamento. A tale proposito meritano di essere segnalati i tipi seguenti.

c) ***Aereo tipo R.C.A.***

L'alimentazione è fatta in un solo punto di una linea orizzontale a due fili, dalla quale sono derivati i dipoli propriamente detti (fig. 392). Fra i due fili costituenti la linea sono intercalate delle opportune induttanze, il cui ufficio è quello di annullare la capacità distribuita della linea, ivi compresa quella dovuta ai dipoli derivati sulla linea stessa. In tali condizioni questa si comporta come se avesse capacità distribuita

nulla, e quindi la velocità di propagazione della fase, che (V, 6, *a*) vale in generale $\frac{1}{\sqrt{lc}}$, assume valore infinitamente grande. Ciò val quanto dire che le correnti nei vari punti della linea sono fra loro in fase, e quindi tutti i dipoli su di essa derivati vengono eccitati in fase.

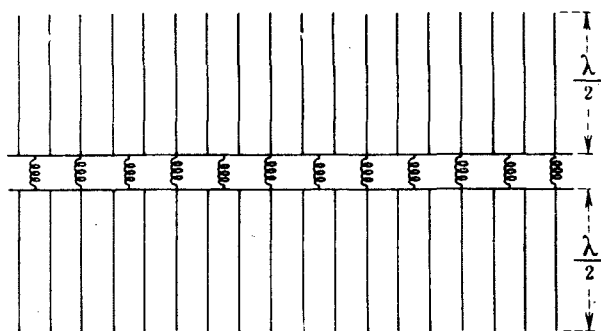



Fig. 392

d) *Aereo tipo Telefunken.*

Questo tipo di aereo corrisponde alla disposizione rappresentata in fig. 393; l'alimentazione viene fatta al solito con una linea in regime stazionario, e i vari dipoli, ciascuno di lunghezza $\frac{\lambda}{2}$, vengono deri-

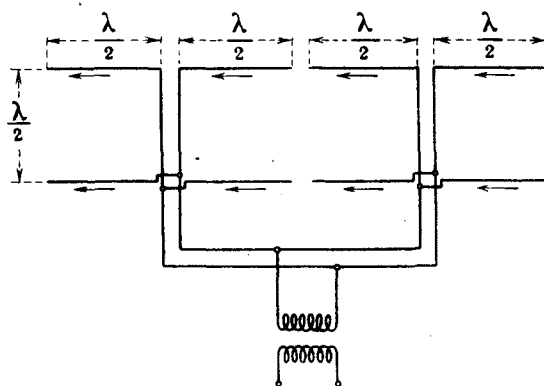



Fig. 393

vati a coppie in quei punti della linea stessa in cui si ha un nodo di corrente, quindi pure a distanza di mezza lunghezza d'onda l'uno dall'altro, avendo cura di invertire le connessioni da un nodo al successivo. Generalmente tale sistema viene usato per eccitare dipoli orizzontali (v. n. 10).

e) Aereo tipo Standard.

Con questo dispositivo i dipoli vengono ricavati da una unica linea chiusa (o da più analoghe linee) disposta in piano verticale e composta di tratti verticali alternati con tratti orizzontali; tanto i primi quanto i secondi sono di lunghezza $\frac{\lambda}{2}$, ed i tratti orizzontali che vengono a trovarsi alla stessa altezza sono pressochè sovrapposti (fig. 394). Si vede subito che con tale disposizione i tratti verticali funzionano come tanti dipoli di lunghezza $\frac{\lambda}{2}$ eccitati in fase, mentre l'effetto complessivo di ogni coppia di tratti orizzontali è nullo.

Fig. 394

Due tipi assai interessanti di dispositivi che consentono di raggiungere scopo analogo sono i seguenti.

f) Aereo a greca.

Esso consiste essenzialmente (fig. 395) in un tratto di linea ripiegato a greca con lati di lunghezza $\frac{\lambda}{4}$. In regime stazionario, i tratti verticali vengono ad essere percorsi da correnti in fase, mentre i tratti orizzontali sono percorsi metà da corrente in un senso, metà da corrente opposta. È interessante osservare che il diagramma della distribuzione della corrente nei tratti verticali corrisponde ad una porzione di sinusoide, quale precisamente si avrebbe se i tratti stessi fossero altrettante antenne elementari caricate con capacità terminali ad entrambi gli estremi.

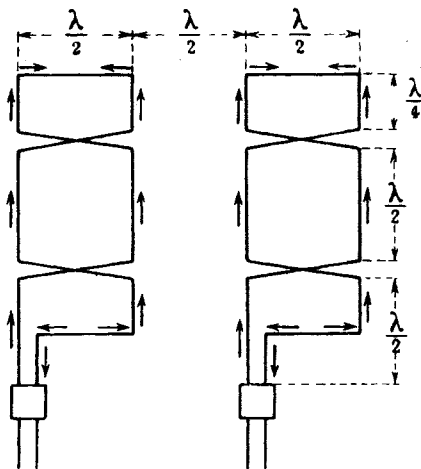
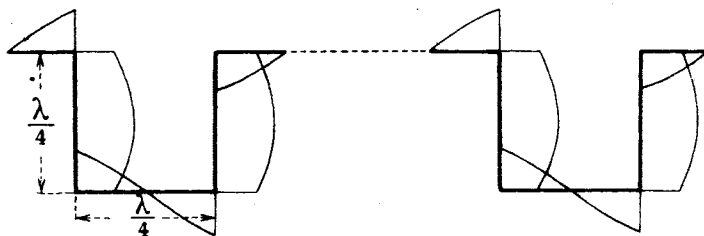



Fig. 395

g) Aereo Chireix-Mesny.

Questo è composto di un sistema di fili situati in un piano verticale avente la disposizione indicata in fig. 396. L'alimentazione è fatta nei

punti R ed S in guisa che ivi venga a trovarsi un nodo di corrente. Lo sviluppo dei fili a zig-zag costituisce evidentemente un prolungamento della linea di alimentazione, e, poichè i vari lati hanno lunghezze uguali a $\frac{\lambda}{2}$, due successivi di essi vengono ad essere percorsi da correnti in sensi opposti, come indicato dalle frecce. Ne segue che le coppie di lati diretti come AR, SB danno luogo ad una emissione direttiva nel senso normale

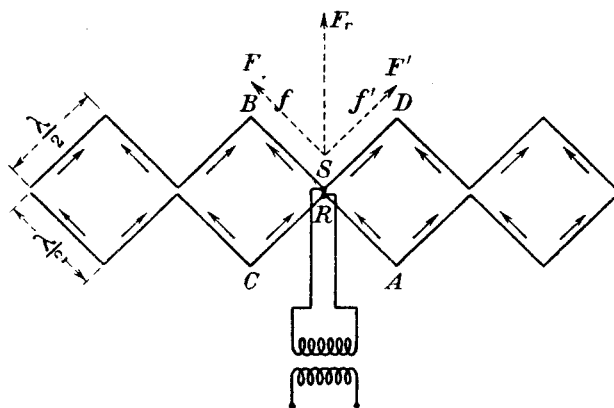



Fig. 396

al piano del sistema, ma tale che il campo elettrico a distanza sarà inclinato di 45° sulla verticale, ed analogamente avviene per le coppie CR, SD. I due campi avranno dunque ampiezze F, F' uguali, e direzioni corrispondenti a quelle indicate dalle frecce f e f'. Il loro risultante F_r sarà un campo verticale di ampiezza $\sqrt{2}F$.

8. - Allineamenti doppi. - Riflettori parassiti. - Riflettori parabolici. — Quando si voglia far uso di un doppio allineamento allo scopo di costituire un sistema riflettente, bisogna provvedere alla eccitazione del secondo allineamento, distante dal primo di un quarto di lunghezza d'onda, in modo che in esso si abbia circolazione di correnti in quadratura rispetto a quelle del primo allineamento.

Un modo abbastanza semplice per realizzare ciò consiste nel *non* eccitare direttamente il secondo allineamento, il quale così sarà percorso dalle correnti *indotte* dal primo. Tali correnti, come in ogni trasformatore, sarebbero in opposizione di fase rispetto alle inducenti, ma siccome i due sistemi distano di $\frac{\lambda}{4}$, ne sorgerà un ulteriore ritardo di un quarto di periodo per effetto del tempo richiesto dalla propagazione. In definitiva il ritardo complessivo sarà di tre quarti di periodo, equivalente ad un *anti-*

cipo di un quarto, come appunto è richiesto affinchè il secondo allineamento funzioni da riflettore e quindi la radiazione massima, oltre ad essere diretta normalmente al piano dell'allineamento, abbia il senso voluto, cioè si verifichi da quella parte del primo allineamento che non comprende il secondo. Gli elementi di questo, in quanto sono sostanzialmente alimentati dal primo per effetto trasformatorico, si denominano radiatori *parassiti*.

Per un complesso di ragioni il cui esame esorbita dai limiti imposti a questo Corso, si può dimostrare che, nelle condizioni sopra descritte, non è possibile realizzare un preciso effetto riflettente. L'esperienza conferma ciò ed inoltre suggerisce di assegnare alla distanza fra i due allineamenti un valore molto prossimo a $\frac{\lambda}{3}$, anzichè a $\frac{\lambda}{4}$.

Fig. 397

Un modo più efficace per ottenere un effetto di direttività per riflessione si realizza, imitando noti procedimenti relativi alle onde ottiche, col disporre opportunamente una superficie metallica di elevatissima conducibilità, la quale si comporta come un riflettore atto a dirigere le onde e. m. nel modo desiderato. All'uopo si possono ad es. sfruttare le note proprietà della parabola. Come è noto, questa curva (fig. 397) è definita dalla condizione che ogni suo punto P abbia eguali distanze da un punto fisso F, il *fuoco*, e da una retta fissa d, la *direttrice*, ed è pur noto che la normale nel suo punto generico P biseca l'angolo che la FP forma con la parallela per P all'asse a (normale a d per F).

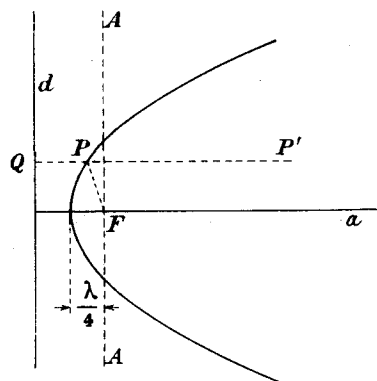
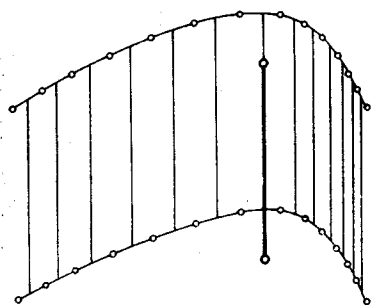
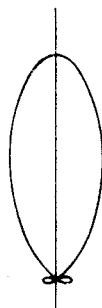
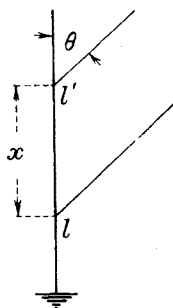



Fig. 398

Pertanto, se F è la traccia di un radiatore verticale, e si costituisce un *riflettore* mediante un cilindro metallico di elevata (teoricamente infinita) conducibilità, avente per sezione retta una parabola, i raggi d'onda uscenti da F, dopo la riflessione, saranno tutti diretti parallelamente all'asse. Se ora si pensa che, come già fu osservato in altra occasione (V, 10), la riflessione produce uno spostamento di fase di 180°, si deduce che un raggio riflesso come PP' si

troverà nelle stesse condizioni di uno che partisse da un punto situato sulla retta PP' alla distanza $\frac{\lambda}{2}$ dal punto Q d'incontro di questa con d. Da ciò si conclude subito che, se la distanza focale è $\frac{\lambda}{4}$, i raggi d'onda riflessi si comportano come se uscissero, in direzione a, da un allineamento ad infiniti elementi eccitati in fase, situato lungo la retta AA normale ad a e comprendente il radiatore F.

In pratica, ci si può avvicinare a codeste condizioni ideali anche se il riflettore, anzichè con una superficie cilindrica continua, viene costituito in modo discontinuo, cioè mediante un certo numero di generatrici del cilindro stesso, talchè il funzionamento di ciascun elemento di tale riflettore risulta assimilabile a quello del radiatore parassita precedentemente considerato. Naturalmente poi, il riflettore avrà in pratica dimensioni finite tanto in altezza che in larghezza, per modo che il suo effetto si scosterà alquanto da quello del riflettore ideale. Ad es., con una disposizione come quella indicata in fig. 398, si può ottenere un diagramma di direttività del tipo indicato nella figura stessa.

9. - **Direttività zenitale di un radiatore verticale.** — Proponiamoci ora di esaminare come varia la intensità del campo prodotto a distanza da una antenna verticale, nelle varie direzioni *zenitali*, contenute cioè in un piano verticale contenente il radiatore.

Fig; 399

Un tale computo può farsi col sussidio della formola fondamentale (8) del Cap. IX, 3, secondo la quale, per ogni elemento del radiatore, il campo è proporzionale al seno dell'angolo θ che la direzione considerata forma con la verticale. Però, ricordando quanto fu allora dimostrato (IX, 6), per i successivi elementi occorrerà tener conto non solo dei diversi valori che in essi ha la intensità della corrente, ma anche della differenza di cammino dei corrispondenti raggi d'onda. Così ad es. per due elementi come l ed l' distanti x (fig. 399), tale differenza vale $x \cos \theta$, e quindi il campo corrispondente ad l' anticipa su quello di l di un angolo β definito al solito da

$$\beta = 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos \theta \quad (^1).$$

(1) Conformemente a quanto esposto in IX, 6, quando le dimensioni verticali dell'antenna siano molto piccole in confronto alla lunghezza d'onda, si potrà sensibilmente ritenere $\beta = 0$.

In particolare, se la corrente nei vari elementi del radiatore fosse la stessa (come approssimativamente può considerarsi avvenga ad es. nel caso di antenna verticale con forte capacità concentrata all'estremo superiore), il calcolo potrebbe condursi abbastanza agevolmente osservando che, se si indica con f l'ampiezza del campo prodotto dall'unità di lunghezza del radiatore nella direzione considerata (da calcolarsi con la (8) di IX, 3), sarà $f dx$ il campo dovuto al tratto dx; quindi, per avere l'ampiezza F del campo risultante, non v'è che valutare il modulo dell'integrale

$$\int_0^h f e^{j\beta}\, dx\,,$$

dove con h è indicata l'altezza del radiatore.

Nel caso attuale f non dipende da x, per modo che, sostituendo a β il suo precedente valore, si ha subito per l'integrale scritto il valore [1]:

$$f\,\frac{e^{j2\pi\frac{h}{\lambda}\cos\theta}-1}{j\,\frac{2\pi}{\lambda}\cos\theta} = fh\,\frac{e^{j2\pi\frac{h}{\lambda}\cos\theta}-1}{j2\pi\frac{h}{\lambda}\cos\theta}\,,$$

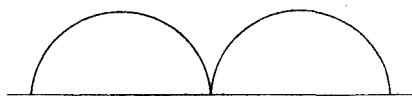



Fig. 400

il cui modulo, tenendo presente una formola già stabilita (vedi nota a pag. 668), è:

$$F_0\,\frac{\operatorname{sen}\left(\pi\frac{h}{\lambda}\cos\theta\right)}{\pi\frac{h}{\lambda}\cos\theta}\,,$$

Fig. 401

dove $F_0 = fh$ corrisponde al valore cui si perverrebbe ritenendo che i contributi dovuti ai campi elementari $f dx$ fossero fra loro in fase.

Nel caso generale, come si è detto, occorrerà anche tener conto dei diversi valori delle ampiezze delle correnti nei vari punti del radiatore, cioè ritenere f funzione (in generale nota) di x.

Non svolgeremo qui il calcolo effettivo; ci limiteremo soltanto ad enunciare il risultato cui esso conduce, il quale può sintetizzarsi in diagrammi come quelli disegnati nelle figg. 400, 401, 402, 403, 404 e 405, che si riferiscono ad antenne di lunghezze rispettivamente uguali a $\frac{\lambda}{8}, \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \lambda, \frac{5\lambda}{4}, \frac{9\lambda}{4}$. Da essi si vede che, ad es. per un'antenna di lunghezza minore di un quarto di lunghezza d'onda (ad esempio antenna con estremità libera caricata con induttanza alla base) il massimo di

---

[1] Si osservi che è in generale:

$$\int_a^b e^{\alpha x}\,dx = \left[\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\right]_a^b = \frac{e^{\alpha b}-e^{\alpha a}}{\alpha}\,.$$

radiazione si verifica nella direzione orizzontale; ed analogamente avviene per un'antenna di lunghezza $\frac{\lambda}{4}$, ma in questo caso la direttività orizzontale è molto più pronunciata; nel caso di lunghezze superiori a $\frac{\lambda}{4}$ si hanno anche altri massimi di valori diversi, ed il massimo dei massimi si verifica in una direzione tanto meno inclinata rispetto alla verticale quanto maggiore è il numero dei quarti di lunghezza d'onda contenuti nell'antenna.

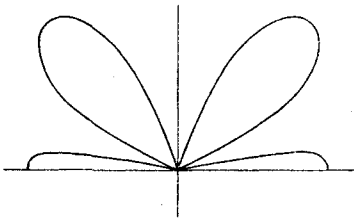



Fig. 402

Di tali tipi di distribuzione ci si può intuitivamente rendere conto pensando che, ad es., per un'antenna comprendente più di un quarto di lunghezza d'onda, mentre in direzione orizzontale i contributi forniti al campo da due elementi simmetrici rispetto ad un punto nodale, hanno valori opposti, altrettanto non si verifica per una direzione inclinata sull'orizzonte, in quanto che la differenza di fase fra i contributi stessi non sarà più di 180°, ma corrisponderà a questo angolo aumentato del valore angolare della differenza fra i cammini di propagazione, misurata in lunghezze d'onda.

I diagrammi delle figg. prece. possono intendersi ottenuti limitando alla parte soprastante il suolo gli analoghi diagrammi corrispondenti a

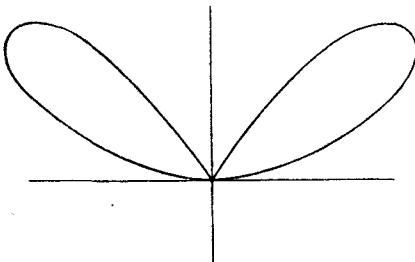



Fig. 403

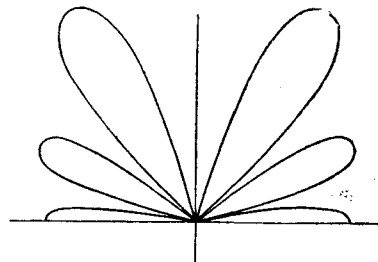



Fig. 404

radiatori costituiti dalle antenne in ciascuno di essi considerate, ma intese *raddoppiate* con l'aggiunta della rispettiva immagine (I, 9), come, a titolo d'esempio, è indicato in fig. 405 (parte tratteggiata).

Ovviamente però, di tali nuovi sistemi hanno interesse solo quelli derivanti da raddoppiamenti di radiatori comprendenti un numero dispari di quarti di lunghezza d'onda. I corrispondenti sistemi completi corrisponderanno così a radiatori comprendenti altrettante semilunghezze d'onda.

10. - Radiatore isolato. - Antenne orizzontali. — Tali ultimi diagrammi si possono dunque sostanzialmente considerare come quelli relativi alla distribuzione dell'intensità del campo secondo le varie direzioni contenute in un piano passante per il radiatore; e precisamente, dai diagrammi rappresentati nelle figg. 401, 402, 404, 405, mediante il predetto raddoppiamento, si otterrebbero quelli relativi a radiatori di lunghezze uguali a $\frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \frac{5\lambda}{2}, \frac{9\lambda}{2}$.

In definitiva tutti questi diagrammi possono considerarsi come quelli relativi alla distribuzione del campo prodotto da un radiatore perfettamente *isolato*, infinitamente lontano da ogni altro conduttore. In particolare essi possono senz'altro utilizzarsi per lo studio della distribuzione *orizzontale* del campo dovuto ad un'antenna orizzontale infinitamente lontana dalla terra.

Fig. 406

Si può allora chiedere come si modificano i diagrammi stessi quando si tratti di un'antenna tesa orizzontalmente a non grande distanza dal suolo.

La risposta è facile: basta considerare che in ogni caso la presenza della terra — supposta perfettamente conduttrice — può sempre intendersi eliminata purchè al radiatore dato si associ la sua immagine, di uguale forma ed estensione e percorsa da correnti le quali, per coppie di punti corrispondenti fra le due antenne, siano in opposizione di fase.

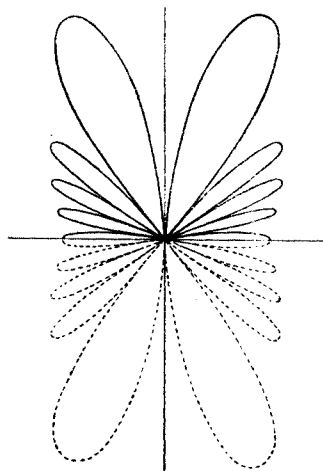
Se teniamo presente quanto è stato dimostrato in generale al n. 5 *b*), si comprende che, per una direzione qualunque, gli elementi dedotti dai diagrammi precedenti saranno da moltiplicarsi per l'espressione

$$2\left|\operatorname{sen}\frac{\beta\operatorname{sen}\theta}{2}\right|$$

ivi considerata, dove θ è l'angolo che la direzione stessa forma con la normale al piano dei due radiatori, cioè con la direzione *orizzontale*, mentre β rappresenta il valore angolare del doppio della distanza del radiatore dal suolo.

Si può così concludere che anche con un'antenna orizzontale si può ottenere una radiazione efficiente in direzione *pressochè orizzontale*, purchè l'altezza dell'antenna dal suolo abbia un opportuno valore.

Per ottenere una certa direttività *zenitale*, cioè secondo prestabilite direzioni situate nel piano verticale, si può ricorrere sia ad antenne verti-

cali comprendenti un certo numero di quarti di lunghezza d'onda, sia ad antenne orizzontali convenientemente distanziate dal suolo.

Tali tipi di direttività si presentano particolarmente utili nel caso di onde corte, per le quali, a causa dell'influenza degli strati ionizzati della atmosfera, interessa attribuire al raggio d'onda direzioni opportune atte ad assicurare alla traiettoria del raggio stesso un andamento ben determinato in relazione alla distanza da superare, come risulta dalle considerazioni che sono state a suo tempo esposte (IX, 18).

11. - L'aereo bifilare (R.C.A.). — L'antenna orizzontale isolata [1], considerata unitamente alla sua immagine, può ritenersi un caso particolare del sistema radiante costituito da due fili paralleli abbastanza vicini fra loro, lontani da ogni altro conduttore, e percorsi da correnti in regime stazionario in guisa tale che le correnti in due punti corrispondenti siano in opposizione di fase.

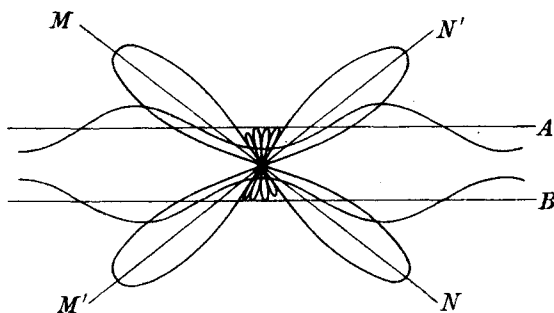



Fig. 406

Astraendo dall'effetto della terra, si ha che se, ad es., questi fili sono disposti in un piano orizzontale, la radiazione risulta nulla in direzione verticale, mentre per le direzioni orizzontali raggiunge dei massimi. Più precisamente si trova che il diagramma corrispondente ha la forma indicata in fig. 406, ove, insieme ad alcune direzioni di massimi secondari, ne sono ben visibili due, MN, $M'N'$, cui corrispondono quattro massimi principali. Si dimostra poi che si può anche concentrare il massimo in una sola di quelle direzioni, per es. MN, ed ottenere l'annullamento del campo lungo l'altra $M'N'$, spostando uno dei fili rispetto all'altro, come indicato nella fig. 407, e precisamente in modo che la

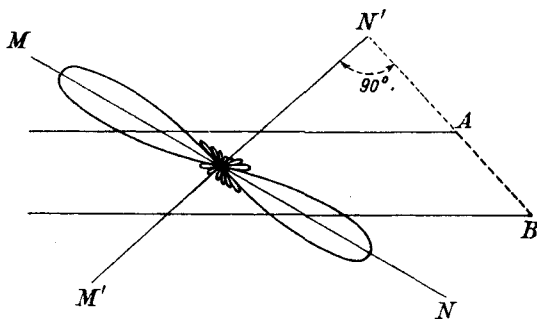



Fig. 407

[1] Siccome gli estremi sono sempre punti nodali per la corrente, la sua lunghezza sarà necessariamente uguale ad un multiplo della semilunghezza d'onda.

congiungente gli estremi A, B risulti perpendicolare alla direzione $M'N'$ lungo la quale si vuol ottenere l'annullamento.

È questo il principio su cui si fonda l'areo bifilare (*harmonic wire*) della R.C.A.

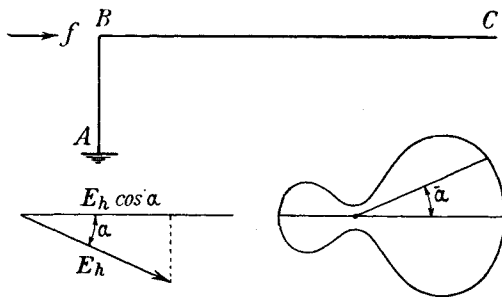
12. - Proprietà direttive dell'antenna ad L. — Coi dispositivi studiati nei nn. prece., la direttività è ottenuta facendo sovrapporre, o — come si dice in Ottica — *interferire*, i campi o gli elementi di campo prodotti da più elementi radianti così disposti che le composizioni stesse vengono talvolta ad interessare elementi in fase, talvolta elementi variamente sfasati, o eventualmente a due a due opposti.

Naturalmente, come già si è osservato al n. 6, tali dispositivi non possono trovare pratiche applicazioni se non nel caso di onde corte, per la necessità che essi presentano di estendersi in uno od altro senso per parecchie lunghezze d'onda.

Tuttavia, anche nel caso di onde lunghe, si possono realizzare dei sistemi aventi proprietà direttive. Per es., se si tratta di onde non eccessivamente lunghe, si può pensare ad una coppia di antenne verticali, una delle quali funzioni da riflettore, o più generalmente ad una qualunque coppia di antenne verticali, come risulta dalle considerazioni generali esposte nei nn. prece. Ad un tale dispositivo sono riducibili gli aerei a telaio già considerati in IX, 8, e di cui riparleremo fra poco (n. 15).

Ma per raggiungere effetti direttivi con onde lunghe si ricorre generalmente a dispositivi fondati essenzialmente sul fatto che, come potrebbe dedursi dalla trattazione di IX, 16, la direzione del campo elettrico in punti situati in prossimità del piano orizzontale, anche se l'antenna è verticale, non è verticale, bensì più o meno inclinata in avanti nel senso della propagazione.

Fig. 408

Ciò premesso, si può dimostrare che qualche effetto direttivo può ottenersi mediante un'antenna del tipo ad L rovesciato (Marconi), e ciò come conseguenza della esistenza di una componente orizzontale del campo elettrico. Noi qui ci limiteremo a far vedere che un tale tipo di aereo, usato come *antenna ricevente*, conferisce una situazione di privilegio alla direzione del tratto orizzontale superiore, e precisamente esso riceve più efficacemente le onde incidenti provenienti dal lato della freccia f (fig. 408), cioè dalla direzione opposta alla coda dell'L. La analoga proprietà per

uno stesso aereo usato in trasmissione potrà allora ritenersi risultare da una proposizione generale (Rayleigh, Carson, Sommerfeld) che noi qui ci limiteremo a postulare, secondo cui per i sistemi radianti sussiste un certo principio di reciprocità, in virtù del quale, sotto certe condizioni, le caratteristiche di ricezione corrispondono a quelle di emissione.

Consideriamo dunque un aereo ricevente ad L. Se su di esso incide un'onda elettromagnetica, le f. e. m. da questa prodotte nei due tratti dell'antenna saranno proporzionali alle componenti del campo elettrico secondo i tratti interessati, nonchè alle lunghezze di questi. In particolare, la componente verticale produrrà una certa f. e. m. E_v nel solo tratto verticale AB, mentre la componente orizzontale avrà effetto sul solo tratto orizzontale BC, nel quale produrrà una certa f. e. m. il cui valore indicheremo con E_h quando la direzione della componente coincide con quella del tratto BC inteso diretto da B a C, e quindi in generale con $E_h \cos \alpha$ quando queste due direzioni comprendano un certo angolo α (1).

La f. e. m. totale E di cui diviene sede l'intera antenna vale dunque:

$$E = E_v + E_h \cos \alpha ,$$

dove E_v ed E_h sono proporzionali, secondo certi opportuni fattori, ad AB e BC.

Il diagramma polare della variazione di E per i diversi valori di α ha un aspetto del tipo indicato nella fig. 408. Esso mette chiaramente in luce l'esistenza di una direzione privilegiata (corrispondente ad $\alpha = 0$). Si comprende che la dissimmetria del diagramma è tanto maggiore quanto maggiore è il rapporto $\frac{E_h}{E_v}$, il quale alla sua volta equivale ad $\frac{F_h}{F_v} \cdot \frac{BC}{AB}$, essendo F_h, F_v le componenti orizzontale e verticale del campo.

13. - Antenna Beverage. — Su un principio che ha qualche analogia col precedente è fondata la così detta antenna *aperiodica* (Beverage). Essa può intendersi dedotta dall'antenna marconiana ad L facendo crescere indefinitamente la lunghezza del tratto orizzontale, e quindi ritenendo trascurabile la lunghezza del tratto verticale.

Per quanto ci è noto (V, 3), un filo orizzontale di lunghezza infinita può sempre sostituirsi con uno di lunghezza finita purchè un estremo sia chiuso sulla impedenza caratteristica.

Orbene, Beverage (con Rice e Kellog) ha precisamente realizzato un aereo ricevente direttivo disponendo orizzontalmente un lungo filo e chiu-

---

(1) Le dimensioni lineari dell'antenna sono supposte piccole in confronto alla lunghezza d'onda, per modo che si possano trascurare le differenze di fase fra le f. e. m. prodotte nei vari elementi dei conduttori AB e BC.

dendone una estremità A sulla impedenza caratteristica **Z** (fig. 409), e la opposta B con l'apparecchio ricevente.

Il funzionamento del sistema può spiegarsi così. Consideriamo la tensione che la componente orizzontale del campo incidente provoca nel punto generico P del filo a distanza x dall'estremo A. Supponendo in primo luogo che la direzione del raggio incidente sia quella da A verso B, la corrente all'estremità B del filo sarà in ogni istante la somma di tutte le correnti che ivi contemporaneamente pervengono per effetto della

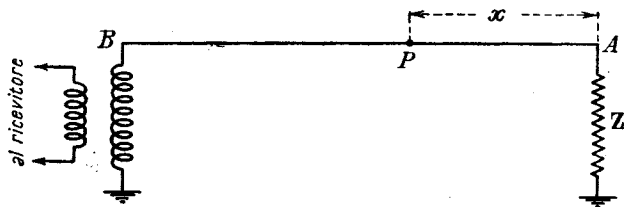



Fig. 409

propagazione lungo il filo delle correnti originate nei singoli punti dall'onda incidente.

In effetto, tali ultime correnti si propagano nei due sensi, ma siccome per ipotesi la linea è chiusa all'estremo A sulla sua impedenza caratteristica, le correnti che giungono all'estremità B sono soltanto quelle dovute alla propagazione nel senso $\overrightarrow{AB}$, in quanto che le correnti propagantisi in senso opposto vengono, per così dire, assorbite dalla impedenza terminale **Z**. D'altra parte, se, per semplicità, supponiamo nulle le costanti dissipative r e g della linea, l'impedenza caratteristica si riduce ad una pura resistenza, indipendente dalla frequenza, e la propagazione lungo il filo conferisce, alle correnti che si propagano, soltanto una variazione progressiva di fase.

Se $\mathbf{i}dx$ è il numero complesso rappresentativo della corrente originata dall'onda incidente nel tratto infinitesimo dx situato in A(1), l'analogo complesso corrispondente alla corrente originata nel tratto dx situato alla distanza generica x da A sarà:

$$\mathbf{i}e^{-j2\pi\frac{x}{\lambda}}dx = \mathbf{i}e^{-j\omega\frac{x}{v}}dx\,,$$

essendo v la velocità di propagazione dell'onda. Tale corrente si propaga fino a B, cioè per un tratto di lunghezza $l-x$, con una certa velocità di fase u, in generale diversa da v, dipendente dalla costituzione della linea, e pertanto il valore che essa assume quando è giunta in B sarà rappre-

(1) Il modulo di tale $\mathbf{i}$ sarà dunque da misurarsi ad es. in amp./m, mentre quello della **I** successivamente considerata si misurerà in amp.

sentato dal prodotto del precedente valore per il fattore $e^{-j\omega\frac{l-x}{u}}$. La corrente totale **I** che raggiunge B si otterrà dunque integrando da 0 ad l l'espressione ottenuta, cioè si avrà:

$$\mathbf{I} = \mathrm{i}\int_0^l e^{-j\omega\frac{x}{v}-j\omega\frac{l-x}{u}}\,dx = \mathrm{i}e^{-j\omega\frac{l}{u}}\int_0^l e^{j\omega\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right)x}\,dx = \mathrm{i}e^{-j\omega\frac{l}{u}}\cdot\frac{e^{j\omega\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right)l}-1}{j\omega\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right)}.$$

Siccome il modulo di $e^{-j\omega\frac{l}{u}}$ vale 1, il modulo I della corrente in B si otterrà moltiplicando il modulo i di **i** per quello della frazione che compare all'ultimo membro. Si ottiene così (cfr. nota a pag. 668):

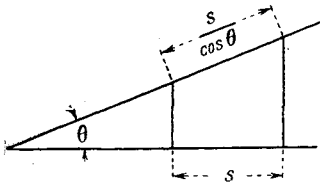



Fig. 410

$$I = il\,\frac{\operatorname{sen}\frac{\omega l}{2}\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right)}{\frac{\omega l}{2}\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right)}.$$

Se il raggio dell'onda incidente forma una angolo θ con la direzione AB, le f. e. m. prodotte nei singoli tratti del filo AB (e quindi le corrispondenti correnti) si riducono nel rapporto $\cos\theta$, mentre alla velocità v di propagazione del raggio d'onda incidente dovrà sostituirsi $\frac{v}{\cos\theta}$, in quanto che ad ogni cammino s compiuto dall'onda nella direzione secondo cui essa si propaga, corrisponde un tratto di linea di lunghezza $\frac{s}{\cos\theta}$ investito dal piano normale al raggio d'onda (fig. 410).

Si avrà dunque in generale, per la direzione caratterizzata dall'angolo θ:

$$I_\theta = li\,|\cos\theta|\,\frac{\operatorname{sen}\frac{\omega l}{2}\left(\frac{1}{u}-\frac{\cos\theta}{v}\right)}{\frac{\omega l}{2}\left(\frac{1}{u}-\frac{\cos\theta}{v}\right)}.$$

In particolare, per $\theta = \pi$:

$$I_\pi = li\,\frac{\operatorname{sen}\frac{\omega l}{2}\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}\right)}{\frac{\omega l}{2}\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}\right)},$$

che può riuscire nullo quando l sia scelto in guisa che il denominatore sia multiplo di π.

Se si potesse supporre $u = v$ [1], questa condizione sarebbe soddi-

[1] In effetto, u risulta un po' inferiore a v (dell'ordine di circa 0,8 v).

sfatta attribuendo ad l valori multipli della semilunghezza d'onda λ, cosicchè (ricordando che è $\lim_{\alpha \to 0} \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} = 1$) si avrebbe:

$$I_0 = li \,, \quad I_\pi = 0 \,.$$

In ogni caso I_0 è il massimo dei valori di I_θ, e la sua espressione mostra che esso risulta tanto maggiore quanto più lunga è la linea.

Per lunghezze d'onda notevoli, occorre attribuire alla linea lunghezze che non di rado raggiungono alcuni km.

14. - Estensione al caso di onde corte. — È da osservare che le considerazioni precedenti sono valide per qualunque valore di λ. Ed in effetto, anche per la ricezione di onde corte, si può ricorrere a dispositivi del tipo Beverage.

In tal caso la lunghezza geometrica della linea può anche essere relativamente modesta; e da ciò segue che l'energia da essa captabile risulta in generale troppo esigua. Per aumentare l'efficienza del dispositivo, pur conservandogli il suo carattere fondamentale, occorre aumentare gli afflussi provenienti dall'onda incidente. Lo scopo può raggiungersi derivando dai due lati della linea, supposta a doppio filo, dei conduttori orizzontali, che disimpegnano così le funzioni di *antenne collettrici.* Siccome, così facendo, si viene ad aumentare la capacità distribuita lungo la linea, dal che seguirebbe una diminuzione della velocità di propagazione lungo di essa, per controbilanciare tale effetto, le antenne collettrici vengono connesse alla linea per mezzo di condensatori di piccola capacità (fig. 411).

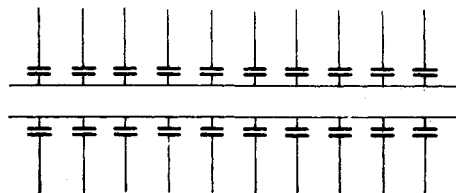



Fig. 411

Il carattere essenzialmente aperiodico (1) di tali dispositivi conferisce loro il particolare pregio di prestarsi ugualmente bene per onde le cui frequenze sono comprese entro una banda sufficientemente larga.

15. - Proprietà direttive dei telai. — Un altro tipo di aereo ricevente a carattere direzionale è costituito, come si è detto, dal telaio.

La proprietà direttiva di un telaio verticale può agevolmente dedursi dalle proprietà generali degli allineamenti di antenne, in quanto che, nel caso più semplice (al quale peraltro possono sempre ricondursi anche forme più complesse come quelle rappresentate nelle figg. 412, 413) di

(1) Dovuto al fatto che non vi è alcun elemento legato alla frequenza.

un telaio a forma rettangolare disposto in piano verticale, esso è assimilabile a due fili (o meglio a due sistemi di fili, nel caso che il telaio comprenda più spire) verticali percorsi da correnti in opposizione di fase e fra loro distanziati di una grandezza uguale alla lunghezza dei lati orizzontali.

Se, come al n. 12, indichiamo con E_h ed E_v le f. e. m. prodotte dal campo incidente su ciascuno dei sistemi di lati orizzontali e verticali, è evidente che le prime si elidono, in quanto che risultano di segni opposti per ogni coppia di lati opposti, mentre le seconde, come fu spiegato in IX, 8, si sommano vettorialmente, in quanto che sono sfasate di un

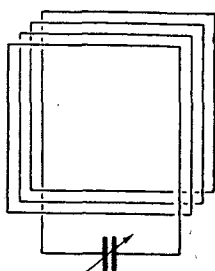



Fig. 412

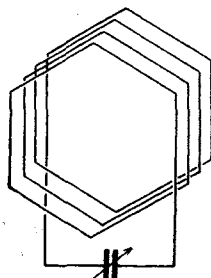
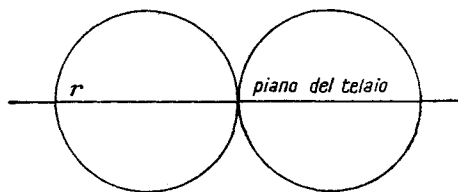



Fig. 413

angolo $\beta = 2\pi \frac{D}{\lambda} \cos \alpha$, essendo D la distanza fra i lati verticali ed α l'angolo che il raggio d'onda (orizzontale) forma coi lati orizzontali. La f. e. m. totale E è in definitiva proporzionale al seno dell'angolo β, e pertanto sensibilmente proporzionale all'angolo stesso, se, come generalmente avviene, D è relativamente piccolo in confronto a λ. Possiamo dunque scrivere:

$$E = E_m \cos \alpha ,$$

Fig. 414

essendo E_m il massimo valore di E, cioè quello che si verifica per $\alpha = 0$ (1).

Il telaio dunque riceve meglio le emissioni provenienti dalle direzioni situate nel suo piano, e precisamente il diagramma polare di E in funzione di α è rappresentato da una coppia di circonferenze di diametro corrispondente ad E_m fra loro tangenti in un punto situato sui diametri che rappresentano la direzione dell'onda di massima ricezione (fig. 414).

(1) Allo stesso risultato si può arrivare in modo assai semplice considerando la E come f. e. m. indotta dalle variazioni del flusso magnetico, dopo aver ricordato che il campo magnetico è sensibilmente uniforme, ed ha direzione orizzontale e perpendicolare al raggio d'onda.

Il telaio, come in generale ogni aereo ricevente, può anche essere utilizzato in emissione, ma la sua efficienza è assai scarsa. Naturalmente, non è neppure elevata la sua efficienza in ricezione, ma questa può sempre compensarsi con una conveniente sensibilità dell'apparato ricevente.

16. - Selettività geometrica degli aerei riceventi direttivi. - Radiogoniometria. — Tutti i sistemi di aerei riceventi direttivi consentono di realizzare una selettività, che si potrebbe chiamare *geometrica*, del posto ricevente, in quanto che, disposte le cose in modo che una certa direzione sia in condizioni di privilegio, le emissioni provenienti da direzioni diverse saranno in generale depresse (od anche estinte) e quindi sarà minore il disturbo che esse possono arrecare alla ricezione desiderata, ancorchè esse siano fatte su lunghezze d'onda poco diverse da questa.

Una delle più interessanti applicazioni della direttività in ricezione è quella che può farsi alla così detta *radiogoniometria*, la quale si propone di consentire ad un posto ricevente di identificare la direzione da cui proviene un determinato segnale.

Se l'aereo ricevente è ad es. del tipo a telaio, e questo è disposto verticalmente in guisa da poter assumere qualunque orientazione intorno ad un asse verticale, è chiaro che la ricezione sarà ottima quando il piano del telaio contiene il punto trasmittente, mentre in direzione normale a quella la ricezione sarà nulla (1). Più precisamente, come abbiamo visto nel n. prec., la intensità della ricezione in ogni direzione sarà proporzionale a $\cos\alpha$. Ora, siccome la variazione di tale funzione è nulla per $\alpha = 0$, cioè attorno alla posizione del telaio cui corrisponde il massimo, mentre è massima per $\alpha = \frac{\pi}{2}$, cioè attorno alla posizione di ricezione nulla, la determinazione riuscirà più precisa se sarà effettuata cercando la posizione di silenzio anzichè quella di massima ricezione.

È però da notarsi che, essendo il diagramma di fig. 414 simmetrico rispetto alla retta r, una volta che siasi determinata la direzione, non si è in grado di discriminare su di essa il senso da cui proviene il segnale. Invero, per una variazione di 180° dell'angolo α, varia solo il *segno* della f. e. m. indotta nel telaio, ma non la sua ampiezza.

Si comprende pertanto la necessità di integrare il dispositivo con mezzi opportuni atti a risolvere la incertezza di 180° di cui è affetta la determinazione precedente.

Lo scopo può raggiungersi approfittando appunto del fatto che le f. e. m. corrispondenti ai due sensi della direzione di massima ricezione, pure essendo uguali in ampiezza, sono però in opposizione di fase. Se a

(1) In pratica non si avrà nè un massimo netto nel primo caso, nè un annullamento completo nel secondo.

tale f. e. m. se ne aggiunge in serie un'altra avente la stessa ampiezza, ma la cui fase non vari al variare dell'orientazione del telaio, la f. e. m. risultante avrà, col variare dell'orientazione, *un* solo massimo di ampiezza anzichè due, come chiaramente si vede esaminando il diagramma di fig. 415 dove le due circonferenze C, C' costituiscono il diagramma relativo al telaio, e la circonferenza C'' di centro O e di raggio uguale al diametro delle prime sta a rappresentare la f. e. m. aggiunta. Se per ogni raggio uscente da O si sommano i segmenti intercetti su C'' e C' (oppure C'' e C, ma questi ultimi considerati con segno negativo) si perviene

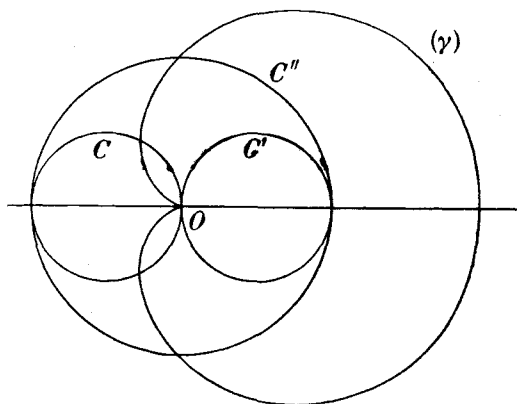



Fig. 415

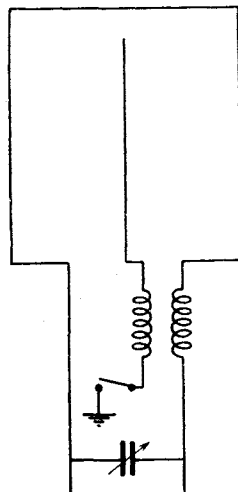



Fig. 416

alla curva (γ), che per la sua forma si denomina *cardioide*, la quale non presenta più la simmetria del doppio cerchio di dianzi.

La creazione di f. e. m. del tipo accennato può essere affidata ad un'antenna unifilare verticale di adeguate dimensioni. Si perviene così al sistema ricettore schematicamente rappresentato in fig. 416.

La pratica applicazione di questi principi non è scevra di difficoltà, ed i risultati cui si perviene nella determinazione della direzione di provenienza del segnale non sono mai molto precisi. Tuttavia con accorgimenti opportuni si riesce, per distanze non molto grandi (dell'ordine di circa 200 km) e sotto determinate condizioni (relative alla natura del terreno attraversato, ecc.), a contenere l'errore nei limiti di un grado o poco più.

Fra le cause che rendono difficile di poter fare assegnamento su un diagramma che presenti una netta direzione di zero, devesi annoverare quella derivante dal così detto *effetto verticale* o *effetto di antenna*, dipendente da ciò, che i due capi del circuito costituente il telaio, in quanto vanno ad essere connessi l'uno alla griglia, l'altro al catodo del tubo elettronico d'entrata del ricevitore, vengono a trovarsi in condizioni

elettrostatiche non simmetriche (infatti il primo è generalmente connesso col suolo, l'altro no) donde segue un comportamento del tipo antenna verticale, cui corrisponde un effetto che si serba costante per tutti gli orientamenti del telaio.

A tale inconveniente si può porre riparo cercando di uguagliare la capacità contro terra dei due capi, il che può ottenersi ad es. connettendo questi con un condensatore a tre armature, di cui due, fra loro uguali, sono isolate, e la terza, che è connessa col suolo, è disposta in guisa da potersi affacciare maggiormente ad una che all'altra delle due prime (fig. 417).

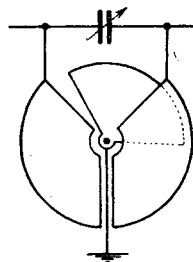
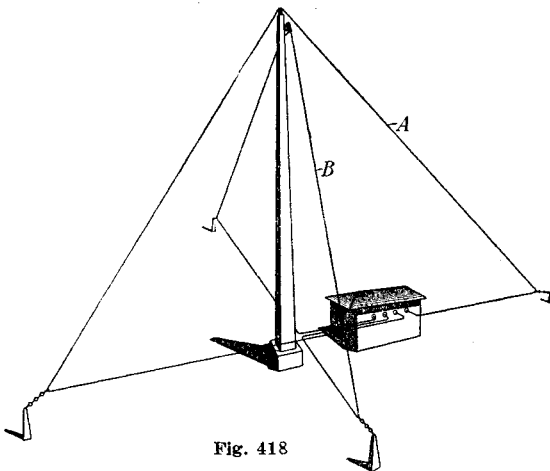



Fig. 417

17. - **Radiogoniometro.** — Un *radiogoniometro*, cioè un apparecchio per determinare la direzione di provenienza di un segnale r. t., come risulta da quanto precede, può costituirsi semplicemente mediante un posto radioricevente connesso ad un telaio orientabile a piacere e munito di cerchio graduato per la lettura degli angoli.

Si può anche pervenire allo stesso scopo, pur lasciando fisso il sistema captatore. In tale caso questo dovrà essere costituito con *due* telai anzichè con uno solo. La disposizione dei due telai verticali A e B potrebbe essere qualunque, ma per lo più essi vengono situati in due piani verticali fra loro perpendicolari, come indicato in fig. 418.

Fig. 418

In tali condizioni, se i due telai sono perfettamente uguali e la f. e. m. indotta in ciascuno di essi da un'onda incidente vale E in corrispondenza della orientazione di ricezione massima, è chiaro che le f. e. m. effettive, quando la direzione del raggio dell'onda incidente sia inclinata di α rispetto al telaio A, valgono rispettivamente:

$$E_A = E \cos \alpha \,, \qquad E_B = E \operatorname{sen} \alpha \,,$$

quindi l'angolo α può essere determinato mediante la relazione:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{E_B}{E_A} \,,$$

non appena si sia in grado di valutare E_B ed E_A, o almeno il loro rapporto.

Questa valutazione può farsi utilizzando un sistema di due bobine disposte analogamente ai telai, come indicato in fig. 419, dove *a*, *b* sono due bobine fisse *uguali*, i cui piani medi sono fra loro normali, e *c* è una terza bobina girevole attorno ad un asse coincidente con la retta comune ai piani medi stessi, e connessa ad un indice (non indicato in figura) che si muove davanti ad un cerchio graduato.

Se le f. e. m. E_A ed E_B vengono fatte agire in *a* e *b* (chiudendo ad es. i circuiti di *A* e *B* su *a* e *b*), in queste due bobine si avranno due correnti alternate di ampiezze proporzionali ad E_A ed E_B, e perciò, in una regione convenientemente ristretta attorno all'asse OO', coesisteranno i due campi magnetici corrispondenti. La composizione dei due dà ovviamente luogo ad un campo alternativo unico la cui direzione forma con l'asse magnetico della bobina *a* lo stesso angolo α che la direzione del raggio d'onda incidente fa col piano del telaio *A*.

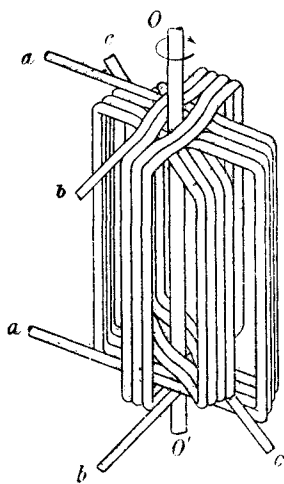



Fig. 419

La bobina mobile *c* essendo connessa ad un apparecchio ricevente, è chiaro che l'orientazione del campo magnetico con essa concatenato si potrà rintracciare agevolmente cercando la posizione di *c* cui corrisponde la massima ricezione, o meglio, secondo una precedente osservazione, quella cui corrisponde la ricezione minima (teoricamente nulla). Sul cerchio graduato si leggerà allora senz'altro l'angolo α.

Su questo principio è fondato il radiogoniometro Bellini-Tosi.

18. - Applicazioni. - Radiofari. — Le applicazioni della radiogoniometria sono analoghe a quelle consentite dalla goniometria ordinaria effettuata con mezzi ottici. Così, una località *X* munita di radiogoniometro potrà determinare la propria posizione relativa a tre stazioni trasmittenti fisse situate in posizioni note *A*, *B*, *C* (fig. 420), mediante semplici calcoli trigonometrici nei quali intervengono gli angoli *AXB*, *BXC* rilevabili da *X* col radiogoniometro, e gli elementi noti (lati ed angoli) del triangolo *ABC* [1]. Inversamente, un ricettore radiogoniometrico, spostando il suo telaio e rilevando tale spostamento, potrà,

[1] È questo il così detto «problema di Pothénot» della Trigonometria.

captando i segnali di una stazione trasmittente, identificare la direzione in cui questa si trova.

Per il primo dei due indicati problemi, i posti del tipo A, B, C, in quanto siano predisposti per consentire a punti mobili (navi, aeromobili) di determinare la propria posizione, prendono il nome di *radiofari*. La loro funzione è sostanzialmente quella di emettere segnali di forma e di lunghezza d'onda determinata, per modo che la stazione che li riceve possa, conoscendo il segnale convenzionale, riconoscere la corrispondente trasmittente. Essi possono costituirsi ad es. con un aereo a telaio che, venendo fatto ruotare con velocità stabilita, emetta un segnale costante, oppure con una qualunque antenna non direttiva che emetta un segnale di tipo periodico e di forma prestabilita.

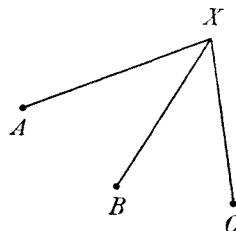



Fig. 420

Una interessante applicazione delle comunicazioni direttive è quella che può farsi alla guida di un elemento mobile (nave, aeronave). Ciò può ottenersi sfruttando la proprietà di un telaio di avere un diagramma di emissione del tipo ad 8 ([1]). Disponendo due di tali telai ad angolo retto, la corrispondente emissione totale presenterà quattro zone (tratteggiate in fig. 421) nelle quali si sovrappongono i segnali partenti dall'uno e dall'altro. In tali condizioni, se i due telai emettono, sulla stessa lunghezza d'onda, due segnali, la ricezione complessiva sarà rinforzata in ciascuna delle direzioni AB, CD in cui è possibile la ricezione contemporanea delle due emissioni. Se, ad es., il primo emette una serie di punti e linee corrispondenti alla ripetizione della lettera A dell'alfabeto Morse, e l'altro la serie *complementare*, corrispondente cioè alla lettera N, in guisa che alle pause di una delle due emissioni corrisponda emissione dell'altra, un ricettore situato lungo AB (oppure CD) riceverà un segnale *somma* dei due, cioè percepirà un segnale *continuo*, mentre, ove esso si sposti a destra o a sinistra, percepirà rispettivamente o la sola lettera A o la sola N. Se

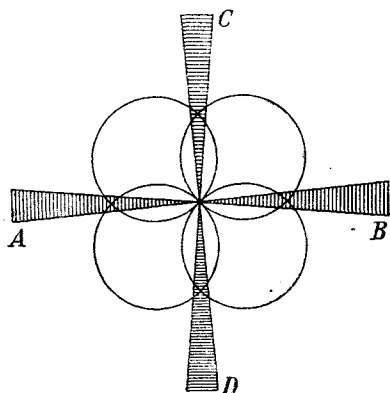



Fig. 421

([1]) In virtù della proposizione fondamentale richiamata al n. 12, il diagramma di emissione di un telaio è dello stesso tipo di quello di ricezione.

il ricettore è situato a bordo di un velivolo, il pilota potrà, mediante la semplice osservazione (acustica) del suono percepito, regolare la propria rotta secondo la retta *AB* (o *CD*) la cui direzione viene stabilita e precisata dal posto trasmittente: all'uopo gli basterà mantenersi in direzione tale da non percepire distintamente se non un suono continuo; qualora, per una causa qualunque, la rotta deviasse dall'una o dall'altra parte, egli ne sarebbe avvertito dalla percezione di una A, rispettivamente N.

APPENDICE

A) Richiami e complementi di matematica.

1. - Serie esponenziale e serie trigonometriche. — Giova richiamare gli sviluppi in serie delle funzioni e^x, sen x, cos x:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots, \tag{1}$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots, \tag{2}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots, \tag{3}$$

nelle quali due ultime l'arco x deve intendersi misurato in radianti.

Queste serie convergono per qualsivoglia valore x reale o complesso, e perciò si prestano ad estendere a valori complessi della variabile le definizioni delle funzioni indicate al primo membro.

Osservando che, per $0 < x < n + 1$, si ha sempre $\frac{x^n}{n!} > \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}$, si deduce che per $0 < x < 2$ la differenza fra i valori assoluti di due termini consecutivi (al di là del primo) dei secondi membri delle (2) e (3) è sempre positiva, dal che seguono le disuguaglianze:

$$x > x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} > \ldots > \operatorname{sen} x > \ldots > x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} > x - \frac{x^3}{6},$$

$$1 > 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} > \ldots > \cos x > \ldots > 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} > 1 - \frac{x^2}{2},$$

di uso corrente nella pratica, e valide in particolare per $0 < x < \frac{\pi}{2}$, cioè per ogni arco appartenente al primo quadrante.

Per le applicazioni che ricorrono frequentemente in Radiotecnica, è necessario avere presente la formola seguente:

$$e^{jx} = \cos x + j \operatorname{sen} x, \tag{4}$$

che si deduce immediatamente dalla (1) scrivendo jx in luogo di x e tenendo conto delle (2) e (3).

In virtù di essa il simbolo e^{jx} è atto a rappresentare il numero complesso che ha per modulo 1 e per argomento x.

E così il numero complesso $\mathbf{A}$ di modulo A e di argomento φ può porsi sotto la forma di prodotto del suo modulo A pel fattore $e^{j\varphi}$ rappresentativo dell'argomento:

$$\mathbf{A} = Ae^{j\varphi} ,$$

talchè il suo logaritmo (in base e) vale la somma del logaritmo del modulo con $j\varphi$ (1).

È utile osservare che il modulo A ed il fattore esponenziale dell'argomento $e^{j\varphi}$ si possono esprimere assai semplicemente mediante lo stesso numero complesso $\mathbf{A}$ ed il suo coniugato

$$\mathbf{A}_0 \doteq Ae^{-j\varphi} = A (\cos \varphi - j \operatorname{sen} \varphi)$$

mediante le formole

$$A^2 = \mathbf{A}\mathbf{A}_0 , \qquad e^{2j\varphi} = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{A}_0} . \tag{5}$$

Dalla (4) e dalla analoga

$$e^{-jx} = \cos x - j \operatorname{sen} x$$

si deducono le formole (di Eulero):

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} , \qquad \operatorname{sen} x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} , \tag{6}$$

con le quali si possono esprimere le funzioni trigonometriche fondamentali mediante esponenziali.

Col mezzo di esse, che sono valide anche per x complesso, si possono poi dedurre tutte le formole della trigonometria (per es. quelle che danno i valori di $\operatorname{sen}(x + y)$, $\cos(x + y)$, ecc.) dalle note regole di calcolo valide per le potenze.

Un altro importante sviluppo in serie è il seguente:

$$x \cot x = 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} - \frac{x^6}{945} - \ldots = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} B_{2n} x^{2n} \tag{7}$$

convergente per $|x| < \pi$, dove i coefficienti B_{2n}, detti numeri di Bernouilli, sono definiti mediante la relazione generale

$$mB_{m-1} + \binom{m}{2} B_{m-2} + \ldots + \binom{m}{m-1} B_1 + B_0 = m \qquad (m = 1, 2, \ldots) ,$$

equivalente alle infinite relazioni:

$$B_0 = 1 , \quad 2B_1 + B_0 = 2 , \quad 3B_2 + 3B_1 + B_0 = 3 , \ldots ,$$

dalle quali si deducono successivamente i valori

$$B_0 = 1 , \quad B_1 = \frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0 , \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_5 = 0 , \quad B_6 = \frac{1}{42},$$

$$B_7 = 0 , \quad B_8 = -\frac{1}{30}, \quad B_9 = 0 , \quad B_{10} = \frac{5}{66}, \quad B_{11} = 0 , \quad B_{12} = -\frac{691}{2730}, \ldots .$$

(1) Dunque ad un numero complesso spettano infiniti logaritmi, l'uno dei quali differisce dall'altro per un multiplo di $2j\pi$.

Valendosi poi dell'identità

$$\operatorname{tg} x = \cot x - 2 \cot 2x,$$

dalla (7) si deduce l'altro sviluppo

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots \tag{8}$$

convergente per $|x| < \frac{\pi}{2}$.

2. - Serie binomiale e serie logaritmica. — Altri sviluppi in serie di uso corrente nella tecnica sono i seguenti:

$$(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots, \tag{9}$$

$$\log (1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots, \tag{10}$$

che sono convergenti per ogni x (positivo, negativo od anche complesso) di modulo minore dell'unità, e il primo per m qualunque.

Dalla (9) si deducono gli utilissimi sviluppi, validi per $a > b > 0$:

$$\sqrt{a^2 + b^2} = a\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} = a + \frac{b^2}{2a} - \frac{b^4}{8a^3} + \frac{b^6}{16a^5} - \frac{5b^8}{128a^7} + \dots, \tag{9'}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{a}\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{a} - \frac{b^2}{2a^3} + \frac{3b^4}{8a^5} - \frac{5b^6}{16a^7} + \frac{35b^8}{128a^9} - \dots, \tag{9''}$$

e dalla (10), sottraendone l'analoga che si ottiene cambiando x in $-x$, si ha la serie:

$$\log \frac{1 + x}{1 - x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right) \tag{11}$$

assai vantaggiosa per il calcolo effettivo dei logaritmi.

3. - Funzioni iperboliche. — Alle espressioni, analoghe alle (6),

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

aventi senso ben definito per qualsivoglia x, reale o complesso, si dà il nome di *coseno iperbolico* (ch) e *seno iperbolico* (sh) del numero x, cioè si pone:

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \tag{12}$$

Confrontando con le (6), si hanno le relazioni fondamentali:

$$\operatorname{ch} jx = \cos x, \quad \operatorname{sh} jx = j \operatorname{sen} x; \quad \cos jx = \operatorname{ch} x, \quad \operatorname{sen} jx = j \operatorname{sh} x. \tag{13}$$

Per analogia con le funzioni circolari, giova anche considerare la *tangente iperbolica* (th) e la *cotangente iperbolica* (cth) definite da:

$$\text{th}\, x = \frac{\text{sh}\, x}{\text{ch}\, x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \qquad \text{cth} = \frac{\text{ch}\, x}{\text{sh}\, x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \tag{14}$$

legate alle analoghe circolari dalle relazioni

$$\text{th}\, jx = j\, \text{tg}\, x\,, \quad \text{cth}\, x = -j\, \text{ctg}\, x\,; \quad \text{tg}\, jx = j\, \text{th}\, x\,, \quad \text{ctg}\, jx = -j\, \text{cth}\, x\,, \tag{15}$$

immediate conseguenze delle (13) e (14).

Mediante le precedenti possono dedursi tutte le formole di *trigonometria iperbolica* da quelle della trigonometria ordinaria (circolare), mentre, a mezzo delle (12), le stesse formole possono dedursi dalle regole di calcolo per le potenze.

Innanzi tutto si ha:

$$\text{ch}\, 0 = 1\,, \quad \text{sh}\, 0 = 0\,; \quad \text{th}\, 0 = 0\,, \quad \text{cth}\, 0 = \infty\,; \quad \lim_{x \to \pm\infty} \text{th}\, x = \lim_{x \to \pm\infty} \text{cth}\, x = 1\,;$$

$$\text{ch}\,(-x) = \text{ch}\, x\,, \quad \text{sh}\,(-x) = -\text{sh}\, x\,, \quad \text{th}\,(-x) = -\text{th}\, x\,, \quad \text{cth}\,(-x) = -\text{cth}\, x\,;$$

poi, per x ed y qualunque:

$$\text{sh}\,(x \pm y) = \text{sh}\, x\, \text{ch}\, y \pm \text{ch}\, x\, \text{sh}\, y\,, \tag{16}$$

$$\text{ch}\,(x \pm y) = \text{ch}\, x\, \text{ch}\, y \pm \text{sh}\, x\, \text{sh}\, y\,, \tag{17}$$

la seconda delle quali (segni inferiori), per $x = y$, fornisce la relazione fondamentale

$$\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1\,. \tag{18}$$

Sommando o sottraendo membro a membro le (16) e le (17) si ottengono le seguenti tre relazioni:

$$2\, \text{sh}\, x\, \text{ch}\, y = \text{sh}\,(x + y) + \text{sh}\,(x - y) \tag{19}$$

$$2\, \text{ch}\, x\, \text{ch}\, y = \text{ch}\,(x + y) + \text{ch}\,(x - y) \tag{20}$$

$$2\, \text{sh}\, x\, \text{sh}\, y = \text{ch}\,(x + y) - \text{ch}\,(x - y)\,. \tag{21}$$

Ancora, per $x = y$ (segni superiori), dalle stesse si deducono le formole *di duplicazione*:

$$\text{sh}\, 2x = 2\, \text{sh}\, x\, \text{ch}\, x\,, \quad \text{ch}\, 2x = \text{ch}^2 x + \text{sh}^2 x\,, \tag{22}$$

dalla seconda delle quali, scrivendo $\frac{x}{2}$ in luogo di x e tenendo presente la (18), seguono le formole *di bisezione*:

$$2\, \text{ch}^2 \frac{x}{2} = \text{ch}\, x + 1\,, \qquad 2\, \text{sh}^2 \frac{x}{2} = \text{ch}\, x - 1\,. \tag{23}$$

Derivando le formole di definizione (12) e (14) si ha facilmente

$$\frac{d\, \text{sh}\, x}{dx} = \text{ch}\, x\,, \quad \frac{d\, \text{ch}\, x}{dx} = \text{sh}\, x\,, \quad \frac{d\, \text{th}\, x}{dx} = \frac{1}{\text{ch}^2 x}, \quad \frac{d\, \text{cth}\, x}{dx} = -\frac{1}{\text{sh}^2 x}\,. \tag{24}$$

Avendo presenti le stesse formole (12), si possono scrivere gli sviluppi in serie

(25) $$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots,$$

(26) $$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots,$$

convergenti per qualsivoglia x, reale o complesso.

Per x reale, $\operatorname{ch} x$ è sempre reale e > 1, $\operatorname{sh} x$ reale, di segno concorde con x e capace di assumere qualunque valore compreso fra $-\infty$ e ∞, mentre la $\operatorname{th} x$, pure reale e di segno concorde con x, varia fra -1 e $+1$ (cfr. fig. 422).

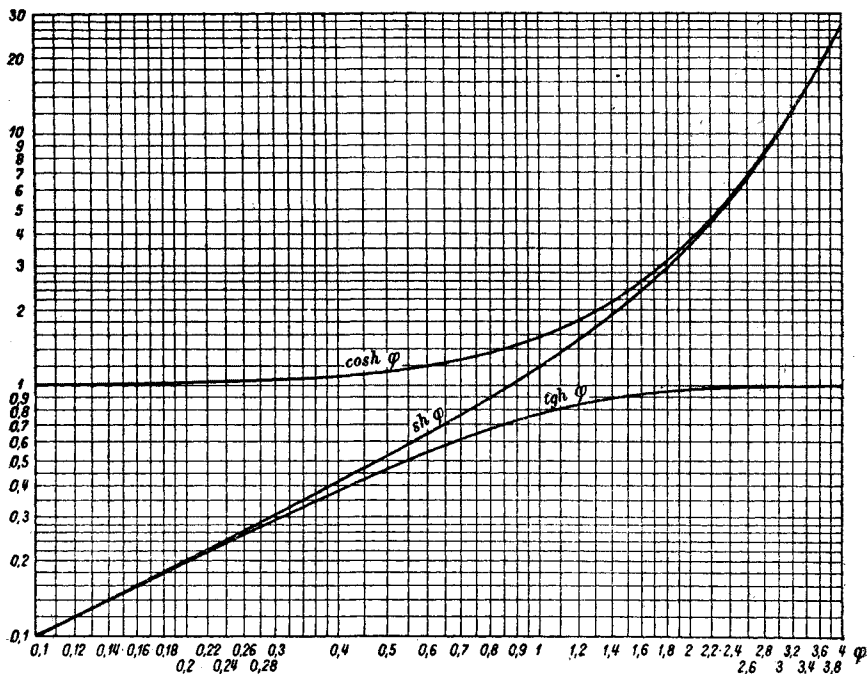



Fig. 422

Per x reale e positivo, delle funzioni fondamentali $\operatorname{ch} x$ e $\operatorname{sh} x$ si può dare una interpretazione geometrica, del tutto analoga a quella che si suol dare delle funzioni circolari $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$, e che rende ragione dell'appellativo « iperboliche ».

Precisamente, allo stesso modo che la relazione $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$ permette di considerare $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$ come coordinate ortogonali di un punto della circonferenza di raggio unitario, così la relazione $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ consente di interpretare $\operatorname{ch} x$ e $\operatorname{sh} x$ come coordinate di un punto dell'iperbole equilatera (ramo svolgentesi dal lato delle ascisse positive) di semiasse trasverso unitario.

Quanto alla variabile x, si osservi che nel caso circolare essa può ovviamente considerarsi la misura del doppio dell'area del settore circolare MOA definito

dal punto M di cui $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$ sono le coordinate (area tratteggiata in fig. 423). Orbene, in modo analogo, nel caso iperbolico (fig. 424), posto:

$$OA = 1\,, \quad ON = \operatorname{ch} x\,, \quad NM = \operatorname{sh} x\,,$$

si può agevolmente dimostrare che l'area del «settore iperbolico» OMA (tratteggiato in fig. 424) vale $\frac{x}{2}$. Nel modo più rapido a ciò si arriva riferendo l'iperbole equilatera, la cui equazione in coordinate $\xi = \operatorname{ch} x$, $\eta = \operatorname{sh} x$, è

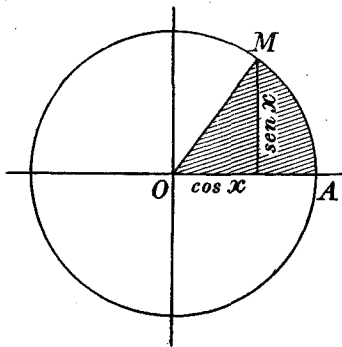



Fig. 423

$$\xi^2 - \eta^2 = 1\,,$$

ai suoi asintoti X, Y. Le formole per tale trasformazione essendo

$$\sqrt{2}X = \xi + \eta\,, \qquad \sqrt{2}Y = \xi - \eta\,,$$

l'equazione dell'iperbole si riduce ad $XY = \frac{1}{2}$. D'altra parte, dette P e Q le proiezioni di A ed M sull'asintoto OX, si ha:

$$\text{sett. ip. } OMA = \text{triang. } OPA + \text{trapezio curvil. } APQM - \text{triang. } OQM = \\ = \text{trap. curvil. } APQM,$$

l'ultimo passaggio essendo giustificato dal fatto che le aree dei triangoli OPA, OQM, in virtù dell'equazione dell'iperbole, sono uguali. Ora, l'area del trapezio $APQM$ vale

$$\int_{OP}^{OQ} Y dX = \frac{1}{2}\int_{OP}^{OQ}\frac{dX}{X} = \frac{1}{2}\log\frac{OQ}{OP}\,;$$

ed infine, essendo $OP = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $OQ = \frac{\xi + \eta}{\sqrt{2}}$, si ha:

$$\frac{1}{2}\log\frac{OQ}{OP} = \frac{1}{2}\log(\xi+\eta) = \\ = \frac{1}{2}\log(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x) = \\ = \frac{1}{2}\log e^x = \frac{x}{2}\,, \quad \text{c. d. d.}$$

Per tale ragione il doppio dell'area del settore iperbolico OMA (o meglio il rapporto di quest'area a quella del quadrato di lato OA) può considerarsi come la *misura in radianti* dello «arco iperbolico x».

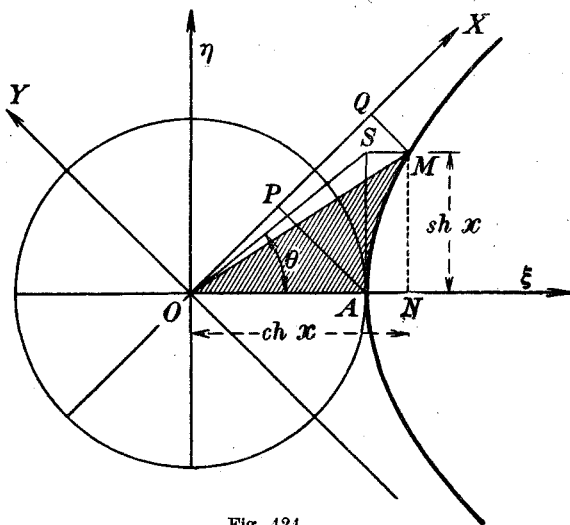



Fig. 424

Giova ancora osservare che, per x reale e positivo, cioè variante da 0 a ∞, il $\operatorname{sh} x$ varia pure da 0 a ∞, per cui ad ogni x positivo si può associare un arco (ordinario, cioè circolare) θ, compreso tra 0 e $\frac{\pi}{2}$, tale che sia

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{sh} x .$$

Allora, per le (13) e (14) sarà:

$$\operatorname{ch} x = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta} = \frac{1}{\cos\theta}, \qquad \operatorname{th} x = \operatorname{tg}\theta\cos\theta = \operatorname{sen}\theta ;$$

si ha cioè che le funzioni circolari di θ riproducono, in altro ordine, le funzioni iperboliche di x. Tale arco θ si chiama l'*amplitudine iperbolica* di x. È interessante segnalare la seguente semplice ed elegante relazione fra x e θ:

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \operatorname{th}\frac{x}{2} ,$$

cui si perviene osservando che è (formole (14) e (13)):

$$\operatorname{th}\frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}{\operatorname{ch}\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{sh}\frac{x}{2}\operatorname{ch}\frac{x}{2}}{2\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x+1} = \frac{\operatorname{tg}\theta}{\frac{1}{\cos\theta}+1} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta} = \frac{2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}.$$

La costruzione geometrica dell'amplitudine θ è semplicissima: tracciato il cerchio di raggio OA (fig. 424) e la tangente in A, se S è l'intersezione di questa con la parallela SM ad OA, l'angolo $\widehat{SOA}$ corrisponde a θ, in quanto evidentemente è $\operatorname{tg}\theta = \operatorname{sh} x$.

Per x complesso $(= a + jb)$, le (15) e (13) permettono di scrivere:

$$\operatorname{sh}(a+jb) = \operatorname{sh} a\cos b + j\operatorname{ch} a\operatorname{sen} b ,$$
$$\operatorname{ch}(a+jb) = \operatorname{ch} a\cos b + j\operatorname{sh} a\operatorname{sen} b ,$$
$$\operatorname{th}(a+jb) = \frac{\operatorname{th} a + j\operatorname{tg} b}{1+j\operatorname{th} a\operatorname{tg} b},$$

cui, mettendo in evidenza i moduli (¹) e gli argomenti, daremo la forma

$$(27)\quad \begin{cases} \operatorname{sh}(a+jb) = \sqrt{\operatorname{sh}^2 a + \operatorname{sen}^2 b}\, e^{j\varphi} = \sqrt{\dfrac{\operatorname{ch} 2a - \cos 2b}{2}}\, e^{j\varphi} , \\ \operatorname{ch}(a+jb) = \sqrt{\operatorname{sh}^2 a + \cos^2 b}\, e^{j\psi} = \sqrt{\dfrac{\operatorname{ch} 2a + \cos 2b}{2}}\, e^{j\psi} , \\ \operatorname{th}(a+jb) = \sqrt{\dfrac{\operatorname{sh}^2 a + \operatorname{sen}^2 b}{\operatorname{sh}^2 a + \cos^2 b}}\, e^{j(\varphi-\psi)} = \sqrt{\dfrac{\operatorname{ch} 2a - \cos 2b}{\operatorname{ch} 2a + \cos 2b}}\, e^{j(\varphi-\psi)} , \end{cases}$$

con

$$(27')\qquad \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{cth} a\operatorname{tg} b , \quad \operatorname{tg}\psi = \operatorname{th} a\operatorname{tg} b .$$

(¹) Il calcolo di questi moduli si fa immediatamente ricordando la prima delle (5) ed utilizzando le (19), (20), (21).

Le (27′) non determinano univocamente gli argomenti φ, ψ e $\varphi - \psi$, in quanto, venendo questi definiti mediante la tg, sono affetti da una incertezza di π. Tale incertezza si elimina però subito osservando che il punto indice di sh $(a + jb)$, per a positivo, appartiene allo stesso quadrante cui appartiene l'arco di b radianti (in quanto le parti reali ed immaginarie di sh $(a + jb)$ hanno i segni di cos b e sen b rispettivamente), mentre per a negativo appartiene al quadrante in cui si trova $\pi - b$. Così ad es., per $b = 8$ (corrispondente a circa 455°) saremo nel secondo quadrante per a positivo, nel primo per a negativo. Analogamente il numero ch $(a + jb)$, per a positivo, ha il suo indice nello stesso quadrante cui appartiene b, per a negativo nel quadrante di $-b$. Infine l'indice di th $(a + jb)$ sarà nel primo o quarto quadrante per a positivo, nel secondo o terzo per a negativo, come facilmente si riconosce combinando le precedenti deduzioni relative ad sh e ch (infatti l'argomento di th $(a + jb)$ è differenza di due angoli appartenenti allo stesso quadrante per $a > 0$, mentre, per $a < 0$, è differenza fra due angoli appartenenti a quadranti opposti).

Nelle applicazioni giova anche avere presenti le espressioni « cartesiane » di th $(a + jb)$ e cth $(a + jb)$. Si ha:

$$\text{th}\,(a + jb) = \frac{\text{sh}\,a \cos b + j\,\text{ch}\,a\,\text{sen}\,b}{\text{ch}\,a \cos b + j\,\text{sh}\,a\,\text{sen}\,b},$$

da cui, moltiplicando e dividendo per il coniugato del denominatore:

$$(27'') \qquad \text{th}\,(a + jb) = \frac{\text{sh}\,a\,\text{ch}\,a + j\,\text{sen}\,b \cos b}{\text{ch}^2 a \cos^2 b + \text{sh}^2 a\,\text{sen}^2 b} = \frac{\text{sh}\,a\,\text{ch}\,a + j\,\text{sen}\,b \cos b}{\text{sh}^2 a + \cos^2 b} = \frac{\text{sh}\,2a + j\,\text{sen}\,2b}{\text{ch}\,2a + \cos 2b},$$

e analogamente

$$(27''') \qquad \text{cth}\,(a + jb) = \frac{\text{sh}\,a\,\text{ch}\,a - j\,\text{sen}\,b \cos b}{\text{sh}^2 a - \cos^2 b} = \frac{\text{sh}\,2a - j\,\text{sen}\,2b}{\text{ch}\,2a - \cos 2b}.$$

Infine segnaleremo le formole che consentono di calcolare a e b noto che sia th $(a + jb) = x + jy$. Si ha dalle precedenti

$$x = \frac{\text{sh}\,a\,\text{ch}\,a}{\text{sh}^2 a + \cos^2 b}, \qquad y = \frac{\text{sen}\,b \cos b}{\text{sh}^2 a + \cos^2 b},$$

da cui

$$x^2 + y^2 = \frac{\text{sh}^2 a\,\text{ch}^2 a + \text{sen}^2 b \cos^2 b}{(\text{sh}^2 a + \cos^2 b)^2} = \frac{\text{sh}^2 a(1 + \text{sh}^2 a) + \cos^2 b(1 - \cos^2 b)}{(\text{sh}^2 a + \cos^2 b)^2} = \frac{(\text{sh}^2 a + \cos^2 b)(1 + sh^2 a - \cos^2 b)}{(\text{sh}^2 a + \cos^2 b)^2} = \frac{\text{sh}^2 a + \text{sen}^2 b}{\text{sh}^2 a + \cos^2 b}.$$

Da quest'ultima segue

$$1 + x^2 + y^2 = \frac{\text{ch}\,2a}{\text{sh}^2 a + \cos^2 b}, \qquad 1 - x^2 - y^2 = \frac{\cos 2b}{\text{sh}^2 a + \cos^2 b},$$

per cui in definitiva si ha:

$$(28) \qquad \text{th}\,2a = \frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, \qquad \text{tg}\,2b = \frac{2y}{1 - x^2 - y^2}.$$

È da notare che il numero a riesce così perfettamente determinato, mentre b lo è soltanto a meno di multipli di $\frac{\pi}{2}$.

Le funzioni iperboliche sh e ch, come immediatamente si riconosce dalle (12), sono periodiche con periodo immaginario $2\pi j$. Aggiungendo ad x il semiperiodo πj, sh e ch cambiano segno simultaneamente, dal che si deduce che th e cth sono periodiche con periodo πj. Si ha inoltre:

$$\text{sh}\left(j\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=j\,\text{ch}\,\alpha\,,\qquad \text{ch}\left(j\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=j\,\text{sh}\,\alpha\ \text{(1)}\,,$$

da cui segue

$$\text{th}\left(j\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\text{cth}\,\alpha\,,\qquad \text{cth}\left(j\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\text{th}\,\alpha\,. \tag{29}$$

Le funzioni iperboliche sono strettamente legate alla funzione logaritmo, come si rileva dalla relazione

$$x=\frac{1}{2}\log\frac{1+\text{th}\,x}{1-\text{th}\,x}$$

deducibile immediatamente dalla prima delle (14), oppure anche dalle (12) osservando che è:

$$e^{2x}=(e^x)^2=(\text{ch}\,x+\text{sh}\,x)^2=\frac{(\text{ch}\,x+\text{sh}\,x)^2}{\text{ch}^2\,x-\text{sh}^2\,x}=\frac{\text{ch}\,x+\text{sh}\,x}{\text{ch}\,x-\text{sh}\,x}=\frac{1+\text{th}\,x}{1-\text{th}\,x}\,.$$

4. - Le funzioni Si(x) e Ci(x). — Nella trattazione di alcuni problemi di Radiotecnica (veggasi, ad es., IX, 11) occorre considerare integrali del tipo

$$\int_a^b\frac{\text{sen}\,x}{x}\,dx\,,\qquad \int_a^b\frac{\cos x}{x}\,dx\,.$$

Tali integrali sono costantemente finiti ogni qualvolta l'intervallo (a, b) sia finito, semprechè, pel secondo, esso non comprenda lo zero nel suo interno.

I valori di tali integrali si possono porre sotto la forma:

$$\int_a^b\frac{\text{sen}\,x}{x}\,dx=\text{Si}(b)-\text{Si}(a)\,,\qquad \int_a^b\frac{\cos x}{x}\,dx=\text{Ci}(b)-\text{Ci}(a)\,,$$

essendo Si(x), Ci(x) funzioni primitive — per ora qualunque — di $\dfrac{\text{sen}\,x}{x}$, $\dfrac{\cos x}{x}$ rispettivamente.

Si suole definire la funzione Si(x), detta *integral-seno*, mediante la

$$\text{Si}(x)=\int_0^x\frac{\text{sen}\,x}{x}\,dx \tag{30}$$

(1) Infatti è:

$$\text{sh}\left(j\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=j\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-j\alpha\right)=j\cos j\alpha=j\,\text{ch}\,\alpha\,,$$

$$\text{ch}\left(j\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-j\alpha\right)=\text{sen}\,j\alpha=j\,\text{sh}\,\alpha\,.$$

cui corrisponde lo sviluppo in serie (rapidamente convergente per qualunque x)

$$\mathrm{Si}(x) = x - \frac{x^3}{3!\,3} + \frac{x^5}{5!\,5} - \dots, \tag{30'}$$

e si ha

$$\mathrm{Si}(0) = 0\,, \quad \mathrm{Si}(-x) = -\,\mathrm{Si}(x)\,,$$

$$\lim_{x\to\infty} \mathrm{Si}(x) = \frac{\pi}{2} \qquad \text{e quindi (per } x > 0) \qquad \mathrm{Si}(x) = \frac{\pi}{2} - \int_x^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx\,.$$

Per piccoli valori positivi di x si può approssimare $\mathrm{Si}(x)$ coi primi termini della serie (30'): così, con errore $< 0{,}01$, si può ritenere

$$\mathrm{Si}(x) \backsimeq x \text{ per } x < 0{,}56\,, \qquad \mathrm{Si}(x) \backsimeq x - \frac{x^3}{18} \text{ per } x < 1{,}43, \text{ ecc.}$$

Per valori di x sufficientemente elevati, si ha

$$\mathrm{Si}(x) \backsimeq \frac{\pi}{2} - \frac{\cos x}{x} - \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\,,$$

la quale formola può giustificarsi osservando che la espressione a secondo membro coincide con $\mathrm{Si}(x)$ per $x \to \infty$, mentre la sua derivata $\frac{\operatorname{sen} x}{x}\left(1 + \frac{2}{x^2}\right)$ è sensibilmente uguale a quella di $\mathrm{Si}(x)$. Per x abbastanza grande, ci si potrà limitare a tener conto dell'ultimo termine della precedente soltanto per i valori di x vicini a quelli $\left(\text{multipli dispari di } \frac{\pi}{2}\right)$ che annullano il termine $\frac{\cos x}{x}$.

La funzione $\mathrm{Si}(x)$ così definita raggiunge dei massimi per $x = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$ e dei minimi per $x = 2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$; i valori di tali massimi e minimi, col crescere di x, tendono verso $\frac{\pi}{2}$ come le ordinate dell'iperbole $y = \frac{\pi}{2} \pm \frac{1}{x}$. Più precisamente si ha:

per $x =$	π	2π	3π	4π	5π	6π	7π	8π	9π	10π	11π	12π	13π
massimi: $\frac{\pi}{2} +$	0,28114		0,10396		0,06317		0,04529		0,03528		0,02889		0,02466
minimi: $\frac{\pi}{2} -$		0,15264		0,07864		0,05276		0,03967		0,03197		0,02649	

Per la funzione $\mathrm{Ci}(x)$ non si può assumere una definizione analoga alla (30) perchè $\frac{\cos x}{x}$ diviene infinito per $x \to 0$. Siccome però, per ogni x finito, è finito l'integrale

$$\int_0^x \frac{\cos x - 1}{x}\,dx\,,$$

si suole definire la funzione stessa, detta *integral-coseno*, come somma di tale ultimo integrale con una delle funzioni primitive di $\frac{1}{x}$, cioè mediante la relazione

$$\mathrm{Ci}(x) = \int_0^x \frac{\cos x - 1}{x}\,dx + \log x + C\,.$$

Quanto alla costante C, poichè si dimostra che esiste il

$$\lim_{x \to \infty}\left(\int_0^x \frac{1-\cos x}{x}\,dx - \log x\right),$$

la si assume uguale a tale limite [1], cioè si pone

$$C = 0{,}5772156649\ldots,$$

con che risulta $\lim\limits_{x \to \infty} \mathrm{Ci}(x) = 0$. La funzione $\mathrm{Ci}(x)$ può dunque, per $x > 0$, rappresentarsi con

$$\int_\infty^x \frac{\cos x}{x}\,dx = -\int_x^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx,$$

cioè si ha

$$\text{(31)}\qquad \mathrm{Ci}(x) = \int_0^x \frac{\cos x - 1}{x}\,dx + \log x + C = -\int_x^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx.$$

La differenza $\mathrm{Ci}(x) - \log x - C$ può svilupparsi con la serie, convergente per qualunque x positivo:

$$\text{(31')}\qquad \mathrm{Ci}(x) - \log x - C = -\frac{x^2}{2!\,2} + \frac{x^4}{4!\,4} - \ldots \ldots \; [2]$$

Per piccoli valori positivi di x, si può approssimare $\mathrm{Ci}(x)$ coi primi termini di questa serie; così, con errore minore di 0,01, si può calcolare la differenza a primo membro con

$$\mathrm{Ci}(x) - \log x - C \backsimeq -\frac{x^2}{4} \quad \text{per } x < 0{,}99, \quad \backsimeq -\frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{96} \quad \text{per } x < 1{,}87, \text{ ecc.}$$

Per valori di x sufficientemente elevati si dimostra come precedentemente che si può ritenere

$$\mathrm{Ci}(x) \backsimeq \frac{\operatorname{sen} x}{x} - \frac{\cos x}{x^2},$$

osservando inoltre che dell'ultimo termine basterà tener conto soltanto in vicinanza di $x = k\pi$ (k intero).

I massimi e minimi di $\mathrm{Ci}(x)$ si verificano alternativamente per i valori di x corrispondenti ai multipli dispari di $\frac{\pi}{2}$ e precisamente si ha:

$x =$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{2}\pi$	$\frac{7}{2}\pi$	$\frac{9}{2}\pi$	$\frac{11}{2}\pi$	$\frac{13}{2}\pi$	$\frac{15}{2}\pi$	$\frac{17}{2}\pi$	$\frac{19}{2}\pi$	$\frac{21}{2}\pi$	$\frac{23}{2}\pi$	$\frac{25}{2}\pi$	$\frac{27}{2}\pi$
massimi	0,47200		0,12377		0,07010		0,04874		0,03735		0,03026		0,02543	
minimi		—0,19841		—0,08958		—0,05750		—0,04229		—0,03343		—0,02764		—0,0235

[1] Questo limite è la così detta *costante di Eulero*. Altre definizioni di questa costante sono le seguenti:

$$C = \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n\right), \qquad C = \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}\,dt - \int_1^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt.$$

[2] Questa serie converge anche per $x < 0$; anzi il suo valore non muta mutando

I valori di tali massimi e minimi col crescere di x tendono a zero come le ordinate delle iperboli $y = \pm \frac{1}{x}$.

Dai diagrammi di fig. 425 si possono rilevare i valori di Si(x) e Ci(x).

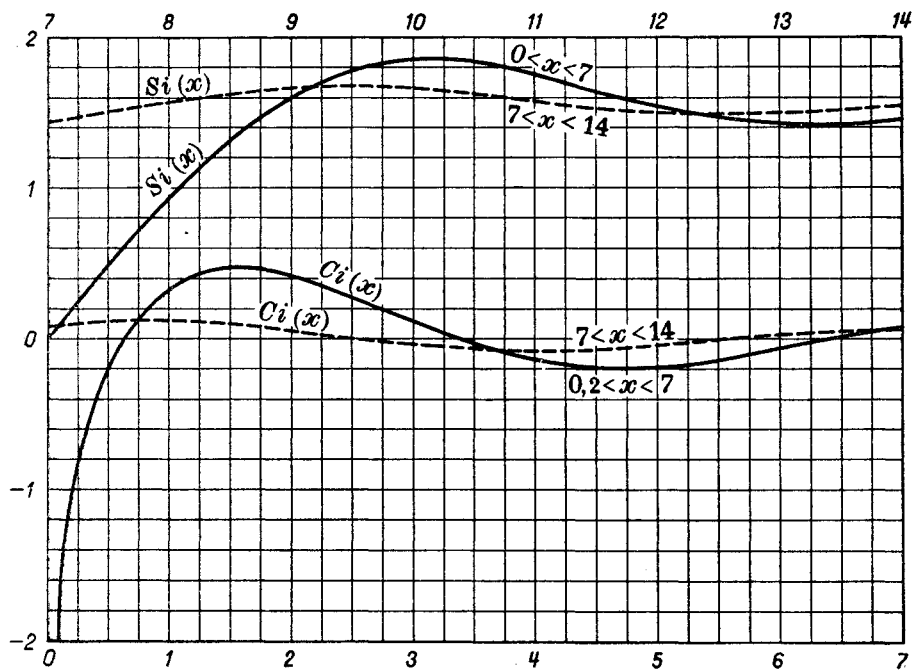



Fig. 425

5. - Integrali di prodotti di seni e coseni. — In vista di una applicazione che dovremo fare tra poco, proponiamoci di calcolare gli integrali:

$$(32) \qquad \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx \,, \quad \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx \, dx \,, \quad \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx \, dx \,,$$

dove m, n rappresentano due numeri interi, positivi o negativi.

Partendo dalle note formole:

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta) \,,$$

$$2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta = \cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta) \,,$$

$$2 \operatorname{sen} \alpha \cos \beta = \operatorname{sen} (\alpha + \beta) + \operatorname{sen} (\alpha - \beta) \,,$$

x in $-x$, ma non si può dire che essa rappresenti il primo membro, perchè questo, per $x < 0$, non ha significato nel campo reale.

si ha senz'altro:

$$2\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \int_0^{2\pi} \cos (m+n)\, x\, dx + \int_0^{2\pi} \cos (m-n)\, x\, dx\,,$$

$$2\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx = \int_0^{2\pi} \cos (m-n)\, x\, dx - \int_0^{2\pi} \cos (m+n)\, x\, dx\,.$$

$$2\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx\, dx = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} (m+n) x\, dx + \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} (m-n)\, x\, dx\,,$$

per cui tutto si riduce a calcolare integrali dei tipi:

$$\int_0^{2\pi} \cos kx\, dx\,, \quad \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} kx\, dx\,, \quad \text{con } k \text{ intero}\,.$$

Ora, siccome le funzioni $\cos kx$, $\operatorname{sen} kx$, per $k \neq 0$, hanno rispettivamente per primitive:

$$\frac{\operatorname{sen} kx}{k}\,, \quad -\frac{\cos kx}{k}\,,$$

si vede subito che tali integrali sono nulli per $k \neq 0$, mentre ovviamente, per $k = 0$, essi si riducono, il primo a 2π, il secondo a zero.

Si conclude pertanto che i tre integrali (32) sono nulli per $m \neq n$, mentre, per $m = n \neq 0$, si ha:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 mx\, dx = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 mx\, dx = \pi\,, \qquad \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} mx \cos mx\, dx = 0\,;$$

o, ciò che è lo stesso, i valori medi tra 0 e 2π di

$$\cos^2 x\,, \quad \cos^2 2x, \ldots\,; \quad \operatorname{sen}^2 x\,, \quad \operatorname{sen}^2 2x, \ldots$$

sono tutti $= \frac{1}{2}$, mentre il valore medio di ogni prodotto del tipo $\operatorname{sen} mx \cos nx$ è nullo tanto per $m \neq n$, quanto per $m = n$.

6. - Funzioni periodiche. - Sviluppo di Fourier. — In Analisi superiore si dimostra che se $f(x)$ è una funzione periodica di x, di periodo X, cioè tale che, per qualunque x, si abbia (fig. 426)

$$f(x) = f(x+X) = f(x+2X) = \ldots = f(x+kX) \quad (k \text{ intero})\,,$$

sotto talune condizioni qualitative (continuità, ecc.) assai poco restrittive, che solitamente sono soddisfatte dalle funzioni che si incontrano nella pratica, essa può sempre rappresentarsi con una serie procedente per i seni e coseni dei multipli di $\varphi = \omega x$, essendo $\omega = \frac{2\pi}{X}$, cioè, assumendo senz'altro φ per variabile

indipendente e ponendo $F(\varphi) = f\left(\frac{\varphi}{\omega}\right)$, si ha

$$(33) \quad F(\varphi) = a_0 + a_1 \operatorname{sen}\varphi + a_2 \operatorname{sen} 2\varphi + \ldots + b_1 \cos\varphi + b_2 \cos 2\varphi + \ldots \text{ (1)},$$

essendo $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ delle costanti opportune.

Tale sviluppo prende il nome di *serie di Fourier*.

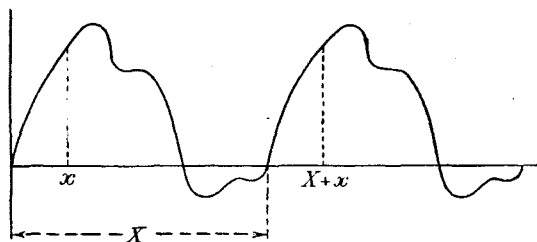



Fig. 426

La φ sopra definita può denominarsi il *valore angolare* di x, perchè essa è tale che il suo rapporto all'angolo giro 2π uguaglia la misura, *in periodi X*, della variabile x (cioè del rapporto $\frac{x}{X}$, che, al pari di $\frac{\varphi}{2\pi}$, è un numero puro).

Spesso, nelle applicazioni, la variabile x è il tempo, nel qual caso il periodo X corrisponde all'inversa della *frequenza*, e la variabile angolare φ equivale al prodotto ωx del tempo x per la grandezza $\omega = \frac{2\pi}{X}$ che si suol chiamare *pulsazione*.

Inversamente, è evidente che la (33) rappresenta una funzione periodica di periodo 2π, qualunque siano i valori dei coefficienti $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$, dappoichè tale carattere compete a ciascuno dei suoi termini.

7. - Coefficienti dello sviluppo di Fourier. - Valore efficace. - Percentuale di armoniche. — Per le applicazioni effettive, è importante saper calcolare i coefficienti $a_0, a_1, \ldots, b_1, \ldots$ dello sviluppo (33), data che sia la funzione $F(\varphi)$.

Tale calcolo è assai agevole se — come noi qui faremo — si ammette che l'integrale di una espressione del tipo (33) possa calcolarsi contruendo la serie che ha per termini gli integrali dei singoli termini.

Invero, si cominci con l'osservare che il valore medio nell'intervallo da 0 ad X (per x) o, ciò che è lo stesso, da 0 a 2π (per φ), di ognuna delle funzioni sen φ,

---

(1) Uno sviluppo come questo vale sotto condizioni molto larghe; in particolare, esso è valido per una funzione $f(x)$ che in tutti i punti dell'intervallo $(0, X)$ è continua salvo in un numero finito di punti c in cui presenta discontinuità ordinarie (o di prima specie). In ognuno di tali punti la somma della serie vale $\frac{f(c-0) + f(c+0)}{2}$, essendo $f(c-0)$, $f(c+0)$ i limiti sinistro e destro di $f(x)$ per $x \to c$; in particolare, se è $f(0) \neq f(X)$, la somma della serie stessa, per $x = 0$ (o per $x = X$) vale $\frac{f(0) + f(X)}{2}$.

$\cos\varphi$, $\text{sen}\,2\varphi$, $\cos 2\varphi, \ldots$ è nullo, mentre il valore medio della costante a_0 è la a_0 stessa. Se ne conclude che il primo coefficiente a_0 non è che il valore medio di $F(\varphi)$ in un periodo, cioè si ha:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\varphi)\,d\varphi\,.$$

Poi, se si moltiplicano ambo i membri della (21) una volta per $\text{sen}\,\varphi$, un'altra per $\cos\varphi$, un'altra per $\text{sen}\,2\varphi$, poi per $\cos 2\varphi, \ldots$ e si uguagliano i valori medi dei due membri, si ottiene, ricordando i risultati ottenuti al n. 5:

$$(34)\quad \begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\varphi)\,\text{sen}\,\varphi\,d\varphi\,, \quad a_2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\varphi)\,\text{sen}\,2\varphi\,d\varphi\,, \ldots\,, \\ b_1 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\varphi)\cos\varphi\,d\varphi\,, \quad b_2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\varphi)\cos 2\varphi\,d\varphi\,, \ldots\,. \end{aligned}$$

Quando una funzione periodica sia sviluppata in serie come la (33), i termini di questa, dopo il primo, rappresentano le singole componenti *armoniche* semplici in cui la data funzione può pensarsi scomposta.

Tali componenti sono rappresentate da diagrammi sinusoidali aventi frequenze uguali a quella della $F(\varphi)$ ed ai suoi multipli interi; le prime si dicono armoniche fondamentali, le seconde armoniche superiori (rispettivamente seconda, terza, ecc.).

È da osservare che ogni coppia di termini contenenti armoniche di uno stesso ordine può raggrupparsi in un unico termine. Invero può sempre identicamente scriversi:

$$a_n\,\text{sen}\,n\varphi + b_n\cos n\varphi = A_n\,\text{sen}\,(n\varphi + \varphi_n)\,,$$

purchè ad A_n e φ_n si attribuiscano valori che soddisfano alle condizioni:

$$A_n\cos\varphi_n = a_n\,, \quad A_n\,\text{sen}\,\varphi_n = b_n\,,$$

cioè si assuma:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\,, \quad \text{tg}\,\varphi_n = \frac{b_n}{a_n} \qquad \left(\cos\varphi_n = \frac{a_n}{A_n}\,, \quad \text{sen}\,\varphi_n = \frac{b_n}{A_n}\right).$$

Le grandezze a_n, b_n si chiamano le ampiezze delle armoniche $a_n\,\text{sen}\,n\varphi$, $b_n\cos n\varphi$, e la A_n non è che l'ampiezza dell'armonica d'ordine n ottenuta da esse mediante la composizione in unica armonica (necessariamente dello stesso ordine).

Si può poi notare che tale composizione può farsi rappresentando le $a_n\,\text{sen}\,n\varphi$, $b_n\cos n\varphi$ con due segmenti di lunghezze a_n e b_n (fig. 427) fra loro perpendicolari (in quadratura) ed applicando a questi le regole della composizione geometrica. L'ampiezza A_n della risultante uguaglia la risultante geometrica dei due segmenti e l'angolo di essa con la a_n viene a corrispondere a φ_n.

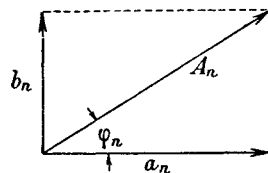



Fig. 427

È facile verificare che, se la funzione $F(\varphi)$ è limitata, le ampiezze A_0, A_1, $A_2, \ldots$ tendono a zero. Infatti, se si calcola il valore medio del quadrato di $F(\varphi)$:

$$[(F(\varphi)]^2 = a_0^2 + A_1^2 \operatorname{sen}^2(\varphi + \varphi_1) + A_2^2 \operatorname{sen}^2(2\varphi + \varphi_2) + \ldots + \\ + 2a_0 A_1 \operatorname{sen}(\varphi + \varphi_1) + 2a_0 A_2 \operatorname{sen}(2\varphi + \varphi_2) + \ldots + \\ + 2A_1 A_2 \operatorname{sen}(\varphi + \varphi_1) \operatorname{sen}(2\varphi + \varphi_2) + \ldots ,$$

si vede subito (n. 5) che esso si riduce a

$$a_0^2 + \frac{A_1^2}{2} + \frac{A_2^2}{2} + \ldots ,$$

e poichè tal valor medio è finito, questa serie deve convergere; onde necessariamente è $\lim\limits_{n \to \infty} A_n = 0$.

La sua somma rappresenta il quadrato del così detto *valore efficace* della grandezza periodica data, definito come radice quadrata della media dei quadrati dei valori assunti dalla grandezza in un periodo.

Nel caso di grandezza a media nulla ($a_0 = 0$), esso coincide col valore efficace di una grandezza alternativa di ampiezza

$$\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + \ldots} .$$

Se, insieme alla fondamentale, esistesse una sola armonica di ampiezza B, tale valore efficace sarebbe espresso da

$$\sqrt{\frac{A_1^2 + B^2}{2}} = \sqrt{A_{1eff}^2 + B_{eff}^2} ,$$

cioè sarebbe misurato dall'ipotenusa di un triangolo rettangolo avente per cateti A_{1eff} e B_{eff}.

La stessa formola vale anche pel caso generale, ove si ponga:

$$B^2 = A_2^2 + A_3^2 + \ldots .$$

Il rapporto $\dfrac{B}{A_1}$ dà una nozione grossolana di quanto la forma della funzione data si scosta dalla sinusoidale. Il suo valore in unità percentuali (cioè il suo prodotto per 100) può definirsi la *percentuale di armoniche* della grandezza data.

8. - Valutazione delle ampiezze delle armoniche. - Esempi. — Le formole (34) suggeriscono un metodo grafico per la costruzione dei valori delle ampiezze delle successive componenti armoniche, come segue.

Calcolata graficamente o meccanicamente (ad es. con un planimetro) l'area del diagramma $ABCD$ (fig. 428 a)) corrispondente ad un periodo, si avrà nell'ordinata media il valore di a_0.

Poi, per avere a_1, si tracci una sinusoide S ($\operatorname{sen}\varphi$) di periodo $= AD$, si costruisca il diagramma le cui ordinate corrispondono, punto per punto, al prodotto delle ordinate del diagramma dato per quelle della sinusoide, e se ne calcoli la ordinata media. Il doppio di questa sarà a_1. Così (fig. 428 b)), assumendo invece la sinusoide S' ($\cos\varphi$), si avrà b_1; assumendo poi (fig. 428 c)) la sinusoide S'' ($\operatorname{sen} 2\varphi$) si avrà a_2, ecc.

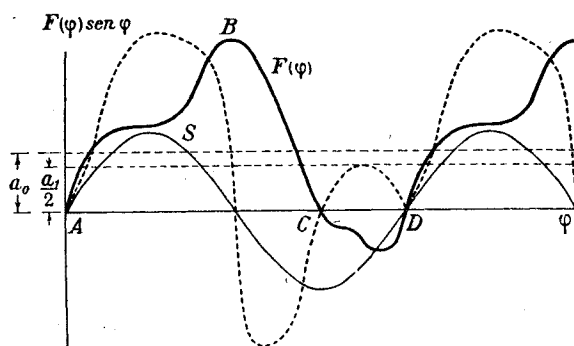



Fig. 428 *a*)

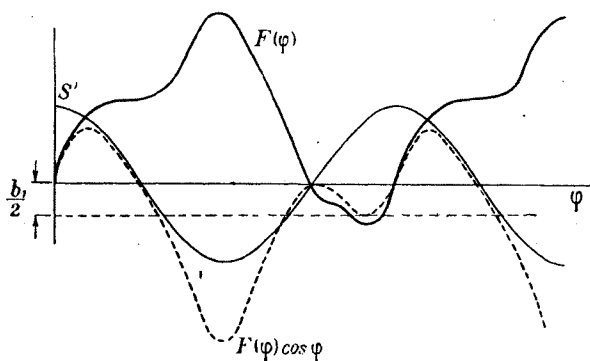



Fig. 428 *b*)

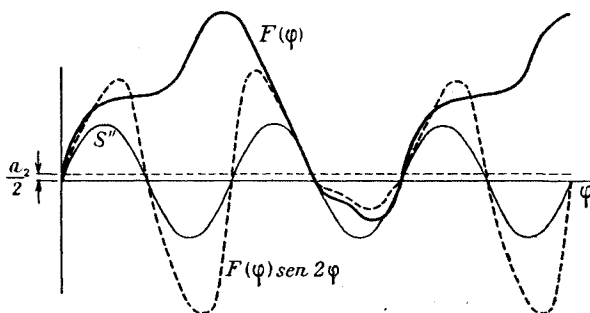



Fig. 428 *c*)

Se, per fissare le idee, supponiamo che sia $a_0 = 0$ (al qual caso ci si può sempre ridurre considerando la funzione $F(\varphi) - a_0$ in luogo della $F(\varphi)$ data), la curva rappresentativa della funzione in esame presenterà aree uguali al di sopra e al di sotto dell'asse φ.

In generale però non avrà caratteri di simmetria.

Se invece si presentano talune simmetrie, ne conseguono particolari valori per alcuni dei coefficienti a_n e b_n dello sviluppo (32), che interessa esaminare.

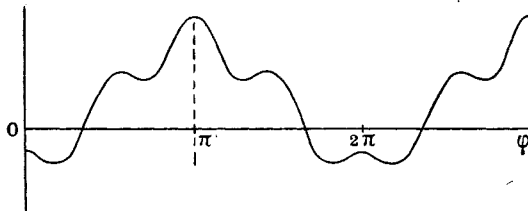



Fig. 429

Supponiamo in primo luogo che, come avviene nel caso di fig. 429, il diagramma presenti simmetria rispetto all'ordinata centrale del periodo, il che equivale a dire che, ponendo l'origine al centro del periodo stesso, si abbia:

$$F(\varphi) = F(-\varphi) .$$

In tal caso, basta seguire la costruzione indicata, per convincersi che nello sviluppo mancheranno tutti i termini coi seni, cioè si avrà:

$$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = 0 .$$

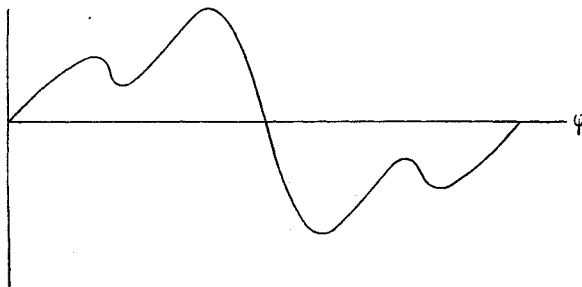



Fig. 430

Se invece, sempre ponendo l'origine al centro del periodo, si ha che due ordinate equidistanti dalla ordinata mediana sono uguali e di segno contrario (fig. 430), cioè se è

$$F(\varphi) = - F(-\varphi)$$

(e quindi necessariamente $F(0) = 0$), nello sviluppo mancheranno tutti i termini coi coseni, e quindi sarà:

$$b_1 = b_2 = b_3 = \ldots = 0 .$$

Se la funzione è *alternativa*, cioè tale che il periodo X sia decomponibile in due parti uguali, nella seconda delle quali la funzione assume la medesima successione di valori assunti nella prima metà, ma con segno cambiato, si avrà, ponendo l'origine nel centro del periodo:

$$f(x) = -f\left(x + \frac{X}{2}\right), \quad \text{cioè} \quad F(\varphi) = -F(\varphi + \pi) ;$$

pertanto nello sviluppo mancheranno tutte le armoniche pari, cioè sarà

$$a_2 = a_4 = \ldots = b_2 = b_4 = \ldots = 0 .$$

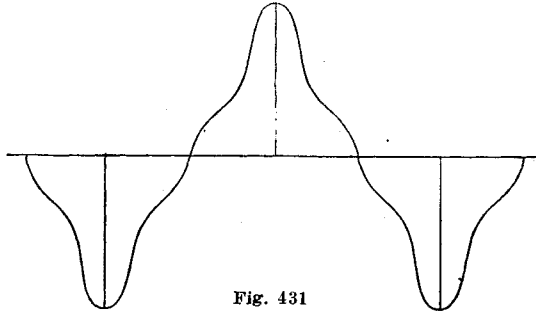



Fig. 431

Se poi una funzione alternativa presenta simmetria rispetto alla ordinata centrale di ogni semiperiodo (fig. 431), mancheranno anche i termini coi coseni, cioè si avrà:

$$a_2 = a_4 = \ldots = b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = \ldots = 0 .$$

A titolo di esempio, proponiamoci di eseguire lo sviluppo in serie di Fourier della funzione rappresentata dal diagramma disegnato in fig. 432, dove $BC =$

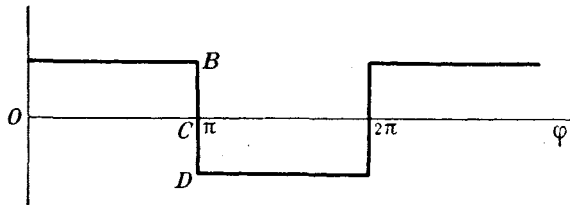



Fig. 432

$= CD = a$. Essa evidentemente rientra nell'ultimo dei tipi considerati, quindi in primo luogo si avrà:

$$a_0 = a_2 = a_4 = \ldots = b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = \ldots = 0 ;$$

poi, per $n = 2k + 1$ (essendo k intero):

$$a_{2k+1} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \operatorname{sen} (2k + 1) \varphi \, d\varphi = \frac{a}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} (2k + 1) \varphi \, d\varphi -$$

$$- \frac{a}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} (2k + 1) \varphi d\varphi = \frac{a}{\pi} \left[- \frac{\cos (2k + 1)\varphi}{2k + 1} \right]_0^{\pi} + \frac{a}{\pi} \left[\frac{\cos (2k + 1)\varphi}{2k + 1} \right]_{\pi}^{2\pi} =$$

$$= \frac{4a}{\pi(2k + 1)} ;$$

e pertanto in definitiva è

$$f(x) = \frac{4a}{\pi}\left(\operatorname{sen}\varphi + \frac{\operatorname{sen}3\varphi}{3} + \frac{\operatorname{sen}5\varphi}{5} + \dots\right) \text{ [1]}.$$

Più generalmente, per la funzione rappresentata dal diagramma di fig. 433, si troverebbe lo sviluppo:

$$\frac{4a}{\pi}\left(\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi - \frac{\operatorname{sen}3\theta\operatorname{sen}3\varphi}{3} + \frac{\operatorname{sen}5\theta\operatorname{sen}5\varphi}{5} - \dots\right), \tag{35}$$

di cui il precedente è un caso particolare $\left(\text{per } \theta = \frac{\pi}{2}\right)$.

Particolarmente interessanti per le applicazioni radiotecniche sono gli sviluppi in serie di Fourier delle funzioni periodiche definite dai diagrammi di

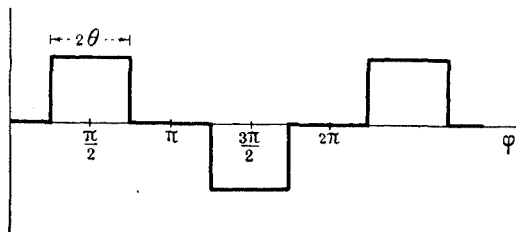



Fig. 433

fig. 434 *a*) e *b*), dove le curve *AmB*, *CnD*, sono archi di sinusoide di una certa ampiezza *a*, come pure le *AmB*, *BnC*, *CmD*. La prima ha per periodo *AC*, la seconda *AB*.

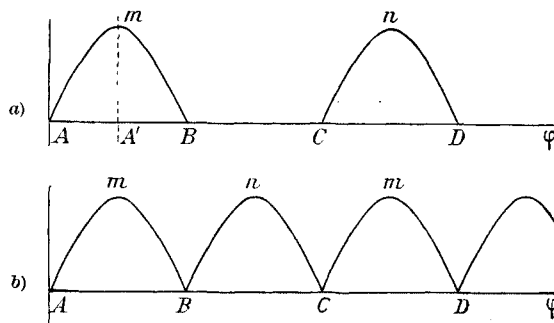



Fig. 434

[1] Di qui, per $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $a = 1$, si deduce che la serie:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

è convergente, e la sua somma vale $\frac{\pi}{4}$.

Per la prima, posta l'origine in A', si ha:

$$F(\varphi) = a \cos \varphi \quad \text{per} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{ed} \quad F(\varphi) = 0 \ \text{per} \ \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}.$$

Siccome l'ordinata media della curva AmB vale $\frac{2a}{\pi}$, quella del diagramma $AmBC$ sarà $\frac{a}{\pi}$, e pertanto si ha:

$$a_0 = \frac{a}{\pi}.$$

Poi, per una osservazione precedente, si ha certamente:

$$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = 0.$$

Calcoliamo dunque i coefficienti b_n. Quanto a b_1, si ha:

$$\pi b_1 = \int_0^{2\pi} F(\varphi) \cos \varphi d\varphi = a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{a\pi}{2}, \quad \text{cioè} \quad b_1 = \frac{a}{2};$$

poi, per $n > 1$:

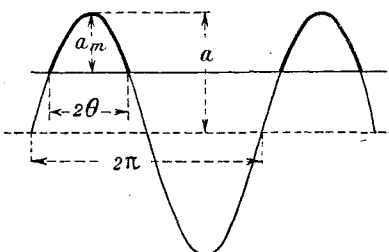
$$\pi b_n = a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \cos n\varphi d\varphi = \frac{a}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos (n+1) \varphi d\varphi + \frac{a}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos (n-1) \varphi d\varphi =$$

$$= \frac{a}{2} \left[\frac{\operatorname{sen} (n+1) \varphi}{n+1} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{a}{2} \left[\frac{\operatorname{sen} (n-1) \varphi}{n-1} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}.$$

Quindi, facendo successivamente $n = 2, 3, \ldots$, si trova:

$$b_3 = b_5 = \ldots = 0, \quad b_2 = \frac{2a}{3\pi}, \quad b_4 = -\frac{2a}{3 \cdot 5\pi},$$

$$b_6 = \frac{2a}{5 \cdot 7\pi}, \quad b_8 = -\frac{2a}{7 \cdot 9\pi}, \ldots.$$

Lo sviluppo cercato è dunque:

$$F(\varphi) = \frac{a}{\pi}\left(1 + \frac{\pi}{2} \cos \varphi + \frac{2}{3} \cos 2\varphi - \frac{2}{3 \cdot 5} \cos 4\varphi + \frac{2}{5 \cdot 7} \cos 6\varphi - \ldots\right). \tag{36}$$

Per il secondo dei due proposti diagrammi, basta sommare $F(\varphi)$ con $F(\varphi + \pi)$; si trova così lo sviluppo:

$$\frac{2a}{\pi}\left(1 + \frac{2}{3} \cos 2\varphi - \frac{2}{3 \cdot 5} \cos 4\varphi + \frac{2}{5 \cdot 7} \cos 6\varphi + \ldots\right).$$

Il periodo della funzione da esso rappresentata è π (e non 2π) (1).

La funzione rappresentata dal diagramma di fig. 434 *a*) è un caso particolare di quella il di cui diagramma (fig. 435) è costituito da tratti di sinusoide di ampiezza angolare $2\theta \neq \pi$. Imitando il precedente procedimento, si trova per tale funzione lo sviluppo:

$$\frac{a_m}{\pi(1-\cos\theta)}\left\{\operatorname{sen}\theta + (\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta)\cos\varphi + \left(\frac{\operatorname{sen}3\theta}{3} + \operatorname{sen}\theta\right)\cos 2\varphi + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\operatorname{sen}4\theta}{4} + \frac{\operatorname{sen}2\theta}{2}\right)\cos 3\varphi + \ldots\right\},$$

Fig. 435

dove, in luogo dell'ampiezza a della sinusoide fondamentale, si è messa in evidenza l'ordinata massima a_m del diagramma, misurata da $a_m = a\ (1 - \cos\theta)$.

9. - Equazioni differenziali lineari. — Come è noto, si chiama *equazione differenziale* una equazione del tipo

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0\,,$$

dove F è simbolo di una funzione di $n+2$ argomenti, ed $y, y', \ldots y^{(n)}$ rappresentano una funzione incognita della variabile indipendente x, e le sue successive derivate. L'equazione scritta è dell'*ordine* n.

Il caso più semplice è quello di una equazione di primo ordine del tipo:

$$y' = f(x)\,,$$

la quale è soddisfatta da tutte le primitive di $f(x)$, per cui nell'espressione della funzione risolvente compare una costante arbitraria.

Ciò si verifica sempre, cioè si ha che nell'espressione della più generale funzione soddisfacente ad una data equazione differenziale dell'ordine n, o, come si dice, nell'*integrale generale* di questa, compaiono n costanti arbitrarie. Attribuendo a queste un particolare sistema di valori, si hanno altrettanti *integrali particolari*; e precisamente, la determinazione delle costanti arbitrarie che compaiono nell'integrale generale può farsi imponendo alla funzione la condizione che, per un dato valore x_0 della variabile, essa e le sue prime $n-1$ derivate assumano valori predeterminati.

L'integrazione delle equazioni differenziali è in generale un problema assai arduo. Per le applicazioni che interessano la Radiotecnica, è sufficiente occuparsi di alcuni tipi particolarmente semplici, e precisamente delle equazioni così dette *lineari*, dei primi due ordini.

(1) Più generalmente, se $f_1(x)$ è funzione periodica di periodo X, e si pone $f_2(x) = f_1\left(x + \frac{X}{2}\right)$, la somma $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ è una funzione periodica di periodo $\frac{X}{2}$. Infatti, si ha successivamente:

$$f\left(x+\frac{X}{2}\right) = f_1\left(x+\frac{X}{2}\right) + f_2\left(x+\frac{X}{2}\right) = f_2(x) + f_1(x+X) = f_2(x) + f_1(x) = f(x)\,.$$

Una equazione differenziale si dice *lineare* quando la funzione incognita e le sue derivate vi compaiono al primo grado.

Così una equazione lineare di primo ordine sarà del tipo:

$$y' + ay + b = 0 ,$$

dove a e b sono funzioni note della x, ed y è la funzione incognita.

Se è $b = 0$, essa si dice *omogenea.*

L'equazione omogenea si integra facilmente, nel caso di a costante, osservando che, se si pone $y = e^{kx}$ con k costante, si ha $y' = ke^{kx}$, e quindi, per soddisfare alla equazione data, occorre che sia

$$k + a = 0 ,$$

cioè si deve assumere $k = -a$. Dunque e^{-ax} è un integrale particolare della equazione

$$y' + ay = 0 . \tag{37}$$

D'altra parte, per una equazione lineare omogenea qualunque, cioè del tipo:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0 ,$$

si verifica subito che, se y_1 e y_2 sono due integrali, tali sono anche le funzioni C_1y_1, C_2y_2, $C_1y_1 + C_2y_2$, dove C_1, C_2 sono costanti arbitrarie; in particolare si conclude che sono integrali della (37) tutte le funzioni

$$y = Ce^{-ax} ,$$

qualunque sia il valore attribuito alla costante arbitraria C.

Questo è effettivamente l'integrale generale della (37), giacchè, come agevolmente si verifica, si può disporre della costante C in modo che la y assuma un predeterminato valore y_0 per un dato x_0. Basta invero fare $C = y_0 e^{ax_0}$.

Per l'equazione differenziale lineare del secondo ordine omogenea

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{38}$$

a coefficienti a, b, c costanti, lo stesso artificio di dianzi consente di trovare, in generale, due integrali particolari della forma e^{kx}. Infatti, sostituendo e^{kx} ad y nella (38), si trova la seguente equazione cui deve soddisfare k:

$$ak^2 + bk + c = 0 .$$

Questa, che si chiama la equazione *caratteristica* della (38), è una equazione algebrica in k, dalle cui due radici

$$k_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} , \quad k_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

si deducono due integrali particolari, e^{k_1x} e e^{k_2x}, della (29); e pertanto, per una osservazione precedente, la funzione

$$y = C_1 e^{k_1x} + C_2 e^{k_2x} \tag{39}$$

ne è pure un integrale, qualunque siano i valori attribuiti alle costanti C_1 e C_2. Anzi, come agevolmente si verifica, essa rappresenta l'integrale generale, in quanto

si può in generale determinare una coppia di valori di C_1, C_2 tale che y ed y' assumano, per un x_0 arbitrariamente dato, valori pure arbitrariamente dati.

Per interpretare la (39), è opportuno distinguere tre casi:

1°) $b^2 - 4ac > 0$. In tal caso k_1 e k_2 sono reali e distinti, e nulla vi è da osservare.

2°) $b^2 - 4ac < 0$. In tale caso k_1 e k_2 sono complessi coniugati, cosicchè si ha:

$$k_1 = \alpha + j\beta\,, \qquad k_2 = \alpha - j\beta\,,$$

con

$$\alpha = -\frac{b}{2a}\,, \qquad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}\,,$$

e gli integrali particolari $e^{k_1 x}$, $e^{k_2 x}$ assumono l'aspetto:

$$e^{(\alpha \pm j\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x \pm j \operatorname{sen} \beta x)\,.$$

Si hanno altri due integrali particolari prendendo la semisomma di questi, oppure la loro semidifferenza divisa per j, cioè le funzioni:

$$e^{\alpha x} \cos \beta x\,; \qquad e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x\,.$$

Pertanto all'integrale generale della (38) può darsi la forma

$$e^{\alpha x}\,(C_1 \cos \beta x + C_2 \operatorname{sen} \beta x)\,, \tag{40}$$

essendo C_1 e C_2 due costanti arbitrarie.

3°) $b^2 - 4ac = 0$. In tal caso i due integrali particolari $e^{k_1 x}$ ed $e^{k_2 x}$ coincidono, ma si può verificare, con la sostituzione diretta, che anche

$$xe^{k_1 x} = xe^{-\frac{b}{2a}x}$$

soddisfa l'equazione data. Pertanto l'integrale generale della (38) risulta espresso da

$$e^{-\frac{b}{2a}x}(C_1 + C_2 x)\,. \tag{41}$$

La integrazione di una equazione non omogenea

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x)\,, \tag{42}$$

dove $f(x)$ è una funzione nota di x, si può sempre ricondurre a quella della corrispondente equazione omogenea, vale a dire di quell'equazione che si deduce dalla data sostituendo 0 a $f(x)$, purchè della (42) si conosca un integrale particolare Y.

Infatti, se y è un altro qualunque integrale particolare, da:

$$\begin{aligned} y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y &= f(x)\,, \\ Y^{(n)} + a_1 Y^{(n-1)} + \ldots + a_n Y &= f(x)\,, \end{aligned}$$

sottraendo, si deduce che è

$$(y - Y)^{(n)} + a_1(y - Y)^{(n-1)} + \ldots + a_n(y - Y) = 0\,,$$

cioè che la differenza $y - Y$ è un integrale della corrispondente equazione omogenea. Pertanto, noto l'integrale generale di questa, la somma di esso con Y darà l'integrale generale della data.

In particolare, di ogni equazione differenziale di ciascuno dei tipi

$$y' + ay = f(x), \quad y'' + by' + ay = f(x) \tag{43}$$

con a, b costanti, sapremo scrivere l'espressione dell'integrale generale non appena si conosca *un* integrale particolare.

Per es., se $f(x)$ si riduce ad una costante A, ciascuna delle due proposte equazioni ammette per integrale particolare la costante $\frac{A}{a}$; pertanto si può asserire che gli integrali generali delle (43) sono rispettivamente:

$$y = \frac{A}{a} + Ce^{-ax}, \qquad y = \frac{A}{a} + C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}.$$

Tutte queste deduzioni sono valide anche per valori complessi dei coefficienti a, b, c delle equazioni e delle costanti arbitrarie contenute nelle funzioni integrali.

10. - Sistemi di equazioni differenziali. — Si presentano talvolta sistemi di equazioni differenziali contenenti più di una funzione incognita. Essi in generale consentono la determinazione di queste quando le equazioni del sistema sono tante quante le funzioni incognite stesse.

Particolarmente importante per le applicazioni è il caso dei sistemi di equazioni lineari. Se si tratta di due funzioni incognite y, z della variabile x, ad un tale sistema potrà darsi la forma:

$$\begin{cases} a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_ny + b_0z^{(m)} + b_1z^{(m-1)} + \ldots + b_mz = f(x) \\ a_0'y^{(n)} + a_1'y^{(n-1)} + \ldots + a_n'y + b_0'z^{(m)} + b_1'z^{(m-1)} + \ldots + b_m'z = \varphi(x) \end{cases} \tag{44}$$

di due equazioni entrambe di ordine n rispetto ad y ed m rispetto a z. Ove gli ordini non siano gli stessi per le due equazioni, basterà ovviamente supporre nulli alcuni dei primi coefficienti a o b.

Come precedentemente si dimostra che l'integrazione del sistema (44) si riconduce a quella del corrispondente sistema *omogeneo*:

$$\begin{cases} a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_ny + b_0z^{(m)} + b_1z^{(m-1)} + \ldots + b_mz = 0 \\ a_0'y^{(n)} + a_1'y^{(n-1)} + \ldots + a_n'y + b_0'z^{(m)} + b_1'z^{(m-1)} + \ldots + b_m'z = 0 \end{cases} \tag{44'}$$

non appena si conosca un integrale particolare Y, Z, e precisamente le più generali funzioni soddisfacenti a (44) si ottengono sommando ad Y, Z la più generale coppia soddisfacente a (44').

Quando i coefficienti a e b sono costanti, l'integrale generale del sistema (44') può esprimersi come somma di espressioni di tipo esponenziale $Ae^{\alpha x}$. Più precisamente, esistono in generale coppie di funzioni del tipo

$$y = Ae^{\alpha x}, \qquad z = Be^{\alpha x}$$

soddisfacenti le (44'), dove A e B indicano due costanti, delle quali una sola è arbitraria, perchè fra loro esiste un vincolo.

Infatti, sostituendo questi valori nelle (44′), si trova

$$(45)\qquad \begin{cases} A(a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots) + B(b_0\alpha^m + b_1\alpha^{m-1} + \ldots) = 0 \\ A(a'_0\alpha^n + a'_1\alpha^{n-1} + \ldots) + B(b'_0\alpha^m + b'_1\alpha^{m-1} + \ldots) = 0\,. \end{cases}$$

Confrontando i due valori di $\frac{A}{B}$ ricavati da queste, si deduce che α deve soddisfare all'equazione (algebrica) di grado $m + n$ (equazione *caratteristica*):

$$(a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots)(b'_0\alpha^m + b'_1\alpha^{m-1} + \ldots) = (a'_0\alpha^n + a'_1\alpha^{n-1} + \ldots)(b_0\alpha^m + b_1\alpha^{m-1} + \ldots)\,.$$

Per ognuna delle radici α_i $(i = 1, 2, \ldots, m + n)$ di questa, il rapporto $\frac{A}{B}$ deve assumersi uguale al valore risultante da una delle (45).

Se i coefficienti a e b sono reali, fra le radici α_i ve ne potranno essere delle coppie complesse (coniugate) $\alpha \pm j\beta$ ed ai corrispondenti termini dell'integrale generale potrà darsi l'aspetto reale sotto la forma

$$e^{\alpha x}(M \cos \beta x + N \operatorname{sen} \beta x)\,, \quad e^{\alpha x}(M' \cos \beta x + N' \operatorname{sen} \beta x)\,,$$

essendo le costanti M, N, M', N' opportunamente vincolate, secondo quanto sopra indicato.

Ad es., per il sistema

$$y' = az\,, \quad z' = by\,,$$

l'equazione caratteristica è

$$\alpha^2 = ab$$

con le radici $\alpha = \pm\sqrt{ab}$, quindi l'integrale generale è:

$$y = Ae^{\sqrt{ab}\,x} + Be^{-\sqrt{ab}\,x}, \qquad z = Ce^{\sqrt{ab}\,x} + De^{-\sqrt{ab}\,x},$$

dove le costanti C, D sono legate alle A, B dalle relazioni

$$C = A\sqrt{ab}\,, \qquad D = -B\sqrt{ab}$$

cui ovviamente si riducono le (45) nel caso attuale.

B) Vettori. - Operatori vettoriali. - Potenziale.

1. - Vettori e scalari. - Somma e prodotti di vettori. — Come è noto, un vettore $\vec{u}$ è un ente caratterizzato da una grandezza (o *modulo* o *tensore*), che indicheremo con u, oppure con $|\vec{u}|$ (numero positivo), e da una direzione ed un senso; e si chiama *versore* di $\vec{u}$ il vettore $\vec{v}$ avente modulo unitario, e direzione e senso coincidenti con quelli di $\vec{u}$. Per contrapposto alle grandezze vettoriali, si chiamano *scalari* le grandezze dotate di valore ed (eventualmente) senso, alla cui caratterizzazione si provvede con un numero preceduto da segno.

Come le grandezze scalari si possono rappresentare coi punti di una retta, riferiti ad uno di essi assunto come origine, così un vettore si può rappresentare con un segmento *orientato*, sempre sostituibile con uno ad esso uguale, parallelo ed equiverso.

Sono ben note le definizioni di vettori somma o differenza di due altri, e di vettore $\overrightarrow{mu}$ *multiplo* di $\vec{u}$ secondo il numero (positivo o negativo) m. In particolare, un vettore $\vec{u}$ può considerarsi multiplo, secondo il suo modulo $|\vec{u}|$, del suo versore $\vec{v}$; e questo può alla sua volta rappresentarsi con $\dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$.

Il vettore *nullo* è quello di grandezza nulla.

Due vettori si dicono *opposti* quando l'uno è il prodotto dell'altro per -1; tali due vettori hanno somma nulla.

Mediante l'ausilio di una terna di versori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ costituenti una terna ortogonale diretta (cioè tale che disposti $\vec{i}, \vec{j}$ secondo il pollice e l'indice della mano destra, si possa disporre $\vec{k}$ secondo il medio), si può porre ogni vettore $\vec{u}$ sotto la forma (cartesiana)

$$\vec{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k} ,$$

di somma cioè di tre vettori paralleli ad $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ rispettivamente, dove le grandezze scalari u_x, u_y, u_z sono le così dette coordinate (cartesiane, ortogonali) di $\vec{u}$ rispetto alla terna coordinata determinata dai vettori fondamentali $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. E si ha:

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} .$$

Dati due vettori $\vec{u}, \vec{v}$ si definisce il loro prodotto *scalare* o *interno*, che si indica con $\vec{u} \times \vec{v}$ (leggasi: $\vec{u}$ scalare $\vec{v}$) l'espressione scalare

$$\vec{u} \times \vec{v} = uv \cos \varphi ,$$

equivalente al prodotto dei loro moduli per il coseno dell'angolo convesso φ formato fra le loro direzioni orientate, ed il loro prodotto *vettoriale* o *esterno*, che è un vettore, da indicarsi con $\vec{u} \wedge \vec{v}$ (leggasi: $\vec{u}$ vettore $\vec{v}$), di modulo

$$uv \operatorname{sen} \varphi ,$$

di direzione normale ad $\vec{u}$ e a $\vec{v}$, e di senso tale che la terna $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}$, *in quest'ordine*, sia diretta.

Questi prodotti godono entrambi della proprietà distributiva rispetto alla somma, si ha cioè:

$$(\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \dots) \times (\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots) = \vec{u}_1 \times \vec{v}_1 + \vec{u}_1 \times \vec{v}_2 + \dots + \vec{u}_2 \times \vec{v}_1 + \vec{u}_2 \times \vec{v}_2 + \dots$$

$$(\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \dots) \wedge (\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots) = \vec{u}_1 \wedge \vec{v}_1 + \vec{u}_1 \wedge \vec{v}_2 + \dots + \vec{u}_2 \wedge \vec{v}_1 + \vec{u}_2 \wedge \vec{v}_2 + \dots$$

Il primo gode inoltre della proprietà commutativa

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{v} \times \vec{u} ,$$

mentre il secondo muta senso (cioè segno) scambiando i fattori:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u} ;$$

entrambi si annullano se è nullo uno dei fattori, ma non soltanto in questo caso, perchè $\vec{u} \times \vec{v}$ è nullo anche quando $\vec{u}, \vec{v}$ sono perpendicolari, ed $\vec{u} \wedge \vec{v}$ per $\vec{u}, \vec{v}$ paralleli.

Per i versori coordinati $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ si ha

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 1\,, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{k} \times \vec{i} = \vec{i} \times \vec{j} = 0\,;$$

$$\vec{j} \wedge \vec{k} = -\vec{k} \wedge \vec{j} = i\,, \quad \vec{k} \wedge \vec{i} = -\vec{i} \wedge \vec{k} = \vec{j}\,, \quad \vec{i} \wedge \vec{j} = -\vec{j} \wedge \vec{i} = \vec{k}\,.$$

Da ciò segue che, essendo

$$\vec{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}\,, \qquad \vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

le rappresentazioni cartesiane dei due vettori $\vec{u}$, $\vec{v}$, si ha:

$$\vec{u} \times \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z\,,$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (u_y v_z - u_z v_y)\vec{i} + (u_z v_x - u_x v_z)\vec{j} + (u_x v_y - u_y v_x)\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}.$$

In particolare si possono dare le espressioni delle componenti u_x, u_y, u_z sotto forma di prodotti scalari, al modo seguente:

$$u_x = \vec{u} \times \vec{i}\,, \qquad u_y = \vec{u} \times \vec{j}\,, \qquad u_z = \vec{u} \times \vec{k}\,.$$

Sia in modo diretto, sia valendosi delle rappresentazioni cartesiane, si dimostra facilmente la seguente formola:

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = -\vec{w} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{u} \times \vec{w} \cdot \vec{v} - \vec{v} \times \vec{w} \cdot \vec{u}\,.$$

Per una terna di vettori $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ si può anche considerare il così detto *prodotto misto* $\vec{u} \times (\vec{v} \wedge \vec{w})$, nella cui notazione si possono senza ambiguità sopprimere le parentesi, e si verifica che è

$$\vec{u} \times \vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix},$$

la quale espressione non muta permutando ciclicamente i tre fattori, mentre muta segno scambiandone due:

$$\vec{u} \times \vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{v} \times \vec{w} \wedge \vec{u} = \vec{w} \times \vec{u} \wedge \vec{v} =$$
$$= -\vec{u} \times \vec{w} \wedge \vec{v} = -\vec{w} \times \vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{v} \times \vec{u} \wedge \vec{w}\,.$$

Se $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ si rappresentano con tre segmenti spiccati da un punto O, il prodotto misto misura il volume del parallelepipedo avente per spigoli quei tre segmenti, preceduto dal segno + o — secondo che la terna $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, in questo ordine, è diretta oppure no. E pertanto l'annullamento di $\vec{u} \times \vec{v} \wedge \vec{w}$ è condizione necessaria e sufficiente affinchè i tre vettori $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ siano paralleli a un piano o, come si dice brevemente, complanari.

2. - Vettori e scalari funzioni di punto. - Flusso. - Circuitazione. — Nelle applicazioni alla Geometria e alla Fisica matematica hanno particolare interesse i vettori e gli scalari funzioni di un punto variabile entro un campo continuo a tre dimensioni. Quando si dice che uno scalare $\varphi(P)$ od un vettore $\vec{u}(P)$ sono funzioni di P non si vuole dir altro se non che lo scalare φ e quegli scalari (ad es. le coordinate di $\vec{u}$) che caratterizzano $\vec{u}$ sono funzioni dei numeri con i quali si

può identificare P (tali sono ad es. le coordinate di P rispetto ad un sistema qualunque di riferimento).

Per semplificare le scritture relative a tali enti, conviene richiamare che, se P, P' sono due punti dello spazio, il vettore rappresentato dal segmento che ha P per origine e P' per termine si suole rappresentare col simbolo di « differenza » $P' - P$ fra i due punti, in quanto si può dimostrare che tale formazione gode delle essenziali proprietà formali della differenza algebrica. Naturalmente, se Q, Q' sono due altri punti tali che P, Q'; P', Q siano vertici opposti di un parallelogrammo, il vettore $Q' - Q$ non differisce da $P' - P$ (fig. 436). Posto $P' - P = \vec{u}$, il punto P' può rappresentarsi come « somma » del punto P col vettore $\vec{u}$.

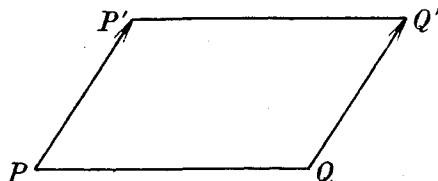



Fig. 436

Se P' tende a P lungo una certa curva (i cui punti si potranno associare ai valori di una variabile indipendente t), il vettore infinitesimo $P' - P$ avrà una parte principale (in generale infinitesima di primo ordine rispetto a dt) che si indicherà con dP e si chiamerà *un* differenziale del punto P. Ovviamente, i differenziali del punto P sono infiniti, anzi tal nome può sostanzialmente darsi, a meno di un fattore numerico infinitesimo, ad un vettore arbitrario. Si osservi che, se dP, $d'P$, $d''P$ indicano tre differenziali distinti (cioè a due a due non paralleli), i vettori come $dP \wedge d'P$ sono da considerarsi come vettori arbitrari, la quantità (scalare) $dP \times d'P \wedge d''P$ come un numero arbitrario (¹) (diverso da zero se dP, $d'P$, $d''P$ non sono complanari).

Il differenziale generico $d\varphi$ di uno scalare φ è la parte principale di primo ordine (eventualmente nulla) dell'infinitesimo $\varphi(P + dP) - \varphi(P)$, dove dP è un differenziale arbitrario di P; esso cioè, a meno di infinitesimi superiori rispetto alla distanza $|dP|$ tra i punti P e $P + dP$, corrisponde alla differenza fra i valori che φ assume nei punti $P + dP$ e P. Chiameremo $d'\varphi, d''\varphi, \ldots$ gli analoghi differenziali calcolati con riferimento ai differenziali $d'P$, $d''P, \ldots$ del punto P.

E così, nel caso di un vettore $\vec{u}(P)$, vi saranno da considerare dei vettori come $d\vec{u}(P)$, $d'\vec{u}(P), \ldots$

L'esistenza dei differenziali è subordinata a talune condizioni qualitative per gli enti (scalari) che definiscono la funzione di punto considerata. Supporremo sempre che tali condizioni siano verificate, e precisamente che codeste funzioni siano continue insieme alle loro derivate fino a quelle dell'ordine che ci occorrerà di considerare; e ciò brevemente esprimeremo dicendo che i vettori e gli scalari stessi sono *regolari*.

Si chiama *linea di flusso* (²) (o semplicemente *linea*) di un vettore $u(\vec{P})$ ogni linea dotata della proprietà che in ogni suo punto P la direzione della tangente

(¹) Qui e nel seguito, la parola « numero » sta ad indicare « grandezza scalare » in contrapposto a « grandezza vettoriale », o « vettore ».

(²) Tale denominazione si giustifica pensando, in via d'immagine, che il vettore $\vec{u}(P)$ rappresenti l'atto di moto di un fluido in regime permanente, cioè $\vec{u}(P)$ corrisponda alla velocità di cui è dotata la particella occupante la posizione P. Le linee del

coincide con quella del vettore $\vec{u}(P)$. Se dP è differenziale del punto P computato lungo una tale linea, si avrà dunque:

$$dP \wedge \vec{u}(P) = 0 ;$$

si può così dire che questa è l'equazione differenziale che definisce le linee di $\vec{u}(P)$. Tali linee in generale costituiscono una doppia infinità, talchè per ogni punto del campo di esistenza di $\vec{u}$ ne passa una (e generalmente una sola). Si noti che le linee di $\vec{u}$ sono da considerarsi dotate di un senso (concorde con quello di $\vec{u}$).

Sia dS un'area infinitesima (e quindi piana) *orientata*, cioè da considerarsi in relazione ad un senso ben determinato fissato sulla direzione ad essa normale; ciò equivale a dire che ad essa intendiamo associato un ben determinato vettore di cui dS è il modulo, mentre la direzione ed il senso saranno definiti da un versore $\vec{n}$ diretto normalmente all'areola. Tale area, considerata vettorialmente, sarà completamente rappresentata mediante il prodotto $\vec{n}dS$. Qualora l'area stessa possa pensarsi delimitata da un parallelogrammo determinato dai segmenti dP, $d'P$ spiccati da un punto P, la sua rappresentazione vettoriale sarà $dP \wedge d'P$ o $d'P \wedge dP$ a seconda dell'orientazione scelta.

Si chiama *flusso* del vettore $\vec{u}(P)$ attraverso l'areola dS il prodotto scalare $\vec{u} \times \vec{n}dS$ (1). E per flusso di $\vec{u}(P)$ attraverso una delle due « pagine » di una superficie finita (2), s'intende l'integrale di quel prodotto scalare esteso alla superficie stessa, essendo il senso di $\vec{n}$ assunto in relazione alla pagina scelta. Se la superficie è chiusa, come quella di una sfera (od altra da questa deducibile con deformazione continua), le due pagine si potranno identificare dichiarando se si tratta di quella esterna od interna rispetto al volume racchiuso dalla superficie stessa, ed il corrispondente flusso di $\vec{u}(P)$ si chiamerà allora *uscente* dal volume predetto, rispettivamente in esso *entrante*. Manifestamente tali due flussi sono misurati da due numeri contrari.

Se il volume di cui si tratta è quello del parallelepipedo determinato dai tre vettori infinitesimi dP, $d'P$, $d''P$ spiccati da P e costituenti una terna diretta ($dP \times d'P \wedge d''P > 0$), si vede subito che il flusso uscente da esso vale

$$d\vec{u} \times d'P \wedge d''P + d'\vec{u} \times d''P \wedge dP + d''\vec{u} \times dP \wedge d'P \tag{1}$$

perchè $-\vec{u} \times d'P \wedge d''P$ e $(\vec{u} + d\vec{u}) \times d'P \wedge d''P$, la cui somma forma il primo termine dell'espressione scritta, misurano il flusso uscente dalla faccia che passa per P ed ha per spigoli $d'P$, $d''P$ e quello uscente dalla faccia opposta, e analogamente le altre due coppie di facce danno luogo agli altri due termini.

Si chiama *circuitazione* o *circolazione* di $\vec{u}$ lungo il segmento infinitesimo (vettorialmente considerato) dP spiccato da P, il prodotto scalare

$$\vec{u}(P) \times dP$$

---

vettore $\vec{u}(P)$ vengono allora a corrispondere ovviamente alle traiettorie delle singole particelle, cioè sono le linee lungo le quali si verifica il « flusso ».

(1) Secondo l'immagine cinematica di cui alla nota prec., tale flusso corrisponde alla « portata » di fluido che passa attraverso l'areola dS.

(2) Si suppone qui tacitamente che le due pagine siano distinguibili.

dove $\vec{u}(P)$ è il valore del vettore calcolato in P(1). E l'integrale di questa espressione lungo una curva $\mathfrak{L}$ percorsa in un certo senso, della quale dP sia l'elemento lineare generico (orientato in relazione al senso stesso), misura la circolazione del vettore lungo la curva o cammino $\mathfrak{L}$. Invertendo il senso di percorso, la circolazione muta segno.

Per una curva chiusa che sia contorno di una superficie (aperta), il senso di percorso della curva determina una pagina della superficie stessa, convenendo ad es. di associare ad ognuno dei due sensi quella delle due pagine che si trova dalla parte di un osservatore per il quale il senso di percorso è l'antiorario.

Così se si tratta del parallelogrammo infinitesimo determinato da dP, $d'P$ (fig. 437), alla circolazione nel senso indicato dalla freccia corrisponde quella pagina del parallelogrammo che è visibile dal lettore, cioè da un osservatore disposto coi piedi in P e personificante il vettore $dP \wedge d'P$.

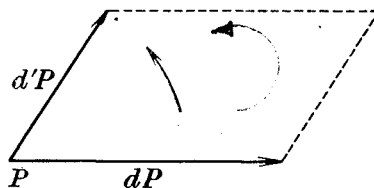



Fig. 437

La circolazione di un vettore $\vec{u}$ lungo tale parallelogrammo è misurata da

$$d\vec{u} \times d'P - d'\vec{u} \times dP\,, \tag{2}$$

come agevolmente si riconosce con un ragionamento analogo a quello dianzi fatto a proposito del flusso.

3. - Gli operatori differenziali grad, div, rot. - Teoremi della divergenza e della circuitazione. — Ciò premesso, si dimostra che, dato uno scalare regolare φ, esiste un unico vettore, che si indica con $\operatorname{grad}\varphi$ (*gradiente* di φ) soddisfacente alla relazione

$$\operatorname{grad}\varphi \times dP = d\varphi\,, \tag{3}$$

dove dP rappresenta un differenziale qualunque del punto generico P.

L'esistenza e l'unicità di tale vettore si verifica tosto osservando che se dx, dy, dz sono le componenti (cartesiane) di dP e u_x, u_y, u_z quelle di $\operatorname{grad}\varphi$, la precedente equivale a

$$u_x\,dx + u_y\,dy + u_z\,dz = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,dz\,,$$

alla quale, per l'arbitrarietà di dx, dy, dz, si soddisfa assumendo

$$u_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,, \qquad u_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,, \qquad u_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,,$$

cioè:

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,\vec{k}\,, \tag{4}$$

e soltanto in questo modo.

(1) Se $\vec{u}(P)$ rappresenta una forza applicata al punto P, la circuitazione elementare considerata corrisponde al lavoro della forza stessa relativo allo spostamento dP del suo punto d'applicazione.

Nella (3) si legge che grad φ è tale che la sua proiezione (o componente) su una direzione qualunque vale la derivata della funzione $\varphi(P)$ in quella direzione. Siccome il modulo di un vettore coincide con quello della sua massima componente, e dalla (4) si deduce che la direzione di grad φ è quella i cui coseni direttori sono proporzionali a $\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}$, si conclude che il modulo di grad φ in un punto generico coincide con la derivata di φ nella direzione predetta, la quale notoriamente coincide con quella della normale alla superficie $\varphi =$ cost. passante per quel punto.

Il gradiente di uno scalare φ riassume dunque, in modo particolarmente espressivo, tutto l'insieme delle infinite derivate (direzionali) di φ. In particolare, si ha che il suo annullamento in tutto uno spazio τ è necessario e sufficiente affinchè φ sia costante entro τ.

Per un vettore $\vec{u}(P)$ giova considerare due importanti formazioni differenziali strettamente legate alla nozione di flusso e di circolazione.

Alla prima si perviene considerando che il flusso di $\vec{u}(P)$ uscente da un volume infinitesimo circostante un punto P è una quantità (scalare) infinitesima dello stesso ordine del volume stesso ed il valore del suo rapporto a tale volume è funzione soltanto di P (1). Tale rapporto si denomina *divergenza di* $\vec{u}(P)$ e si indica col simbolo div $\vec{u}(P)$ (2). Per quanto precede, esso può definirsi con l'ausilio di tre differenziali arbitrari dP, $d'P$, $d''P$ del punto P mediante l'uguaglianza:

$$(5)\quad d\vec{u} \times d'P \wedge d''P + d'u \times d''P \wedge dP + d''u \times dP \wedge d'P = \operatorname{div} \vec{u} \cdot dP \times d'P \wedge d''P.$$

L'esistenza e l'unicità dell'ente div $\vec{u}$ si dimostrano in modo analogo al precedente. Per l'esistenza, basta osservare che, posto ad es.

$$dP = \vec{i}\, dx\,, \quad d'P = \vec{j}\, dy\,, \quad d''P = \vec{k}\, dz\,,$$

la precedente fornisce senz'altro la espressione cartesiana della divergenza sotto la forma:

$$(6)\qquad \operatorname{div} \vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\,,$$

e, quanto all'unicità, si noti che se esistessero due numeri soddisfacenti alla (5), la loro differenza dovrebbe, moltiplicata per $dP \wedge d'P \times d''P$, che in sostanza è un numero arbitrario, dare prodotto nullo.

Se si integrano ambo i membri di (5) ad un volume τ racchiuso da una superficie S, di cui $\vec{n}$ rappresenta il versore della normale nel punto generico, rivolta verso l'esterno di τ, si ottiene l'espressione del così detto *teorema della divergenza*:

$$(7)\qquad \int_\tau \operatorname{div} \vec{u}\, d\tau = \int_S \vec{u} \times \vec{n} \cdot dS\,,$$

(1) È sottinteso che tale flusso e tale volume sono valutati a meno di infinitesimi d'ordine superiore rispetto alle dimensioni lineari del volume (altrimenti si dovrebbe parlare di limite del rapporto indicato).

(2) Anche questa denominazione trae la sua origine dall'immagine cinematica indicata nella nota a pag. 731, in quanto che ovviamente il flusso uscente dal volume elementare considerato misura la portata che sorge o «diverge» (rispettivamente viene assorbita, qualora negativa) dal volume stesso.

la cui verifica risulta ovvia se si pensa che i contributi che alla somma dei primi membri delle (5) apporta ogni parete divisoria di due cellule infinitesime contigue sono contrari per cui, in definitiva, non rimangono che i termini relativi agli elementi della superficie S.

Per la circolazione di un vettore $\vec{u}(P)$, si può verificare che il suo valore relativo ad un contorno chiuso infinitesimo, è infinitesimo dell'ordine dell'area delimitata dal contorno stesso, ed il suo rapporto [1] a tale area corrisponde alla proiezione, secondo la normale all'area stessa, di un ben determinato vettore, che si chiama *rotore* o *rotazionale* di $\vec{u}$ e si indica con $\operatorname{rot}\vec{u}$ [2]. Tale vettore può pertanto definirsi mediante due differenziali arbitrari dP, $d'P$ del punto P secondo l'uguaglianza

$$\operatorname{rot}\vec{u} \times dP \wedge d'P = d\vec{u} \times d'P - d'\vec{u} \times dP\,. \tag{8}$$

Al solito modo si verifica l'esistenza e l'unicità di $\operatorname{rot}\vec{u}$, la cui espressione cartesiana

$$\operatorname{rot}\vec{u} = \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\vec{k} \tag{9}$$

può dedursi agevolmente dalla stessa formola di definizione (8). Alla (9) si può dare anche l'aspetto:

$$\operatorname{rot}\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Integrando la (8) ad una superficie aperta S avente per contorno una linea chiusa $\mathfrak{L}$, si ottiene l'espressione del *teorema di Stokes*:

$$\int_{\mathfrak{L}} \vec{u} \times dP = \int_S \operatorname{rot}\vec{u} \times \vec{n} \cdot dS\,, \tag{11}$$

la cui dimostrazione segue analogamente a quella della (7).

Esso esprime che la circolazione di $\vec{u}$ lungo una curva chiusa $\mathfrak{L}$ equivale al flusso di $\operatorname{rot}\vec{u}$ attraverso una superficie aperta S avente $\mathfrak{L}$ per contorno (essendo la normale $\vec{n}$ ad S orientata come indicato alla fine del n. prec. in relazione al senso di percorso di $\mathfrak{L}$), dal che segue che la circolazione predetta è nulla ogni qual volta la linea $\mathfrak{L}$ può essere assunta come contorno di una superficie S sui cui punti sia $\operatorname{rot}\vec{u} = 0$. In particolare, se $\operatorname{rot}\vec{u}$ è nullo nell'intero spazio, è nulla la circuitazione di $\vec{u}$ lungo *ogni* curva chiusa, e quindi la circuitazione stessa, calcolata fra due punti A e B per un cammino qualsivoglia, dipende solo dagli estremi A e B e non dal cammino scelto.

---

[1] Anche qui deve farsi osservazione analoga a quella della nota [1] di pag. prec.

[2] Anche questa denominazione è inspirata alla immagine cinematica già indicata (nota a pag. 731) e precisamente si ha che, se si considera un intorno del punto generico P, dall'atto di moto definito dal vettore $\vec{u}$ (valutato, per i punti vicini a P, a meno di infinitesimi d'ordine superiore rispetto ai dP), si può in un sol modo separare una parte «rigida», ed il vettore della corrispondente velocità angolare coincide con $2\operatorname{rot}\vec{u}$, calcolato in P.

Per il fatto che il valore del primo membro non muta sostituendo ad S un'altra superficie avente lo stesso contorno $\mathcal{L}$, si ha che il flusso di $\mathrm{rot}\,\vec{u}$ attraverso due tali superficie, considerato uscente dal (o entrante nel) volume fra di esse racchiuso, è nullo. Da ciò, per la (7), si conclude che il vettore $\mathrm{rot}\,\vec{u}$ ha divergenza nulla. Sussiste dunque la identità

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{u} = 0 ,$$

che del resto si può agevolmente verificare per via analitica ricorrendo alle espressioni cartesiane (6) e (10) di $\mathrm{div}\,\vec{u}$ e di $\mathrm{rot}\,\vec{u}$, e ricordando il teorema sull'inversione delle derivazioni.

Dalla definizione di $\mathrm{grad}\,\varphi$ segue che la circuitazione di tale vettore lungo una linea che congiunge un punto O con un punto P vale $\varphi(P) - \varphi(O)$, cioè non dipende che dagli estremi. Da ciò si deduce che la stessa circuitazione, calcolata per una qualunque curva chiusa, è nulla, quindi, in virtù della (11), il vettore $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\varphi$ ha nullo il flusso attraverso *qualunque* superficie aperta. Ciò ovviamente significa che esso stesso è nullo, vale a dire che sussiste l'identità

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\varphi = 0 ,$$

anch'essa analiticamente verificabile ricorrendo alle (4), (9).

Si ha dunque che, quando un vettore è gradiente di uno scalare, cioè è, come si suol dire, *lamellare*, il suo rot è nullo; pertanto, per un vettore $\vec{u}$ qualunque, il $\mathrm{rot}\,\vec{u}$ fornisce in certo qual modo una valutazione quantitativa dello scostamento della lamellarità (1).

Analogamente, un vettore $\vec{u}$ che sia il rot di un (altro) vettore $\vec{v}$, ha certamente nulla la divergenza, cioè, come si dice, è *solenoidale*. E, nel caso generale, la $\mathrm{div}\,\vec{u}$ dà una misura dello scostamento della solenoidalità di $\vec{u}$ (2).

---

(1) Più precisamente, poichè per un vettore non lamellare è diversa da zero la circuitazione γ lungo una curva chiusa, per la valutazione di cui si tratta, relativa ad un punto generico P, viene spontaneo considerare il valore di γ per una curva chiusa infinitesima attorno a P, o meglio quello della « densità superficiale » di tale γ, cioè del rapporto di γ all'areola σ (infinitesima, e quindi piana) limitata dalla curva stessa. Tale densità dipende, oltre che dal punto P, anche dall'orientazione dell'areola σ, cioè dal versore $\vec{n}$ della normale a σ. Orbene, il vettore $\mathrm{rot}\,\vec{u}$ consente l'apprezzamento simultaneo di tutte le densità relative alle infinite orientazioni $\vec{n}$, in quanto la densità relativa ad $\vec{n}$ non è che la proiezione di $\mathrm{rot}\,\vec{u}$ sulla direzione $\vec{n}$. Si può dire che il vettore $\mathrm{rot}\,\vec{u}$ compendia le infinite γ allo stesso modo come $\mathrm{grad}\,\varphi$ compendia le infinite derivate direzionali di una funzione scalare φ.

La qualifica di « lamellare » per un vettore che sia il gradiente di uno scalare φ dipende da ciò, che le superfici $\varphi = \mathrm{cost.}$ dividono lo spazio in « lamine », ed è poi istruttivo osservare che tali lamine consentono una suggestiva rappresentazione del vettore. Invero, la direzione di $\mathrm{grad}\,\varphi$ è normale in ogni punto P alla superficie $\varphi = \mathrm{cost.}$ passante per esso ed il senso è quello secondo cui φ cresce; per valutarne poi il modulo, basta pensare tracciate le successive superfici $\varphi = \mathrm{cost.}$ in corrispondenza a valori della costante successivamente differenti di una (arbitraria) unità, e « contare » quante di tali superfici sono incontrate da un segmento PU di lunghezza unitaria disposto normalmente alle superfici stesse.

(2) La qualifica di « solenoidale » (dal greco σωλήν = tubo) per un siffatto vettore deriva dal fatto che è costante il flusso che attraversa ogni sezione trasversale di un suo « tubo di flusso » (luogo delle linee del vettore passanti per i punti di una linea chiusa che non sia linea del vettore), come subito si riconosce valutando il flusso totale uscente

Inversamente, se un vettore $\vec{u}$, che per semplicità supporremo esistente in tutto lo spazio, soddisfa alla condizione $\text{rot}\,\vec{u} = 0$, esiste sempre una funzione scalare φ soddisfacente ad

$$\vec{u} = \text{grad}\,\varphi\,. \tag{12}$$

Tale invero è la funzione $\varphi(P) = \int_O^P \vec{u} \times dP$ (O punto fisso arbitrario), dove il secondo membro, in virtù di una precedente osservazione, può essere calcolato seguendo un qualunque cammino congiungente O con P. Qualunque altra funzione soddisfacente alla (12) si ottiene aggiungendo ad una di esse una costante arbitraria (il che equivale a mutare il punto O). Alla funzione $-\varphi$ si dà il nome di *potenziale* del vettore lamellare $\vec{u}$. Naturalmente, soltanto i vettori lamellari *ammettono un potenziale.*

Si vedrà poi (vedi nota a pag. 742) che, se un vettore $\vec{u}$ esistente in tutto lo spazio ha nulla la divergenza, cioè è solenoidale, esistono infiniti vettori di cui esso è il rot. Fra questi ve ne è uno $\vec{v}$ a divergenza nulla, determinato a meno di un vettore additivo costante arbitrario, ed al suo opposto si dà il nome di *potenziale vettore* di $\vec{u}$, per modo che si ha

$$\vec{u} = -\text{rot}\,\vec{v} \quad \text{con} \quad \text{div}\,\vec{v} = 0\,.$$

4. - Proprietà degli operatori grad, div, rot. - Il vettore $P-O$. — Dalle formole di definizione (3), (5), (8), si deducono facilmente le seguenti proprietà degli operatori grad, div, rot:

$$\text{grad}\,f(\varphi, \psi, \ldots) = \frac{\partial f}{\partial \varphi}\,\text{grad}\,\varphi + \frac{\partial f}{\partial \psi}\,\text{grad}\,\psi + \ldots \tag{13}$$

$$\text{div}\,\vec{u}(\varphi, \psi, \ldots) = \text{grad}\,\varphi \times \frac{\partial \vec{u}}{\partial \varphi} + \text{grad}\,\psi \times \frac{\partial \vec{u}}{\partial \psi} + \ldots \tag{14}$$

$$\text{rot}\,\vec{u}(\varphi, \psi, \ldots) = \text{grad}\,\varphi \wedge \frac{\partial \vec{u}}{\partial \varphi} + \text{grad}\,\psi \wedge \frac{\partial \vec{u}}{\partial \psi} + \ldots \tag{15}$$

$$\text{grad}\,(\varphi\psi) = \psi\,\text{grad}\,\varphi + \varphi\,\text{grad}\,\psi\,, \tag{16}$$

$$\text{div}\,(\varphi\vec{u}) = \varphi\,\text{div}\,\vec{u} + \vec{u} \times \text{grad}\,\varphi\,, \tag{17}$$

$$\text{rot}\,(\varphi\vec{u}) = \varphi\,\text{rot}\,\vec{u} + \vec{u} \wedge \text{grad}\,\varphi\,, \tag{18}$$

$$\text{div}\,(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{v} \times \text{rot}\,\vec{u} - \vec{u} \times \text{rot}\,\vec{v}\,, \tag{19}$$

---

da un qualsiasi tronco di tale tubo, dopo aver osservato che è nullo il flusso uscente dalla superficie laterale.

Se si immagina lo spazio diviso in tubi di flusso unitario, e si sostituisce ognuno di questi con una linea (ad es. l' « asse » del tubo), necessariamente orientata, la direzione e il senso del vettore $\vec{u}(P)$ coincidono con quelli della linea passante per P, ed il modulo corrisponde al numero di tali linee che attraversano un'area unitaria normale alla direzione del vettore in P. È questa la così detta *rappresentazione di Faraday*.

Le linee di un vettore, in generale, non possono avere inizio o termine se non nei punti in cui la divergenza è diversa da zero; da ciò segue che se in una certa regione il vettore è solenoidale, le sue linee o sono chiuse oppure hanno inizio e termine in punti della superficie limitante la regione stessa.

dove φ, ψ... sono funzioni scalari, $\vec{u}$, $\vec{v}$ vettori, $f(\varphi, \psi, \ldots)$ è simbolo di una funzione scalare di φ, ψ,... e $\vec{u}(\varphi, \psi, \ldots)$ simbolo di vettore funzione degli scalari φ, ψ,....

Si può verificare anche che, usando coordinate cartesiane ortogonali, lo scalare div grad φ ed il vettore grad div $\vec{u}$ — rot rot $\vec{u}$ non sono altro che la somma delle derivate seconde di φ, rispettivamente $\vec{u}$, rispetto alle coordinate, cioè

$$\text{(20)} \qquad \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \Delta\varphi \,,$$

$$\text{(21)} \qquad \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{u} = \Delta\vec{u} \,,$$

dove per brevità si è posto

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \,,$$

cioè

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \,, \qquad \Delta\vec{u} = \frac{\partial^2\vec{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vec{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\vec{u}}{\partial z^2} \text{ (1)}.$$

Nelle applicazioni ricorre spesso lo scalare r, distanza fra due punti O e P, equivalente al modulo del vettore $P - O$.

Intendendo grad calcolato rispetto a P, il vettore grad r è diretto normalmente alla superficie sferica di centro O passante per P, cioè parallelamente a $P - O$, ed il suo modulo, equivalendo alla derivata di r in tale direzione, è unitario; onde si ha

$$r \operatorname{grad} r = P - O \,, \qquad \text{cioè} \qquad \operatorname{grad} r = \frac{P - O}{r} \,.$$

Si ha poi, intendendo anche la div calcolata rispetto a P:

$$\operatorname{div}(P - O) = 3 \text{ (2)} \,,$$

e quindi, applicando (13), (14):

$$\text{(22)} \qquad \operatorname{div}\operatorname{grad} r = \frac{2}{r} \,, \quad \operatorname{grad}\frac{1}{r} = -\frac{P-O}{r^3} \,, \quad \operatorname{div}\operatorname{grad}\frac{1}{r} = -\operatorname{div}\frac{P-O}{r^3} =$$

$$= -\frac{1}{r^3}\operatorname{div}(P - O) + \frac{3}{r^4}(P - O) \times \operatorname{grad} r = -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^3} = 0 \,.$$

---

(1) È necessario rilevare che le (20), (21) rappresentano delle identità soltanto se ci si riferisce a coordinate cartesiane ortogonali, perchè soltanto in questo caso avviene che la div grad φ, rispettivamente il grad div $\vec{u}$ — rot rot $\vec{u}$ equivalgono alla somma delle derivate seconde.

Se ad es. si usassero coordinate cilindriche r, α, z legate alle cartesiane x, y, z_1 da

$$x = r\cos\alpha \,, \qquad y = r \operatorname{sen}\alpha \,, \qquad z_1 = z \,,$$

si avrebbe

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \,.$$

(2) Infatti, dette x, y, z; x', y', z' le coordinate cartesiane di P e di O, si ha $P - O = (x - x')\vec{i} + (y - y')\vec{j} + (z - z')\vec{k}$, da cui segue subito la formola del testo.

Osserviamo poi che i valori di grad r, div$(P - O)$ rispetto ad O sono gli opposti di quelli rispetto a P, cioè si ha:

$$\operatorname{grad}_P r = -\operatorname{grad}_O r\,, \qquad \operatorname{div}_P (P - O) = -\operatorname{div}_O (P - O)\,.$$

5\. - **Potenziali ordinari.** — Se di una funzione φ sono dati i valori alla superficie S limitante lo spazio τ di sua esistenza, essa risulta determinata non appena sia noto in ogni punto di τ il valore di div grad φ. Riferendoci a coordinate cartesiane ortogonali x, y, z, ciò equivale a dire che l'equazione (alle derivate parziali)

$$\Delta\varphi = -\varrho\,, \tag{23}$$

dove ϱ è una funzione data dai punti dello spazio τ, ammette una sola soluzione che assume dati valori su S. Invero, se ne esistessero due, la loro differenza Φ soddisferebbe a

$$\Delta\Phi = 0$$

e sarebbe nulla su S. Allora, partendo da

$$\int_\tau \operatorname{div}(\Phi \operatorname{grad} \Phi)\, d\tau = \int_S \operatorname{grad} \Phi \times \vec{n}\, dS\,, \tag{24}$$

e ricordando (formola (17)) che è $\operatorname{div}(\Phi \operatorname{grad}\Phi) = \Phi\Delta\Phi + \operatorname{grad}\Phi \times \operatorname{grad}\Phi$, seguirebbe

$$\int_\tau \operatorname{grad}\Phi \times \operatorname{grad}\Phi d\tau = 0\,. \tag{25}$$

Ora, siccome l'integrando grad $\Phi \times$ grad Φ non può essere negativo, sarà dovunque grad $\Phi = 0$, cioè Φ ha un valore costante, e questo non può differire da zero perchè tale è su S.

In vista delle applicazioni all'Elettrotecnica e all'Elettromagnetismo, ci occuperemo qui del caso in cui τ è l'intero spazio, e sulla superficie S, cioè nei punti all'infinito, la funzione φ ha valore nullo [1] mentre la div grad φ, cioè la funzione ϱ, è nulla all'esterno di una sfera di raggio opportunamente grande. La effettiva determinazione di φ può allora farsi come segue.

Applicando la (7) al vettore $\vec{u} = \varphi \operatorname{grad} \psi - \psi \operatorname{grad} \varphi$ e tenendo presente la (17), si ottiene

$$\int_\tau (\varphi \operatorname{div}\operatorname{grad}\psi - \psi \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi)\, d\tau + \int_S (\varphi \operatorname{grad}\psi - \psi \operatorname{grad}\varphi) \times \vec{n} dS = 0\,,$$

dove $\vec{n}$ indica il versore parallelo alla normale interna. Sia O un punto esterno allo spazio τ, il cui punto generico indichiamo con P; e poniamo nella precedente $\psi = \frac{1}{r} = \frac{1}{|P-O|}$. A causa di (22), essa si riduce a

$$\int_\tau \frac{\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi}{r}\, d\tau = \int_S \left(\varphi \operatorname{grad}\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\operatorname{grad}\varphi\right) \times \vec{n} \cdot dS\,.$$

[1] Per la validità degli sviluppi seguenti, occorre veramente porre qualche condizione restrittiva sul comportamento di φ all'infinito. Non insisteremo su tali questioni di dettaglio pel fatto che, nei casi pratici, tali condizioni sono sempre soddisfatte.

Se O è interno a τ, lo si isoli con una sferetta il cui raggio ε si farà tendere a zero, e della quale indicheremo con τ_1 il volume e con S_1 la superficie. Alla precedente si sostituirà la

$$\int_{\tau-\tau_1} \frac{\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi}{r}\,d\tau = \int_S \left(\varphi \operatorname{grad}\frac{1}{r} - \frac{\operatorname{grad}\varphi}{r}\right) \times \vec{n}\cdot dS +$$
$$+ \int_{S_1} \left(\varphi \operatorname{grad}\frac{1}{r} - \frac{\operatorname{grad}\varphi}{r}\right) \times \vec{n}_1 dS_1 \,,$$

dove $\vec{n}_1$ è vettore unitario normale ad S_1 diretto verso l'interno di $\tau - \tau_1$, cioè verso l'*esterno* di τ_1, quindi $\vec{n}_1 = \operatorname{grad} r$.

Ora si osservi che agli elementi superficiali dS_1 e di volume $d\tau_1$ della sferetta si può dare rispettivamente l'aspetto

$$dS_1 = \varepsilon^2 d\omega \,, \quad d\tau_1 = r^2 dr d\omega \,,$$

essendo $d\omega$ l'angolo solido secondo cui dS_1 è visto dal punto O. Con tali posizioni, si riconosce subito che, tendendo ε a zero, si ha:

$$\lim \int_{\tau_1} \frac{\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi}{r}\,d\tau_1 = \lim \int_{\tau_1} r \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi\, dr d\omega = 0 \,,$$

$$\lim \int_{S_1} \frac{1}{r}\operatorname{grad}\varphi \times \vec{n}_1 dS_1 = \lim \int_{S_1} r \operatorname{grad}\varphi \times \vec{n} d\omega = 0 \,,$$

$$\lim \int_{S_1} \varphi \operatorname{grad}\frac{1}{r} \times \vec{n}_1 dS_1 = -\lim \int_{S_1} \frac{\varphi}{\varepsilon^2}\operatorname{grad} r \times \vec{n}_1 dS_1 =$$

$$= -\lim \int_{S_1} \frac{\varphi}{\varepsilon^2}(\operatorname{grad} r \times \operatorname{grad} r)\cdot \varepsilon^2\, d\omega = -\lim \int \varphi d\omega = -4\pi\varphi_0 \,,$$

essendo φ_0 il valore di φ nel punto O.

Perciò, per $\varepsilon \to 0$, la precedente diviene

$$-4\pi\varphi_0 = \int_\tau \frac{1}{r}\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi d\tau - \int_S \left(\varphi \operatorname{grad}\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\operatorname{grad}\varphi\right) \times \vec{n} dS \,.$$

Assumiamo per τ l'intero spazio e ricordiamo che all'infinito è $\varphi = 0$. Se per un momento supponiamo che all'infinito siano nulle anche le derivate di φ, cioè il vettore $\operatorname{grad}\varphi$, perveniamo alla formola

$$\varphi_0 = -\frac{1}{4\pi}\int_\tau \frac{\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi}{r}\,d\tau \,,$$

---

(1) Il valore di φ in un punto O è in valore assoluto minore della somma dei valori assoluti degli elementi dell'integrale (26), ciascuno dei quali non supera $\frac{|\rho|\,d\tau}{R}$ se R è l'estremo inferiore delle distanze di O dai punti di τ. Si ha dunque $|\varphi| < \frac{1}{R}\int |\rho|\,d\tau$ e quindi $\lim_{R\to\infty}\varphi = 0$. E in modo analogo si può vedere che all'infinito sono nulle tutte le derivate di φ, di tutti gli ordini.

la quale permette di concludere che la funzione

$$\varphi = \frac{1}{4\pi}\int_\tau \frac{\varrho d\tau}{r} \tag{26}$$

soddisfa in ogni punto alla (23), e, come facilmente si verifica, è nulla all'infinito. Siccome poi è stato precedentemente dimostrato che queste condizioni sono sufficienti per individuare la funzione φ, si deduce che la condizione $\operatorname{grad}\varphi = 0$ all'infinito è oziosa. È però utile osservare che essa è realmente soddisfatta dalla funzione (26).

Allo stesso modo si può provare che la equazione

$$\Delta\vec{U} = -\vec{u}\,, \tag{27}$$

dove $\vec{u}$ è un vettore noto, funzione del punto P, nullo fuori di una sfera opportunamente grande [1], ammette un'unica soluzione nulla all'infinito, e questa è data dal vettore

$$\vec{U} = \frac{1}{4\pi}\int_\tau \frac{\vec{u}d\tau}{r}\,. \tag{28}$$

Basta riferirsi a coordinate cartesiane ed applicare il precedente procedimento ad ognuna delle componenti di $\vec{U}$, assumendo ogni volta in luogo di ϱ la corrispondente componente di $\vec{u}$.

È importante rilevare che, se $\vec{u}$ è vettore solenoidale ($\operatorname{div}\vec{u} = 0$) avente nulla la componente $\vec{u}\times\vec{n}$ normale alla superficie che delimita il campo di sua esistenza [1], anche $\vec{U}$ è solenoidale. Infatti, essendo P punto generico di τ ed indicando con O il punto in cui è calcolata $\vec{U}$, si ha:

$$\operatorname{div}_O\vec{U} = \frac{1}{4\pi}\int_\tau \operatorname{div}_O\frac{\vec{u}(P)}{r}\,d\tau = \frac{1}{4\pi}\int_\tau \vec{u}(P)\times\operatorname{grad}_O\frac{1}{r}\,d\tau =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_\tau \vec{u}(P)\times\operatorname{grad}_P\frac{1}{r}\,d\tau = -\frac{1}{4\pi}\int_\tau \operatorname{div}_P\frac{\vec{u}}{r}\,d\tau + \frac{1}{4\pi}\int_\tau \frac{\operatorname{div}_P\vec{u}}{r}\,d\tau\,.$$

Ora, il primo dei due ultimi integrali vale $-\frac{1}{4\pi}\int \frac{\vec{u}\times\vec{n}}{r}\,dS$ e quindi è nullo per l'ipotesi fatta, ed il secondo è pure nullo per essere $\operatorname{div}\vec{u} = 0$.

Nel caso di $\vec{u}$ solenoidale, avendo presente la (21), si può dire che l'integrale (28) soddisfa alle equazioni

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{U} = \vec{u}\,, \qquad \operatorname{div}\vec{U} = 0\,,$$

e si può dimostrare che tali equazioni, insieme alle solite condizioni al contorno, determinano univocamente il vettore $\vec{U}$.

I secondi membri delle (26), (28) si chiamano i *potenziali* (*scalare*, rispettivamente *vettore*) relativi alle distribuzioni ϱ ed $\vec{u}$, funzioni date dei punti dello spazio.

---

[1] Tale condizione è certo soddisfatta se, essendo τ l'intero spazio, è $\vec{u} = 0$ all'infinito.

A questo punto giova rilevare che un vettore $\vec{u}$ esistente in un certo spazio τ è perfettamente determinato non appena si conoscano i valori in ogni punto di div $\vec{u}$ e rot $\vec{u}$, nonchè quelli di $\vec{u}$ alla superficie S delimitante τ. Invero, se ne esistessero due, la loro differenza, nulla su S, avrebbe nulla in tutto τ la div ed il rot. Quest'ultima condizione consente di asserire che detta differenza può considerarsi come il gradiente di un conveniente scalare Φ, il quale, a causa della prima condizione, soddisfa a

$$\Delta \Phi = 0$$

con grad $\Phi = 0$ su S. Di qui, applicando la (24), segue la (25), e si conclude che è grad $\Phi = 0$ dovunque.

Orbene, le formole (26), (28) precedentemente stabilite ci permettono di scrivere senz'altro l'espressione effettiva di un vettore $\vec{v}$ esistente in tutto lo spazio e nullo all'infinito, in funzione dello scalare

$$\operatorname{div} \vec{v} = -\varrho$$

e del vettore

$$\operatorname{rot} \vec{v} = -\vec{u}$$

soddisfacente certamente alla condizione div $\vec{u} = 0$ (1). Invero, posto

$$\varphi = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\varrho d\tau}{r}, \qquad \vec{U} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\vec{u} d\tau}{r},$$

con che il vettore $\vec{U}$ è solenoidale, il vettore

$$\operatorname{grad} \varphi + \operatorname{rot} \vec{U}$$

ha precisamente div e rot uguali a quelli di $\vec{v}$, ed è, come $\vec{v}$, nullo all'infinito; pertanto coincide con $\vec{v}$ (2).

Con ciò resta stabilito l'importante fatto che una arbitraria distribuzione vettoriale $\vec{v}$ regolare e nulla all'infinito, si può sempre pensare dovuta alla sovrapposizione (somma) di una del tipo lamellare e di una del tipo solenoidale, la prima essendo determinata da un certo potenziale scalare, costruibile mediante i valori di div $\vec{v}$, la seconda da un certo potenziale vettore, costruibile mediante quelli del vettore solenoidale rot $\vec{v}$.

6. - Potenziali ritardati. — Si consideri ora una grandezza scalare ϱ funzione non soltanto del punto P, ma anche del tempo t, che pertanto indicheremo con $\varrho(P, t)$, data in uno spazio τ come dianzi.

Si chiama *potenziale ritardato* con velocità c, relativo alla distribuzione ϱ, l'integrale

$$\varphi(O, t) = \frac{1}{4\pi}\int_\tau \frac{\varrho^*}{r} d\tau, \tag{29}$$

(1) Riteniamo, al solito, ϱ ed $\vec{u}$ nulli esternamente ad una sfera di raggio opportunamente grande.

(2) In particolare, se è div $\vec{v} = 0$, risulta $\vec{v} \equiv \operatorname{rot} \vec{U}$, conformemente all'affermazione fatta alla fine del n. 3.

dove l'asterisco apposto ad una funzione del tempo, quale è ad es. ϱ, sta ad indicare che se ne calcola il valore all'istante $t - \frac{r}{c}$ $\left(\text{cioè } \varrho^* = \varrho(P, t - r/c)\right)$: la valutazione di tale potenziale viene cioè fatta mettendo in conto non il valore $\varrho(P, t)$ esistente in P all'istante t, ma quello che ivi si aveva tanto tempo prima quanto ne occorre ad un mobile animato da velocità c per percorrere il cammino dal punto P al punto O in cui è calcolata la φ, denotando al solito r la distanza OP.

Possiamo dimostrare che la funzione definita da (29) soddisfa all'equazione

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\varrho\,,$$

che per coordinate cartesiane coincide con

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\varrho\,. \tag{30}$$

A tal fine, siccome l'integrale a secondo membro della (29) diviene infinito in O, cominciamo col separare dal campo τ una sferetta τ_1 centrata in O il cui raggio faremo poi tendere a zero, e calcoliamo separatamente l'integrale esteso a $\tau - \tau_1$, e quello esteso a τ_1. Essendo $\frac{\varrho^*}{r}$ finita in $\tau - \tau_1$, si avrà

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \int_{\tau - \tau_1} \frac{\varrho^*}{r}\, d\tau = \int_{\tau - \tau_1} \left(\operatorname{div} \operatorname{grad} \frac{\varrho^*}{r} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\varrho^*}{r}\right) d\tau\,,$$

essendo grad da calcolarsi rispetto ad O. Ora, posto

$$f(r) = \frac{\varrho^*}{r}\,,$$

e ricordando le formole (13), (14), (17), (22), si ha

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} f(r) = \operatorname{div} \{ f'(r) \operatorname{grad} r \} = \operatorname{div} \left(\frac{f'}{r} (P - O) \right) =$$

$$= \frac{f'}{r} \operatorname{div} (P - O) + \frac{d}{dr} \left(\frac{f'}{r} \right) \left\{ (P - O) \times \operatorname{grad} r \right\} = 3 \frac{f'}{r} + f'' - \frac{f'}{r} = \frac{1}{r} \frac{d^2(rf)}{dr^2}\,.$$

Pertanto (scriviamo $\frac{\partial}{\partial r}$ per ricordare che f è funzione anche di t):

$$\left(\operatorname{div} \operatorname{grad} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \frac{\varrho^*}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rf)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial^2 (rf)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (rf)}{\partial t^2} \right\}.$$

Ora, è facile verificare che l'espressione fra parentesi all'ultimo membro è nulla, perchè il prodotto rf, in quanto uguaglia ϱ^*, è funzione della combinazione $t - \frac{r}{c}$ (1). Quindi l'integrale considerato è nullo.

---

(1) Invero, se in una qualunque $\psi(x)$ si pone $x = t - \frac{r}{c}$, si ha:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{d^2 \psi}{dx^2} \right)_{x = t - \frac{r}{c}}\,, \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \left(\frac{d^2 \psi}{dx^2} \right)_{x = t - \frac{r}{c}}\,.$$

Resta ora da valutare

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \int_{\tau_1} \frac{\varrho^*}{r}\, d\tau - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{\tau_1} \frac{\varrho^*}{r}\, d\tau \,.$$

Per quanto riguarda il primo termine, si osservi che, per un conveniente θ compreso fra 0 ed 1, si ha

$$\varrho^* = \varrho - \frac{r}{c}\, \dot{\varrho}\left(t - \theta \frac{r}{c}\right)$$

(dove il punto, come d'uso in Meccanica, indica derivazione rispetto al tempo), quindi

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \int_{\tau_1} \frac{\varrho^*}{r}\, d\tau = \operatorname{div} \operatorname{grad} \int_{\tau_1} \frac{\varrho}{r}\, d\tau - \frac{1}{c} \operatorname{div} \operatorname{grad} \int_{\tau_1} \dot{\varrho}\left(t - \theta \frac{r}{c}\right) d\tau \,.$$

Ora, il primo dei due integrali a secondo membro, in quanto corrisponde al Δ di un potenziale ordinario, vale $-\varrho$, ed il secondo, portando sotto il segno integrale il simbolo div grad (il che è lecito perchè la funzione sotto il segno d'integrale è continua con le sue derivate), corrisponde all'integrale di una funzione limitata in tutto il campo τ_1 di integrazione e pertanto tende a zero con questo.

Per quanto riguarda il secondo termine, la derivazione rispetto al tempo può senz'altro eseguirsi sull'integrando; si perviene così all'integrale

$$\frac{1}{c^2} \int_{\tau_1} \frac{\ddot{\varrho}^*}{r}\, d\tau \,,$$

che tende certamente a zero col raggio di τ_1, come si verifica osservando che si può scrivere $d\tau = r^2 dr d\omega$, con che l'integrazione, rispetto ad r, è da estendersi da 0 al raggio di τ_1 e, rispetto a $d\omega$, all'angolo solido completo ($= 4\pi$).

Pertanto la (30) è dimostrata.

Analogamente si dimostrerà che il *potenziale vettore ritardato*

$$\vec{U}(O, t) = \int_{\tau} \frac{\vec{u}^*}{r}\, d\tau \tag{31}$$

relativo alla distribuzione vettoriale $\vec{u}$ soddisfa all'equazione

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{U} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{U} + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial \vec{U}}{\partial t^2} = \vec{u} \,,$$

che per coordinate cartesiane coincide con

$$\Delta \vec{U} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} = -\vec{u} \,. \tag{32}$$

I potenziali ritardati — scalare e vettore — definiti dalle (29), (31) sono ovviamente nulli all'infinito per ogni valore di t e in Analisi si dimostra che essi rappresentano l'unica soluzione (nulla all'infinito) delle (30), rispettivamente (31), qualora siano assegnati per $t = 0$ i valori dei potenziali stessi e delle loro derivate rispetto al tempo in tutto lo spazio.

Interessa infine rilevare che per i potenziali ritardati (29) e (31) sussistono le seguenti importanti relazioni:

$$\text{(33)} \qquad \text{grad}\,\varphi = \int \frac{(\text{grad}\,\varrho)^*}{r}\,d\tau\,, \qquad \text{div}\,\vec{U} = \int \frac{(\text{div}\,\vec{u})^*}{r}\,d\tau\,, \qquad \text{rot}\,\vec{U} = \int \frac{(\text{rot}\,\vec{u})^*}{r}\,d\tau\,;$$

e, quanto alle derivate rispetto al tempo, esse si calcolano operando semplicemente sulle funzioni ϱ od $\vec{u}$:

$$\text{(34)} \qquad \dot{\varphi} = \int \frac{\dot{\varrho}^*}{r}\,d\tau\,, \qquad \ddot{\varphi} = \int \frac{\ddot{\varrho}^*}{r}\,d\tau\,, \ldots, \qquad \dot{\vec{U}} = \int \frac{\dot{\vec{u}}^*}{r}\,d\tau\,, \ldots$$

Evidentemente, nelle (33) i grad, div, rot a primo membro sono a intendersi calcolati rispetto al punto O.

Le relazioni (34) sono ovvie, non altrettanto le (33). Per dimostrare ad es. la seconda, si pensi che il vettore $\vec{U}$ definito dalla (31) dipende da O unicamente pel tramite della grandezza r, la quale compare in $\frac{\vec{u}}{r}$ sia esplicitamente (al denominatore) sia implicitamente attraverso il binomio $t - \frac{r}{c}$ di cui $\vec{u}^*$ è funzione, e pertanto, in virtù delle (24), si ha:

$$\text{div}_O\,\vec{U} = \frac{1}{4\pi}\int \vec{u}^* \times \text{grad}_O \frac{1}{r}\,d\tau - \frac{1}{4\pi c}\int \frac{\dot{\vec{u}}^*}{r} \times \text{grad}_O\, r\,d\tau\,.$$

Ricordando poi che per ogni funzione $f(r)$ di r è $\text{grad}_O f(r) = -\text{grad}_P f(r)$, possiamo scrivere:

$$\text{(35)} \qquad \text{div}_O\,\vec{U} = -\frac{1}{4\pi}\int \vec{u}^* \times \text{grad}_P \frac{1}{r}\,d\tau + \frac{1}{4\pi c}\int \frac{\dot{\vec{u}}^*}{r} \times \text{grad}_P\, r\,d\tau\,.$$

D'altra parte è

$$\text{div}_P \frac{\vec{u}^*}{r} = \frac{(\text{div}_P\,\vec{u})^*}{r} - \frac{1}{c}\frac{\dot{\vec{u}}^*}{r} \times \text{grad}_P\, r + \vec{u}^* \times \text{grad}_P \frac{1}{r} \text{ [1]},$$

come agevolmente si riconosce pensando alla duplice dipendenza di $\vec{u}^* = \vec{u}\left(P, t - \frac{r}{c}\right)$ da P (dipendenza diretta e pel tramite di r). Moltiplichiamo ambo i membri di quest'ultima per $\frac{d\tau}{4\pi}$ ed integriamo all'intero spazio: il primo membro dà risultato nullo, come si deduce applicando il teorema della divergenza e ricordando le condizioni generali cui soddisfa $\vec{u}$; cosicchè, confrontando con la (35), si ha la seconda delle (33). E analogamente si dimostrano le altre.

Dalle (33) segue in particolare che se $\vec{u}$ è lamellare oppure solenoidale, altrettanto avviene di $\vec{U}$.

---

[1] Il simbolo $(\text{div}_P\,\vec{u})^*$ significa, ovviamente, il valore all'istante $t - \frac{r}{c}$ della div_P di $\vec{u}(P, t)$.

È particolarmente utile per le applicazioni osservare che se fra ϱ ed $\vec{u}$ sussiste la relazione

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{u} = 0 ,$$

analoga relazione

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{U} = 0 \tag{36}$$

si ha fra i corrispondenti potenziali ritardati. Ciò è immediata conseguenza delle (33) e (34).

Se lo spazio τ è limitato e $\vec{u} \times \vec{n}$ non è nullo al contorno S, si troverebbe invece

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{U} + \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\vec{u} \times \vec{n}}{r} \, dS = 0 , \tag{36'}$$

essendo $\vec{n}$ diretto verso l'interno del volume racchiuso da S.

C) Principi della teoria di Maxwell.

1. - Campo elettrostatico. — Nella trattazione classica del campo elettrostatico stazionario, cioè invariabile col tempo, si parte dalla nozione delle cariche elettriche in esso presenti, generalmente rappresentabili con integrali della forma $\int \varrho d\tau$, essendo ϱ, funzione scalare del punto generico P, la densità cubica secondo cui sono distribuite le cariche stesse.

Tali cariche soddisfano sempre al *principio di conservazione*, secondo il quale non può pensarsi a cariche positive senza la presenza (in località opportune, a priori non note, ed eventualmente situate a distanza infinita) di altrettanto importo di cariche negative.

Supponendo l'intero spazio occupato da un mezzo omogeneo ed isotropo, caratterizzato da un certo valore ε della sua *costante dielettrica* (o *permittività*), si ha poi che (legge di Coulomb) l'azione ponderomotrice fra due cariche q, q' localizzate in punti P, P' distanti r l'uno dall'altro ha intensità esprimibile con la formola (di tipo newtoniano) $\frac{qq'}{4\pi\varepsilon r^2}$, è diretta secondo PP', ed è attrattiva o repulsiva secondo che q, q' hanno segni opposti o uguali.

Da tali premesse si giunge agevolmente a calcolare il vettore $\vec{F}$ (funzione dei punti dello spazio) denominato vettore del *campo elettrico*, e si dimostra che, per una distribuzione di cariche caratterizzate da una funzione ϱ dovunque regolare (o tutt'al più discontinua su un numero finito di superficie), e nulla all'esterno di una sfera di raggio opportunamente grande, tale vettore $\vec{F}$ è pure dovunque regolare, nullo all'infinito, ed inoltre ammette un potenziale, cioè si può scrivere

$$\vec{F} = -\operatorname{grad} \varphi ; \tag{1}$$

e, ponendo la condizione $\varphi = 0$ all'infinito, si ha precisamente

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int \frac{\varrho d\tau}{r}, \tag{1'}$$

dove l'integrale può intendersi esteso all'intero spazio.

Per quanto ci è noto (App. *B*, 5), la divergenza di $\vec{F}$ vale $\frac{\varrho}{\varepsilon}$, e pertanto, posto $\vec{D} = \varepsilon\vec{F}$, il flusso del vettore $\vec{D}$, detto *spostamento* (o *induzione*) uscente da una qualunque superficie chiusa, equivale alla somma $\int \varrho d\tau$ delle cariche esistenti entro il volume da essa limitato.

Questo enunciato, costituente il così detto *teorema di Gauss*, si trova pertanto soggetto alla limitazione che il mezzo sia omogeneo. Quando ciò non sia, cioè quando ε non sia costante in tutto lo spazio, non è neppure lecito ritenere valida la legge delle azioni elementari da cui il teorema stesso viene dedotto.

È tuttavia sempre ben definito il vettore $\vec{F}$ del campo elettrico, ed anche il vettore $\vec{D} = \varepsilon\vec{F}$, che nel caso di mezzo eventualmente eterogeneo, ma sempre isotropo (pel quale quindi ε sarà in generale una funzione del punto generico P), sarà parallelo ad $\vec{F}$ (1).

Ammetteremo che la relazione

$$\int_S \vec{D} \times \vec{n} \cdot dS = \int_\tau \varrho d\tau, \quad \text{cioè} \quad \int_S \varepsilon\vec{F} \times \vec{n} dS = \int_\tau \varrho d\tau$$

sia verificata per ogni superficie chiusa S, racchiudente un certo volume indicato con τ.

Applicando il teorema della divergenza, si vede che ciò equivale a ritenere la densità di carica dovunque coincidente con la div $\vec{D}$. Tale asserzione costituisce l'enunciato del *teorema di Gauss generalizzato*, che Maxwell pone a base dell'Elettrostatica, con geniale ipotesi che può ritenersi accertata, in quanto le sue conseguenze sono tutte in accordo con l'esperienza.

Secondo tale punto di vista, le cariche elettriche ci appaiono come le «sorgenti» del vettore $\vec{D}$ (App. *B*, 2, nota (2) a pag. 734). Dove le linee di questo vettore hanno origine, diremo che esistono le cariche positive, e dove esse terminano riterremo localizzate le cariche negative, le cariche stesse essendo misurate dal flusso attraverso i tubi di $\vec{D}$. In ogni regione in cui non esistono cariche, il vettore $\vec{D}$ è solenoidale, e quindi tale è anche $\vec{F}$, se il mezzo è omogeneo nella regione stessa. Il vettore $\vec{F}$ è poi sempre lamellare, cioè si ha rot $\vec{F} = 0$, e pertanto si può parlare di un potenziale (scalare) definito, a meno di una costante additiva, da

$$\vec{F} = -\operatorname{grad}\varphi .$$

Se il mezzo è omogeneo, la div $\vec{F}$ vale $\frac{\varrho}{\varepsilon}$, cioè si ha div grad $\varphi = -\frac{\varrho}{\varepsilon}$ da cui segue per φ la espressione (1′).

---

(1) Nel caso di mezzo anisotropo, la relazione fra i vettori $\vec{F}$ e $\vec{D}$ non è più di semplice proporzionalità, ma è sempre lineare, cioè può interpretarsi come una *omografia vettoriale*, in generale variabile da punto a punto: i vettori $\vec{F}$ e $\vec{D}$ non sono allora in generale paralleli.

Nell'interno dei corpi conduttori il vettore $\vec{F}$ è nullo e tale è quindi $\vec{D}$; pertanto ivi non esistono cariche ed il potenziale è costante. Si può quindi parlare di *potenziale del conduttore*, considerato in tutta la sua estensione tridimensionale, e le cariche in esso localizzate non potranno trovarsi distribuite che alla sua superficie con una certa densità (superficiale) che indicheremo con σ. La superficie di un conduttore è sempre equipotenziale e pertanto le linee del vettore $\vec{F}$ (e quindi anche quelle di $\vec{D}$) la incontrano normalmente. Il vettore $\vec{F}$ alla superficie di un conduttore ha dunque nulla la componente tangenziale, e la componente normale presenta una discontinuità, in quanto essa è nulla verso l'interno, mentre verso l'esterno vale $\frac{\sigma}{\varepsilon}$, come facilmente si riconosce applicando il teorema di Gauss [1].

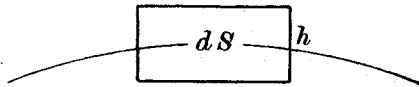
Qualora non esistano altre cariche che quelle portate dai conduttori, l'espressione del potenziale assume l'aspetto

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_S \frac{\sigma dS}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{S_1} \frac{\sigma_1 dS_1}{r_1} + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{S_2} \frac{\sigma_2 dS_2}{r_2} + \dots$$

dove S rappresenta la superficie complessiva dei conduttori, σ la densità nel punto generico della stessa, r la distanza di questo dal punto in cui si calcola φ; ed S_1, σ_1, r_1; $S_2, \sigma_2, r_2 \dots$; si riferiscono ai singoli conduttori. Il campo $\vec{F}$ esiste in tutto lo spazio, ma è nullo all'interno dei conduttori, nonchè, ben inteso, all'infinito.

Richiamiamo ancora che la costruzione di un campo $\vec{F}$ si accompagna con una provvista di energia che si trova accumulata nello spazio sede di $\vec{F}$ e $\vec{D}$ in ragione di $\frac{\vec{F}\times\vec{D}}{2}\,d\tau$ per ogni elemento $d\tau$, e che, nel caso di un sistema dei conduttori carichi ed immersi in un mezzo omogeneo, è esprimibile nelle forme indicate in I, 6.

2. - Correnti elettriche permanenti. - Campo magnetico. — Quando fra due punti di un conduttore, con mezzi opportuni (pile, dinamo, ecc.), si provvede a mantenere una differenza di potenziale costante, il conduttore diviene sede di *corrente elettrica stazionaria* (o *permanente*), per effetto della quale attraverso ogni elemento d'area δS del conduttore passa nel tempo dt una certa carica dQ tale che il rapporto $\frac{dQ}{dt}$ è costante e corrisponde al flusso attraverso δS di un certo vettore $\vec{u}$, detto *densità di corrente*, essenzialmente solenoidale, e quindi a linee chiuse. Ogni tubo di tal vettore è così sede di una corrente la cui intensità, costante lungo tutto il tubo, è misurata dal flusso di $\vec{u}$ attraverso una (qualunque) sezione del tubo. Quando, come spesso accade nella tecnica, si ha a che fare con

[1] Si consideri un cilindretto di altezza h, e con le basi parallele ed uguali ad un elemento dS della superficie del conduttore. Il flusso uscente dalla superficie di tale cilindro, per $h \to 0$, tende ad $\varepsilon\vec{F}\times\vec{n}dS = \varepsilon F dS$; uguagliandolo alla carica σdS contenuta entro il cilindro stesso, si ottiene la relazione indicata.

conduttori filiformi, aventi cioè dimensioni longitudinali notevolmente prevalenti sulle trasversali, per modo da presentare un « asse », il vettore $\vec{u}$ è diretto, in ogni punto di questo, tangenzialmente all'asse stesso, talchè, indicando con dv l'elemento di volume costituito dal cilindro avente per altezza l'elemento lineare $\vec{dl}$ dell'asse e per base un elemento δS della sezione normale, il prodotto $\vec{u}dv$ equivale ad $u\delta S \cdot \vec{dl}$, cioè a $\delta i\vec{dl}$, essendo $\delta i = u\delta S$ l'intensità della corrente fluente attraverso δS.

Ad ogni sistema di correnti permanenti svolgentisi a distanza finita è connesso un campo magnetico, cioè un vettore $\vec{H}$, nullo all'infinito, caratterizzato dalla fondamentale proprietà che la sua circuitazione lungo una linea chiusa $\mathfrak{L}$ concatenata con uno o più filetti di corrente, percorsa nel senso corrispondente alla regola d'Ampère (o all'equivalente del cavatappi) è misurata dalla corrente fluente nei filetti stessi. Ciò può esprimersi dicendo che la detta circuitazione corrisponde al flusso di $\vec{u}$ attraverso una superficie aperta S avente per contorno la linea $\mathfrak{L}$.

Trasformando l'espressione della circuitazione mediante il teorema di Stokes (App., B, 3, formola (11)) e tenuto conto dell'arbitrarietà di S, si deduce subito che fra i vettori $\vec{H}$ ed $\vec{u}$ intercede la relazione

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{u} \,. \tag{2}$$

Da ciò segue che la circuitazione di $\vec{H}$ lungo una curva chiusa non concatenata con alcun filetto di corrente è nulla, in quanto tale curva può pensarsi contorno di una superficie attraverso la quale è nullo il flusso di $\vec{u}$.

Il mezzo sede del campo magnetico è fisicamente caratterizzato da un parametro, la permeabilità μ, in relazione al quale si definisce un altro vettore $\vec{B} = \mu\vec{H}$, detto *induzione* (o *polarizzazione*) *magnetica*, parallelo ad $\vec{H}$ se il mezzo è isotropo.

Generalmente la permeabilità μ varia da regione a regione dello spazio occupato dal campo magnetico, salvo il caso che l'intero spazio sia riempito da mezzo omogeneo, come praticamente può ritenersi in assenza di materiali ferromagnetici.

Il vettore $\vec{B}$ è sempre solenoidale, cioè soddisfa all'equazione

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \,,$$

da cui, ove si possa ritenere μ costante, consegue $\operatorname{div} \vec{H} = 0$. Alla superficie di separazione di due mezzi di permeabilità diversa, $\vec{H}$ subisce una discontinuità nella sua componente $\vec{H} \times \vec{n}$ normale a tale superficie, mentre $\vec{B} \times \vec{n}$ è continuo, dal che si deduce che i valori H_1 e H_2 di $\vec{H} \times \vec{n}$ dalle due parti della superficie sono inversamente proporzionali ai valori di μ nei due mezzi. Queste superfici manifestano le proprietà dei così detti *poli magnetici* (vedi El., V, 36).

Nel caso di mezzo omogeneo, la condizione $\operatorname{div} \vec{H} = 0$ consente di assegnare l'espressione di $\vec{H}$ in funzione di $\vec{u}$, e precisamente, appoggiandosi a noti teoremi di calcolo vettoriale (App. B, 5) si può scrivere:

$$\vec{H} = \operatorname{rot} \vec{U} \,, \tag{3}$$

essendo

$$\vec{U} = \frac{1}{4\pi} \int_v \frac{\vec{u}}{r} \, dv \tag{4}$$

il *potenziale vettore* relativo al dato sistema di correnti occupanti un certo volume v ed ivi definite dal vettore solenoidale $\vec{u}$.

Per una corrente filiforme di intensità i, alla (4) si può dare l'aspetto

$$\vec{U} = \frac{i}{4\pi} \int_{\mathfrak{L}} \frac{\vec{dl}}{r}, \tag{4'}$$

e questa può interpretarsi pensando che ad ogni elemento circuitale $\vec{u}dv = i\vec{dl}$ sia dovuto l'elemento $\frac{i}{4\pi r} \vec{dl}$ del potenziale vettore, con che si arriva alla formola elementare di Laplace:

$$d\vec{H} = \frac{i}{4\pi} \operatorname{grad} \frac{1}{r} \wedge \vec{dl}. \tag{5}$$

Naturalmente, la legge rappresentata da questa formola è in certo senso arbitraria, in quanto che la legge effettiva, quale è dettata dalla (3), è rispettata anche se al secondo membro di (4) si aggiunge un qualsiasi vettore lamellare. È poi ovvio che all'esperienza si può chiedere soltanto il controllo della (3), perchè non si può realizzare una corrente permanente aperta.

La (3), nel caso (4'), fornisce valori infiniti di $\vec{H}$ nei punti occupati dal conduttore sede della corrente; ciò dipende dal fatto che in essa si suppone implicitamente che sia infinita la densità della corrente. Correttamente converrà riferirsi ad un circuito di sezione (infinitamente piccola) dS e scrivere udS in luogo di i, con che si ottengono dovunque valori finiti.

L'energia del campo magnetico può ritenersi localizzata nell'intero spazio, nella misura di $\frac{\vec{H} \times \vec{B}}{2} d\tau$ per ogni elemento di volume $d\tau$. All'energia totale del campo dovuto ad una corrente lineare si può dare l'espressione $\frac{1}{2} i\Phi$ essendo Φ il flusso di $\vec{B}$ attraverso una qualunque superficie S avente per contorno la linea $\mathfrak{L}$ di corrente. Se il mezzo è omogeneo, si ha $\vec{B} = \mu \operatorname{rot} \vec{U} = \operatorname{rot} \mu\vec{U}$ e, applicando il teorema di Stokes:

$$\Phi = \int_S \operatorname{rot} \mu\vec{U} \times \vec{n} dS = \mu \int_{\mathfrak{L}} \vec{U} \times \vec{dl}',$$

dove $\vec{dl}'$ è, al pari di $\vec{dl}$ della (4'), l'elemento lineare generico di $\mathfrak{L}' \equiv \mathfrak{L}$, quindi:

$$\frac{1}{2} i\Phi = \frac{i^2}{2} \int_{\mathfrak{L}} \int_{\mathfrak{L}'} \frac{\mu}{4\pi} \frac{\vec{dl} \times \vec{dl}'}{r}.$$

L'induttanza L del circuito infinitamente sottile considerato non è altro che il coefficiente di $\frac{i^2}{2}$, che, conformemente ad una precedente osservazione, converrà scrivere sotto forma di doppio integrale di volume esteso allo spazio $v \equiv v'$ occupato dal circuito. All'uopo, detti $\vec{l}$, $\vec{l'}$ vettori unitari paralleli a $\vec{dl}$, $\vec{dl}'$, ed S, S' le aree (infinitamente piccole) della sezione del conduttore nei punti generici cui sono riferiti $\vec{l}$ ed $\vec{l'}$, basterà scrivere $\vec{l} \frac{dv}{S}$, $\vec{l'} \frac{dv'}{S'}$ in luogo di $\vec{dl}$, $\vec{dl}'$. Si ottiene

così per l'induttanza cercata l'espressione

$$L = \frac{\mu}{4\pi} \int_v \int_{v'} \frac{1}{SS'} \frac{\vec{l} \times \vec{l'}}{r} dv dv' \ ^{(1)} .$$

Nel caso di due correnti i_1, i_2 in due circuiti filiformi $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$, il potenziale vettore si compone di due termini, l'uno relativo ad i_1, l'altro ad i_2, e per l'energia si ha l'espressione

$$\frac{1}{2}(L_1 i_1^2 + 2M i_1 i_2 + L_2 i_2^2),$$

dove L_1, L_2 sono definiti come sopra in relazione ai due circuiti, mentre M, mutua induttanza degli stessi, è definito dall'integrale

$$\frac{\mu}{4\pi} \int_{\mathfrak{L}_1} \int_{\mathfrak{L}_2} \frac{\vec{dl_1} \times \vec{dl_2}}{r}, \tag{6}$$

o meglio da

$$\frac{\mu}{4\pi} \int_{v_1} \int_{v_2} \frac{1}{S_1 S_2} \frac{\vec{l_1} \times \vec{l_2}}{r} dv_1 dv_2 , \tag{6'}$$

dove $\vec{l_1}$, $\vec{l_2}$ sono vettori unitari paralleli agli elementi generici $\vec{dl_1}$, $\vec{dl_2}$ dei due circuiti, ed r la distanza fra tali elementi.

L'integrale (6) è il così detto *integrale di Neumann* (cfr. I, 2). L'elemento generale di esso

$$\frac{\mu}{4\pi} \frac{\vec{dl_1} \times \vec{dl_2}}{r}$$

può convenzionalmente denominarsi *mutua induttanza* dei due elementi lineari orientati $\vec{dl_1}$ e $\vec{dl_2}$.

La definizione d'induttanza propria e mutua, cui così si perviene nel caso di circuiti a sezione infinitesima, involge soltanto elementi geometrici e posizionali dei circuiti e la natura del mezzo. Essa però non può estendersi al caso di sezioni finite finchè non si conosce la distribuzione del vettore $\vec{u}$ (veggasi in proposito I, 3).

3. - Corrente totale. - Equazioni di Maxwell. — Quando si è in presenza di correnti non permanenti, le considerazioni precedenti non sono più applicabili, e ciò per parecchie ragioni. In primo luogo non si può più asserire che la corrente debba necessariamente fluire in circuito metallicamente chiuso: basta pensare al caso semplicissimo della corrente che, durante la carica o la scarica di un condensatore, fluisce nel circuito, metallicamente aperto, che fa capo alle armature. Poi, venendo meno la solenoidalità di $\vec{u}$, non può più enunciarsi la proprietà fondamentale che conduce alla (2), in quanto che, anche ammesso che si possa parlare di linea concatenata con la corrente, occorrerebbe precisare a quale delle superficie

(1) Gli elementi di questo integrale sono generalmente infinitesimi, perchè l'ordine di infinitesimo del prodotto $dv \cdot dv'$ è 6 mentre quello di $SS'r$ non supera 5.

che hanno per contorno tale linea si intende riferirsi, giacchè non è escluso che la corrente possa essere diversa da punto a punto di ogni singolo filetto.

Maxwell ha genialmente superato questa difficoltà (e rimossa così ogni eccezione alla validità della (2)) considerando, accanto alla densità $\vec{u}$ della corrente di conduzione, un altro elemento vettoriale che, unitamente ad $\vec{u}$, fornisce un complesso a carattere sempre solenoidale.

All'uopo, si osservi che se S è una superficie qualunque racchiudente un volume v, ed il flusso di $\vec{u}$ da essa uscente non è nullo, ciò significa che non tutte le cariche che le correnti uscenti hanno asportato dal volume v durante un certo tempuscolo dt trovano compenso in quelle introdotte mediante le correnti, e pertanto la carica totale esistente in v deve essere variata, cioè deve essere diversa da zero la variazione (temporale)

$$d \int \vec{D} \times \vec{n} \cdot dS$$

dell'integrale che, a senso del teorema di Gauss generalizzato, misura la carica elettrica esistente in v. Più precisamente, tale variazione sarà opposta al prodotto di dt per il flusso di $\vec{u}$, cioè si avrà:

$$dt \int_S \vec{u} \times \vec{n} dS + d \int_S \vec{D} \times \vec{n} dS = 0 ,$$

vale a dire

$$\int_S \left(\vec{u} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) \times \vec{n} dS = 0 . \tag{7}$$

Data l'arbitrarietà di S, questa relazione esprime la solenoidalità del vettore

$$\vec{u} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} ,$$

che, seguendo Maxwell, si denomina densità (superficiale) della *corrente totale*, composta della corrente di conduzione $\vec{u}$ e della *corrente di spostamento* $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ (che nel caso di mezzo omogeneo, vale $\varepsilon \frac{\partial \vec{F}}{\partial t}$).

L'ardita ipotesi che la (2) sia verificata ponendo a secondo membro la corrente totale anzichè la corrente di conduzione, cioè che sia:

$$\text{rot}\, \vec{H} = \vec{u} + \varepsilon \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} , \tag{2'}$$

si trova confermata dall'esperienza, talchè la estensione della nozione di corrente alle variazioni nel tempo del campo elettrico risulta pienamente giustificata.

La (2') costituisce la prima *equazione di Maxwell.*

La seconda è quella che esprime la legge generale dell'induzione elettromagnetica, secondo la quale quando varia il flusso del vettore induzione magnetica $\vec{B}$ attraverso una superficie aperta S avente per contorno una linea $\mathfrak{L}$, lo spazio diviene sede di un campo elettrico $\vec{F}$ tale che la sua circuitazione lungo $\mathfrak{L}$ in ogni istante equivale al rapporto cambiato di segno fra la variazione del flusso fra gli istanti t e $t + dt$ ed il tempo dt. Più esattamente, se la $\mathfrak{L}$

si suppone percorsa nel senso che, secondo la regola del cavatappi corrisponde a quello assunto come positivo nella valutazione del flusso di $\vec{B}$, si ha:

$$\int_{\mathfrak{L}} \vec{F} \times \vec{dl} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{S} \vec{B} \times \vec{n} dS \ . \tag{8}$$

La linea $\mathfrak{L}$ si comporta dunque *come se* in essa fosse intercalata una sede di f. e. m. misurata dal primo membro della precedente, tale f. e. m. essendo sostanzialmente dovuta al fatto che il campo $\vec{F}$ di cui qui si tratta non ha carattere lamellare come quelli di natura elettrostatica dianzi considerati. E si può ulteriormente osservare che la precedente non cessa di essere valida se in essa si intende che in $\vec{F}$ sia conglobato anche il campo elettrostatico eventualmente presente, perchè quest'ultimo, in quanto è lamellare, non dà alcun contributo all'integrale del primo membro.

Trasformando il primo membro mediante il teorema di Stokes, si deduce subito che, data l'arbitrarietà di S, deve essere dovunque

$$\text{rot}\, \vec{F} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \ . \tag{9}$$

Questa uguaglianza costituisce la *seconda equazione di Maxwell.*

Se l'induzione $\vec{B}$ è riferibile al campo magnetico dovuto ad una distribuzione $\vec{u}$ di correnti e se il mezzo è omogeneo, al secondo membro si sarebbe tentati di sostituire $-\mu \frac{\partial\, \text{rot}\, \vec{U}}{\partial t} = -\mu\, \text{rot} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t}$, essendo $\vec{U}$ il potenziale vettore corrispondente alla distribuzione $\vec{u}$, dopo di che si dedurrebbe che $\vec{F}$ non può differire da $-\mu \frac{\partial \vec{U}}{\partial t}$ se non per un vettore lamellare. Ma una tale deduzione non può ritenersi legittima per il fatto che la relazione (3) è stata stabilita soltanto nel caso di correnti stazionarie, mentre qui si dovrebbe necessariamente pensare a correnti variabili nel tempo. Vedremo successivamente (n. 7) come debba modificarsi tale conclusione per tener conto dell'influenza esercitata dalla variabilità delle correnti.

Per completare il quadro delle relazioni fondamentali, non resta che mettere in conto i campi elettrici *impressi*, quelli cioè dovuti alla presenza di generatori (voltaici, termoelettrici, elettromeccanici [1] ecc.) e che riterremo caratterizzati da una certa distribuzione vettoriale $\vec{F}_i$. Pertanto, se ad $\vec{F}$ attribuiamo il significato di campo elettrico *totale* esistente nel punto generico dello spazio, non avremo da fare altro che scrivere la (9) nel modo seguente:

$$\text{rot}(\vec{F} - \vec{F}_i) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \ . \tag{9'}$$

Quanto alle correnti di conduzione $\vec{u}$, esse esistono soltanto in seno ai conduttori, e, conformemente alla legge di Ohm, il vettore $\vec{u}$ è in ogni punto propor-

[1] Poichè in tutto quanto precede si è sempre implicitamente supposto che i corpi materiali sede dei fenomeni elettrici e magnetici non siano in movimento, restano esclusi dalle nostre considerazioni quei fatti di induzione elettromagnetica che, come nei generatori elettromeccanici, si verificano per causa di moti relativi di campi magnetici e materia (conduttori).

zionale al campo elettrico totale $\vec{F}$ secondo un coefficiente γ che misura la *conducibilità* del conduttore nel punto generico cui sono riferiti $\vec{u}$ ed $\vec{F}$ (1), cioè si ha in generale

$$\vec{u} = \gamma\vec{F} ,$$

in quanto γ (e quindi $\vec{u}$) differisce dallo zero soltanto nei punti occupati da conduttori.

Il passaggio della corrente nei conduttori determina una dissipazione energetica: la potenza P_J ad essa corrispondente, conformemente alla legge di Joule, importa $\gamma F^2 d\tau$ per ogni elemento $d\tau$ (2), e quindi si ha

$$P_J = \int_{\Sigma} \gamma F^2 d\tau , \tag{10}$$

dove l'integrale potrà intendersi esteso all'intero spazio.

Riassumendo, possiamo concludere che il campo elettrico $\vec{F}$ e magnetico $\vec{H}$ di cui è sede uno spazio caratterizzato dai valori ε, μ, γ della permittività, permeabilità, conducibilità del mezzo che lo occupa, e nel quale siano impressi campi elettrici dati $\vec{F}_i$, sono da calcolarsi integrando le equazioni

$$\left\{\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{H} &= \gamma\vec{F} + \frac{\partial(\varepsilon\vec{F})}{\partial t} \\ \operatorname{rot}(\vec{F} - \vec{F}_i) &= -\frac{\partial(\mu\vec{H})}{\partial t} , \end{aligned}\right. \tag{11}$$

alle quali si associerà l'altra

$$\operatorname{div}(\mu\vec{H}) = 0$$

esprimente la solenoidalità di $\vec{B} = \mu\vec{H}$.

Queste equazioni consentono in generale di definire in tutto lo spazio e per ogni istante i vettori $\vec{F}$ ed $\vec{H}$, non appena siano noti adeguati elementi (condizioni iniziali locali e temporali).

Siccome non sempre si ha a che fare con valori di ε, μ, γ costanti in tutto lo spazio, interessa esaminare il comportamento dei vettori $\vec{F}$ ed $\vec{H}$ su una generica superficie di separazione fra due regioni caratterizzate da diversi valori di uno almeno dei parametri predetti.

Supporremo che, come generalmente accade, su tale superficie sia $\vec{F}_i = 0$, cioè che essa sia estranea alle regioni in cui sono localizzati i campi impressi.

---

(1) Invero, assunto per elemento di volume un prisma retto di altezza $\vec{dl}$ parallela ad $\vec{F}$, la differenza di potenziale fra le basi la cui area indichiamo con dS, vale Fdl, e la corrente che lo percorre ha la direzione e il senso di $\vec{F}$ ed intensità misurata da udS. D'altra parte, se γ è la conducibilità, la resistenza ohmica dell'elemento vale $\frac{dl}{\gamma dS}$. Uguagliando la d. d. p. al prodotto della resistenza per la corrente, si ottiene $u = \gamma F$, e quindi — poichè $\vec{u}$ è parallelo ad $\vec{F}$ — anche $\vec{u} = \gamma\vec{F}$.

(2) Infatti, coi simboli della nota precedente, il prodotto della resistenza pel quadrato della corrente vale $\frac{dl}{\gamma dS}(\gamma F dS)^2 = \gamma F^2 dl dS = \gamma F^2 d\tau$.

Se P è un punto generico di S, possiamo agevolmente verificare che le componenti di $\vec{F}$ e di $\vec{H}$ secondo ogni versore $\vec{t}$ tangente ad S non subiscono discontinuità nel passaggio dall'una all'altra pagina di S. Invero, se $ABCD$ (fig. 438) è un rettangolo infinitesimo coi lati AB, CD paralleli a $\vec{t}$ e gli altri due normali ad S, infinitesimi rispetto ai primi (cioè tali che sia $\lim_{AB \to 0} \frac{BC}{AB} = 0$), le circuitazioni di $\vec{F}$ e di $\vec{H}$ lungo $ABCD$ tendono certamente a zero col tendere a zero dei lati di $ABCD$, in quanto è nullo il limite della corrente concatenata con un rettangolo siffatto, come quello della f. e. m. in esso indotta. D'altra parte, tali circuitazioni tendono al prodotto di AB per le differenze $(\vec{F} \times \vec{t})_1 - (\vec{F} \times \vec{t})_2$, rispettivamente $(\vec{H} \times \vec{t})_1 - (\vec{H} \times \vec{t})_2$, fra le componenti di $\vec{F}$ e di $\vec{H}$ nella direzione $\vec{t}$; quindi tali differenze sono nulle, come si era asserito.

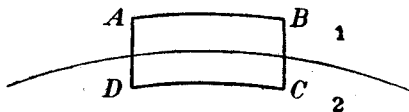



Fig. 438

Ciò posto, dalle stesse (11) si deduce allora che sulla superficie S sono continue anche le componenti normali dell'induzione magnetica $\mu\vec{H}$ e della corrente elettrica totale, cioè della somma di $\vec{u} = \gamma\vec{F}$ con $\frac{\partial(\varepsilon\vec{F})}{\partial t}$. Infatti, si assuma il primo dei tre vettori unitari coordinati $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ parallelo alla normale ad S nel punto considerato P, con che gli altri due risulteranno diretti tangenzialmente ad S. Ora, le componenti secondo $\vec{i}$ dei vettori a secondo membro delle (11) coincidono con quelle dei vettori a primo membro; ma, poichè nelle espressioni di $\vec{i} \times \operatorname{rot} \vec{H}$, $\vec{i} \times \operatorname{rot} \vec{F}$ intervengono soltanto le derivate rispetto ad y e z delle componenti di $\vec{H}$, $\vec{F}$ in queste stesse direzioni (formola (9) di App., B, 3), cioè per calcolarle si utilizzano soltanto elementi tangenziali, di cui abbiamo constatato la continuità attraverso S, segue senz'altro la continuità delle componenti normali della corrente totale e della derivata temporale dell'induzione magnetica, e quindi dell'induzione magnetica stessa. In particolare poi, se è $\vec{u} = 0$, la corrente totale si riduce alla corrente di spostamento e pertanto si conclude analogamente per la continuità della componente normale del vettore $\varepsilon\vec{F}$.

Dalla continuità delle componenti normali di $\vec{F}$ ed $\vec{H}$ si deduce poi la necessaria *discontinuità* delle analoghe componenti di $\vec{F}$ e di $\vec{H}$, la prima quando, essendo $\gamma = 0$, sia $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$, la seconda per $\mu_1 \neq \mu_2$ (cfr. El., V, 6).

4. - Relazioni energetiche. - Teorema di Poynting. — Per quanto concerne le relazioni energetiche fondamentali, alle espressioni

$$W_e = \int_\tau \frac{\varepsilon F^2}{2} d\tau\,, \qquad W_m = \int_\tau \frac{\mu H^2}{2} d\tau\,, \qquad P_J = \int_\tau \gamma F^2 d\tau$$

dell'energia elettrica, dell'energia magnetica e della potenza relativa all'effetto Joule (le prime due corrispondenti ad accumulazione entro lo spazio a cui sono estesi gli integrali, la terza a dissipazione entro lo spazio stesso), aggiungeremo l'altra:

$$P_i = \int_\tau \vec{F}_i \times \left(\gamma\vec{F} + \frac{\partial(\varepsilon\vec{F})}{\partial t}\right) d\tau\,,$$

che dà la misura della potenza P_i relativa al lavoro elettrico erogato dai generatori contenuti nello spazio τ, in corrispondenza al campo elettrico $\vec{F}_i$ ad essi dovuto ed alla corrente totale $\gamma\vec{F} + \frac{\partial(\varepsilon\vec{F})}{\partial t}$ che essi sono chiamati a mantenere.

Ad una importante conseguenza energetica delle relazioni generali (11) si perviene moltiplicandole scalarmente rispettivamente per $(\vec{F} - \vec{F}_i)$ ed $\vec{H}$ e sottraendo i risultati. Si ottiene così:

$$(\vec{F} - \vec{F}_i) \times \operatorname{rot} \vec{H} - \vec{H} \times \operatorname{rot} (\vec{F} - \vec{F}_i) = \gamma F^2 + \vec{F} \times \frac{\partial(\varepsilon\vec{F})}{\partial t} + \vec{H} \times \frac{\partial(\mu\vec{H})}{\partial t}\,.$$

Ponendo

$$\vec{R} = (\vec{F} - \vec{F}_i) \wedge \vec{H}\,, \tag{12}$$

e ricordando la (19) di App., B, 4, la precedente si scrive:

$$\operatorname{div} \vec{R} = \gamma F^2 + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon F^2}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mu H^2}{2}\right) - \vec{F}_i \times \left\{ \gamma\vec{F} + \frac{\partial(\varepsilon\vec{F})}{\partial t} \right\}.$$

Moltiplicando per $d\tau$ e integrando ad una porzione qualunque dello spazio limitata dalla superficie chiusa S, trasformando il primo membro mediante il teorema della divergenza (App., B, 3) e moltiplicando poi per dt, si ottiene:

$$P_i dt = dW_e + dW_m + P_J dt + dt \int_S \vec{R} \times \vec{n} dS\,, \tag{13}$$

essendo $\vec{n}$ vettore unitario parallelo alla normale esterna ad S.

Il primo membro misura il lavoro elettrico erogato dai generatori durante il tempo dt, i primi due termini del secondo membro danno la misura della variazione dell'energia accumulata nel campo sotto forma elettrica e magnetica, ed il terzo quello dell'energia calorifica sviluppata per effetto Joule durante lo stesso tempo. La presenza del quarto termine nel secondo membro sta chiaramente ad indicare che con le manifestazioni suddette il bilancio energetico non si salda. Precisamente, del lavoro elettrico erogato dai generatori, una parte (primi due termini) viene spesa per aumentare l'energia elettrica e magnetica (oppure dovrà considerarsi maggiorata delle eventuali diminuzioni di queste) ma la differenza (rispettivamente somma) non si ritrova tutta sotto forma di calore Joule, bensì è da considerarsi *uscente* (o entrante qualora risultasse negativa) dai confini del campo, precisamente nella misura indicata dall'ultimo termine del secondo membro. D'altra parte l'integrale che compare in tal termine non è che il flusso del vettore $\vec{R}$, quindi appare giustificato attribuire all'uscita energetica il carattere di un flusso, ed intendere così che la direzione ed il senso del vettore $\vec{R}$ corrispondano alla direzione e senso di una *propagazione energetica*, per effetto della quale, attraverso ogni unità di superficie normale ad $\vec{R}$, transitano R unità energetiche per ogni unità di tempo. La direzione dei *raggi energetici* in un punto qualunque coincide, a senso della (12), con quella della normale alle direzioni di $\vec{F} - \vec{F}_i$ ed $\vec{H}$. Per lo più i campi $\vec{F}_i$ sono localizzati in regioni limitate dello spazio, talchè in generale il vettore $\vec{R}$ coincide con $\vec{F} \wedge \vec{H}$.

Per le ragioni predette, $\vec{R}$ si chiama *vettore radiante* (o *vettore di Poynting*), e l'uguagliazna (13) esprime il così detto *teorema di Poynting*.

A prima vista sembrerebbe che la validità di questo teorema dovesse limitarsi al caso di uno spazio omogeneo. Ma è da osservarsi che, qualora il mezzo non sia omogeneo, alla superficie di separazione S_1 di due regioni occupate da mezzi diversi il vettore $\vec{R}$ ha continua la componente normale in quanto che le discontinuità di $\vec{F}$ ed $\vec{H}$ riguardano soltanto le loro componenti normali, le quali non intervengono nel computo della componente normale di $\vec{R}$.

Ora, spezzando l'intero spazio τ nelle sue parti omogenee, separate l'una dall'altra da dette superficie S_1, la corretta applicazione del teorema della divergenza potrà farsi soltanto per ognuna di tali parti separatamente sommando poi membro a membro i risultati; ma poichè i corrispondenti integrali superficiali $\int_{S_1} \vec{R} \times \vec{n} dS$ vengono complessivamente a comparire due volte con valori opposti, rimane soltanto l'integrale esteso alla superficie delimitante l'intero spazio τ considerato.

Il comportamento all'infinito dei vettori $\vec{F}$ ed $\vec{H}$ è tale che il flusso di $\vec{R}$ tende a zero col crescere indefinito del volume considerato nella (13), per modo che, con riferimento all'intero spazio, si ha bilancio perfetto fra il lavoro conferito al sistema da una parte, la variazione d'energia accumulata e la dissipazione Joule dall'altra.

5. - Velocità di propagazione dei fatti elettromagnetici. — Le equazioni (11), (11′) consentono di determinare in ogni caso concreto la distribuzione dei vettori $\vec{F}$ ed $\vec{H}$, cioè, come si dice, del campo elettromagnetico generale, non appena siano note le necessarie condizioni ai limiti. Esamineremo qui rapidamente alcuni casi elementari atti ad illuminarci sull'atteggiamento generale dei relativi fenomeni.

Innanzi tutto vogliamo far vedere che dalle equazioni stesse discende, come proprietà essenziale dei fatti elettromagnetici, quella di propagarsi con una velocità ben determinata e finita.

Per trattare un caso semplice, supponiamo che in un certo piano, che assumeremo come piano coordinato $x = 0$, per cause opportune (dipendenti da generatori od altro), sorga al tempo $t = 0$ un fatto elettrico (perturbazione) caratterizzato da una certa successione di valori $f(t)$ che il modulo del vettore $\vec{F}$ assume, per $x = 0$, negli istanti successivi a $t = 0$ (talchè la funzione $f(t)$ è nulla per ogni $t < 0$), mentre nei rimanenti punti del semispazio $x > 0$ il campo $\vec{F}$ è nullo per $t = 0$. Supporremo anche che $\vec{F}$ sia in ogni istante uniforme in ogni piano $x = \text{cost.}$, e più precisamente parallelo dovunque e sempre ad una certa direzione che assumeremo per asse y, ed inoltre che sia nullo all'infinito in qualunque istante.

Se il mezzo è omogeneo e non conduttore (ε e μ costanti e $\gamma = 0$), le equazioni fondamentali si riducono a

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{F}}{\partial t}, \qquad \operatorname{rot} \vec{F} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}.$$

Per le ipotesi fatte, si può porre $\vec{F} = F\vec{j}$ con F funzione della sola x e del tempo t, tale che per $x = 0$ si riduce ad una espressione nota $f(t)$, nulla per $t < 0$.

Essendo, per la (18) di App., *B*, 4:

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \operatorname{grad} F(x, t) \wedge \vec{j} = \frac{\partial F}{\partial x} \vec{i} \wedge \vec{j} = \frac{\partial F}{\partial x} \vec{k},$$

il vettore $\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$, e quindi $\vec{H}$ stesso, risulterà diretto secondo l'asse z ed uniforme su ogni piano $x =$ cost.; dunque $\vec{H}$ potrà rappresentarsi con $H\vec{k}$, essendo H funzione di x e di t.

Scrivendo $\frac{\partial F}{\partial x} \vec{k}$ e $-\frac{\partial H}{\partial x} \vec{j}$ in luogo di $\operatorname{rot} \vec{F}$ e $\operatorname{rot} \vec{H}$, le equazioni fondamentali si riducono a

$$-\frac{\partial H}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial F}{\partial t}, \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H}{\partial t}. \tag{14}$$

Derivando la prima rispetto al tempo e la seconda rispetto ad x si elimina H, e si trova che F deve soddisfare all'equazione a derivate parziali

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}, \tag{14'}$$

oltre alle condizioni $F = f(t)$ per $x = 0$, $F = 0$ per $x \to \infty$ e t qualunque.

La (14') è soddisfatta solo da una somma di due funzioni arbitrarie degli argomenti $t - \frac{x}{c}$ e $t + \frac{x}{c}$, essendo $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ (1), e si soddisfa poi anche alle poste con-

---

(1) In generale, se in una funzione di due variabili x, y, si fa la sostituzione

$$X = ax + by, \qquad Y = ax - by,$$

essa si converte in una funzione di X ed Y, e si ha

$$\frac{\partial}{\partial x} = a\left(\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial y} = b\left(\frac{\partial}{\partial X} - \frac{\partial}{\partial Y}\right),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = a^2\left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2}\right), \qquad \frac{\partial^2}{\partial y^2} = b^2\left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2}\right),$$

da cui

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{b^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2}{\partial X \partial Y}.$$

Da ciò segue che per risolvere l'equazione $\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{b^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$ basta assumere una funzione φ soddisfacente alla

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X \partial Y} = 0,$$

cioè, essendo F_1, F_2 simboli di funzione arbitraria di una sola variabile:

$$\varphi = F_1(X) + F_2(Y), \qquad \text{vale a dire} \qquad \varphi = F_1(ax + by) + F_2(ax - by).$$

Viceversa ogni funzione della sola combinazione $ax + by$ (oppure della sola $ax - by$) soddisfa la

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{b^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}.$$

Per $a = 1$, $b = \frac{1}{c}$, $x = t$, $y = r$, si ha il caso contemplato nel testo.

dizioni ai limiti ritenendo identicamente nulla la seconda, cioè assumendo

$$F = f\left(t - \frac{x}{c}\right), \tag{15}$$

come agevolmente si verifica, ricordando che la funzione f è nulla per valori negativi del suo argomento [1].

Quanto al campo magnetico H, dalla seconda delle (14) si ha

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{\mu c} f'\left(t - \frac{r}{c}\right),$$

quindi, ricordando che H è nullo per $t = 0$:

$$H = \frac{1}{\mu c}\int_0^t f'\left(t - \frac{r}{c}\right) dt = \frac{1}{\mu c} f\left(t - \frac{r}{c}\right) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, F,$$

da cui segue:

$$\mu H^2 = \varepsilon F^2. \tag{16}$$

L'esame delle espressioni di F e di H mostra che il campo elettromagnetico che abbiamo supposto sorgere nel piano $x = 0$ a partire dall'istante $t = 0$ con una certa legge, *si propaga* con velocità c ai successivi piani, paralleli al piano iniziale, in quanto che sul piano $x = x_1$ si ritrova la medesima successione di valori che su $x = 0$, ma con l'inizio *ritardato* di un tempo $\frac{x_1}{c}$, quanto cioè ne occorre ad un mobile animato da velocità c per coprire la distanza fra i due piani. In altri termini, per un osservatore « piano » che avanza con questa velocità lungo l'asse x, il fenomeno elettromagnetico di cui si parla avrebbe carattere invariabile nel tempo, in quanto un tale osservatore, qualunque sia l'istante in cui inizia il suo moto, porterebbe, per così dire, seco il campo esistente in quell'istante nel piano da cui è partito.

Tale velocità c vale $\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ che, nel mezzo normale (vuoto, aria), coincide con quella della luce. I « raggi » di propagazione sono le parallele all'asse x, che, come facilmente si verifica, costituiscono le linee del vettore di Poynting.

Lo spazio successivamente invaso dall'*onda elettromagnetica* si carica di energia la quale precisamente, per la (16), si ripartisce in uguale misura fra il campo elettrico ed il campo magnetico.

---

(1) E si può aggiungere che è questa l'unica soluzione soddisfacente a tutte le poste condizioni. Se infatti ne esistessero due, la loro differenza g sarebbe una soluzione della (14') e come tale esprimibile con $f_1\left(t - \frac{x}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{c}\right)$, e dovrebbe essere nulla, per ogni valore di t, per $x = 0$, ed anche essere nulla per ogni x al tempo $t = 0$ nonchè per $t < 0$. Dalla prima condizione segue che le funzioni f_1 ed f_2 sono opposte ($f_1(\alpha) = -f_2(\alpha)$) e dalla seconda che è $f_1(\alpha) = f_1(-\alpha)$, talchè si ha

$$g = f_1\left(t - \frac{x}{c}\right) - f_1\left(-t - \frac{x}{c}\right).$$

Siccome poi g deve essere nulla per ogni $t < 0$, si vede subito che $f_1(\alpha)$ ha un valore costante A per $\alpha < 0$, e tale valore essa conserva anche per $\alpha > 0$ a causa di $f_1(\alpha) = f_1(-\alpha)$. Pertanto è $g = A - A = 0$.

Il caso qui esaminato corrisponde formalmente alla propagazione lungo una linea non dissipativa di cui è fatto cenno in forma intuitiva in V, 10. La linea ivi considerata non è che lo strumento atto a realizzare una sorta di « guida » alla propagazione, costringendo, per così dire, questa a verificarsi parallelamente ad una direzione, in modo simile a quello qui esaminato.

In questo caso si dice che si ha una propagazione per « onde piane ». Più generalmente, si potrebbero avere superfici d'onda non piane e sempre la propagazione si verificherebbe secondo raggi (linee del vettore di Poynting) normali alla famiglia delle superfici stesse.

6. - Propagazione di un'onda sinusoidale. — Quando, come sempre avviene in pratica, lo spazio che interessa le nostre considerazioni è sufficientemente limitato, il tempo necessario perchè la perturbazione raggiunga le regioni più lontane è assai piccolo; per es. per superare una distanza pari al diametro terrestre bastano meno di 0,05 sec. Avviene allora che, se il fenomeno iniziale ha carattere periodico, tale esso si presenta, dopo breve tempo, dovunque, in condizioni di regime.

Vogliamo più particolarmente esaminare il caso in cui la funzione $f(t)$ è sinusoidale, cioè del tipo $A \cos \omega t$. A regime raggiunto la velocità c può allora interpretarsi come *velocità di propagazione della fase*, in quanto che il fatto oscillatorio rappresentato da $A \cos \omega t$ si svolge sui successivi piani $x =$ cost. con ritardo di fase temporalmente misurato da $\frac{x}{c}$, cioè come se la fase viaggiasse con la velocità c. Il valore angolare di tale ritardo è $\frac{\omega x}{c} = 2\pi \frac{x}{\lambda}$, essendo λ la lunghezza d'onda, cioè la minima distanza fra due piani per i quali il ritardo corrisponde alla durata del periodo e quindi le oscillazioni si compiono in fase. Se il campo elettrico nel piano $x = 0$ si rappresenta compendiosamente col numero complesso $\mathbf{A}$, sul piano generico x esso si rappresenterà con $\mathbf{A}e^{-j2\pi\frac{x}{\lambda}}$.

a) Propagazione in un mezzo conduttore indefinito.

Se invece si suppone che il mezzo sia dotato di conduttività $\gamma \neq 0$, ferme restando le condizioni accessorie sul comportamento del campo sul piano $x = 0$ e all'infinito, alle (14), (14') si sostituiranno le

$$-\frac{\partial H}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial F}{\partial t} + \gamma F\,, \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H}{\partial t}\,, \tag{17}$$

$$\varepsilon\mu \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + \gamma\mu \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0\,. \tag{17'}$$

Ci limiteremo al caso di $f(t)$ sinusoidale di pulsazione ω, che rappresenteremo col complesso $\mathbf{F}_0$ (1), e supporremo che sia già trascorso, per lo spazio che ci interessa, il tempo occorrente affinchè in tutti i punti di esso si sia raggiunto uno stato di regime.

Sostituendo la derivazione rispetto al tempo con la moltiplicazione per $j\omega$ si ha per $\mathbf{F}$ l'equazione differenziale

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial x^2} = -\mathbf{F}(\omega^2 \varepsilon\mu - j\gamma\omega\mu)\,,$$

(1) Con ciò il campo elettrico, vettorialmente considerato, si rappresenterà con $\vec{\mathbf{F}}_0$.

soddisfatta da

$$\mathbf{F} = \mathbf{A}e^{j(\alpha - j\beta)x} + \mathbf{B}e^{-j(\alpha - j\beta)x},$$

dove **A**, **B** sono costanti complesse e $\pm(\alpha - j\beta)$ rappresentano le due radici quadrate di $\omega^2\varepsilon\mu - j\gamma\omega\mu$, per le quali si può ritenere $\alpha > 0$, $\beta > 0$ (1). Siccome il modulo del primo termine contiene il fattore $e^{\beta x}$ indefinitamente crescente con x, mentre per $x \to \infty$ deve essere $\mathbf{F} = 0$, sarà $\mathbf{A} = 0$, talchè l'espressione di **F**, tenuto conto di $\mathbf{F} = \mathbf{F}_0$ per $x = 0$, si riduce a

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 e^{-\beta x} e^{-j\alpha x}. \tag{18}$$

Il campo si propaga dunque ancora per onde piane con una velocità di fase cui corrisponde una lunghezza d'onda $\lambda = \frac{2\pi}{\alpha}$, ma la propagazione è accompagnata da attenuazione (e precisamente l'ampiezza di oscillazione si riduce secondo il rapporto misurato da β neper (IV, 10) per ogni unità di lunghezza; l'onda cioè viene *assorbita* dal mezzo, in quanto che la corrispondente energia si trasforma in calore per effetto Joule.

Se il mezzo ha piccolissima conducibilità, risulta $\alpha \cong \frac{\omega}{c}$ e $\beta \cong 0$, e si ricade nel caso precedente, invece, per valori relativamente elevati di γ, il fatto elettrico iniziale può risultare praticamente *assorbito* ad una distanza assai piccola dal piano $x = 0$. Per es. se si tratta di rame per cui $\gamma = 6 \cdot 10^7\ \Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$, ritenendo per ε e μ valori coincidenti con quelli relativi al vuoto e supponendo $\omega = 10^7$, si ha $\omega^2\varepsilon\mu = 1{,}12 \cdot 10^{-3}$, quindi trascurabile in confronto a $\gamma\omega\mu = 76 \cdot 10^7$, e pertanto

$$\alpha - j\beta \cong \sqrt{-j\gamma\omega\mu} = (1 - j)\sqrt{\frac{\gamma\omega\mu}{2}} \quad \text{cioè} \quad \alpha = \beta = \sqrt{\frac{\gamma\omega\mu}{2}} = 2{,}75 \cdot 10^4 .$$

Il campo si riduce ad un milionesimo del suo valore iniziale per $e^{2,75 \cdot 10^4 x} = 10^6$, vale a dire ad una distanza x di circa mezzo millimetro. Si tratta sostanzialmente del fenomeno pellicolare ed il caso considerato non differisce da quello (trattato in II, 3) di conduttore cilindrico a sezione circolare di raggio molto grande (2).

La legge generale di propagazione (18) coincide con quella lungo una linea dissipativa in regime progressivo, ed a questo proposito si possono ripetere le considerazioni dianzi esposte pel caso non dissipativo. Il vettore di Poynting si attenua, di conserva col campo, a causa della dissipazione energetica che accompagna la propagazione, come già sopra accennato (effetto Joule).

b) Propagazione in un mezzo terminato da una parete assorbente.

E si può anche ritrovare l'analogo del caso stazionario. Basta pensare che ad una certa distanza x_1 dal piano iniziale $x = 0$ si trovi un piano di separazione con un mezzo assorbente, quale può essere rappresentato da un conduttore. La distribuzione del valore del campo dovrà allora soddisfare alla equazione (14′) ma

---

(1) Invero si verifica immediatamente che a tali radici quadrate corrispondono, nel piano di Gauss, due punti situati l'uno nel secondo, l'altro nel quarto quadrante.

(2) Ivi infatti si studiò la distribuzione della densità di corrente che, a meno del fattore γ, coincide col campo elettrico **F**.

con la condizione aggiuntiva $\mathbf{F} = 0$ per $x = x_1$ (1). Limitandoci al solito al caso sinusoidale, si perviene immediatamente a concludere che, posto $\alpha = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} = \frac{\omega}{c}$, il complesso $\mathbf{F}$ rappresentativo del campo elettrico è una combinazione lineare a coefficienti complessi di $e^{j\alpha x}$, $e^{-j\alpha x}$, o, se si vuole, di $e^{j\alpha(x_1-x)}$ ed $e^{-j\alpha(x_1-x)}$:

$$\mathbf{F} = \mathbf{A}e^{j\alpha(x_1-x)} + \mathbf{B}e^{j\alpha(x_1-x)} .$$

Il campo risulta quindi dalla sovrapposizione di due campi analoghi a quelli studiati nel primo caso, ma propagantisi in senso inverso.

Fra le costanti $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sussistono evidentemente le due relazioni

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = 0 , \qquad \mathbf{A}e^{j\alpha x_1} + \mathbf{B}e^{-j\alpha x_1} = \mathbf{F}_0 ,$$

dalle quali, con calcolo semplicissimo, segue per $\mathbf{F}$ la seguente espressione

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 \frac{\operatorname{sen} \alpha(x - x_1)}{\operatorname{sen} \alpha x_1} .$$

Da questa, come in V, 8, si deduce che i campi nei successivi piani $x = \text{cost.}$ sono fra loro in fase (o in opposizione) con ampiezze distribuite con legge sinusoidale (locale) e quindi si hanno nodi e ventri distanziati di un quarto di lunghezza d'onda a partire dal piano nodale $x = x_1$, ecc.

Quanto al campo magnetico, ricordando che la derivazione di una funzione periodica sinusoidale adduce ad una funzione analoga spostata di un quarto di periodo, basta uno sguardo alle (14) per concludere che esso presenta distribuzione analoga a quella del campo elettrico, salvo lo spostamento di un quarto di periodo nel tempo e di un quarto di lunghezza d'onda nello spazio.

c) Propagazione attraverso la superficie di separazione fra due mezzi diversi.

Più generalmente possiamo esaminare quel che avviene quando il piano $x = x_1$ separi due regioni occupate da mezzi qualunque. Per semplicità, supporremo che la permeabilità μ sia la stessa per entrambi, ed indicheremo con ε_1, γ_1; ε_2, γ_2 i valori della permittività e della conducibilità del primo mezzo ($x < x_1$) e del secondo ($x > x_1$).

Se, in relazione ad una data pulsazione ω, poniamo

$$\varkappa_1 = \alpha_1 - j\beta_1 = \omega\sqrt{\varepsilon_1\mu - j\frac{\gamma_1\mu}{\omega}} , \qquad \varkappa_2 = \alpha_2 - j\beta_2 = \omega\sqrt{\varepsilon_2\mu - j\frac{\gamma_2\mu}{\omega}} ,$$

i valori complessi $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ del campo elettrico nelle due regioni saranno dati dalle espressioni:

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{A}_1 e^{j\varkappa_1 x} + \mathbf{B}_1 e^{-j\varkappa_1 x} \qquad (\text{per } x < x_1) ,$$
$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{A}_2 e^{j\varkappa_2 x} + \mathbf{B}_2 e^{-j\varkappa_2 x} \qquad (\text{per } x > x_1) ,$$

dove $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{B}_2$ sono convenienti costanti complesse, di cui la terza è certamente nulla, dovendosi avere $\mathbf{F}_2 = 0$ per $x \to \infty$. Se con una traslazione d'assi

(1) Veramente il campo $\mathbf{F}$ sarà praticamente nullo per x un po' superiore ad x_1, ma tal valore di x è tanto più prossimo ad x_1 quanto maggiore è la conduttività γ, talchè per γ grandissimo (teoricamente infinito) si potrà ritenere $\mathbf{F} = 0$ per $x = x_1$.

portiamo il piano $x = 0$ a coincidere col piano di separazione fra i due mezzi, la prima relazione sarà da utilizzarsi per i valori negativi di x maggiori di $-x_1$, la seconda per $x > 0$.

Le precedenti mostrano che, mentre il campo $\mathbf{F}_2$ appare riferibile ad una propagazione procedente — in generale con attenuazione — dal piano $x = 0$ verso il semispazio $x > 0$, a partire dal valore $\mathbf{B}_2$, il campo $\mathbf{F}_1$ può considerarsi dovuto alla sovrapposizione di due distribuzioni di analogo tipo, l'una procedente verso il piano $x = 0$, l'altra partente dal piano stesso, caratterizzate dai rispettivi valori $\mathbf{B}_1$ ed $\mathbf{A}_1$ sul piano. Avviene cioè come se la $\mathbf{B}_1$, giungendo al piano $x = 0$, retrocedesse parzialmente nella misura rappresentata da $\mathbf{A}_1$ come per effetto di riflessione, e parzialmente procedesse nel secondo mezzo nella misura rappresentata da $\mathbf{B}_2$, come per effetto di trasparenza.

Fra le costanti $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$ sussistono le relazioni

$$\mathbf{A}_1 e^{-j\varkappa_1 x_1} + \mathbf{B}_1 e^{j\varkappa_1 x_1} = \mathbf{F}_0 \,, \tag{19}$$

$$\mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 \,, \tag{20}$$

la prima delle quali esprime che per $x = -x_1$ il campo ha il valore dato $\mathbf{F}_0$, e la seconda segue dal fatto che, alla superficie di separazione $x = 0$, il vettore del campo elettrico ha continua la componente tangenziale, la quale, per essere il vettore normale all'asse x, equivale al vettore stesso.

Quanto ai campi magnetici $\mathbf{H}_1$ ed $\mathbf{H}_2$, essendo in generale $\mathbf{H} = \frac{j}{\mu\omega}\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}$, sarà:

$$\mathbf{H}_1 = \frac{j\varkappa_1}{\mu\omega}(\mathbf{A}_1 e^{j\varkappa_1 x} - \mathbf{B}_1 e^{-j\varkappa_1 x}) \,, \qquad \mathbf{H}_2 = -\frac{j\varkappa_2}{\mu\omega}\mathbf{B}_2 e^{-j\varkappa_2 x} \,,$$

da cui, per la continuità di $\mathbf{H}$ sul piano $x = 0$:

$$\varkappa_1(\mathbf{A}_1 - \mathbf{B}_1) = -\varkappa_2 \mathbf{B}_2 \,. \tag{21}$$

Mediante le (19), (20), (21) si possono determinare in modo univoco le costanti $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$, con che risultano note le espressioni esplicite di $\mathbf{F}$ ed $\mathbf{H}$ in ogni punto dello spazio.

Ci interessa rilevare che dalle (20), (21) si deducono le importanti formole

$$\frac{\mathbf{A}_1}{\mathbf{B}_1} = \frac{\varkappa_1 - \varkappa_2}{\varkappa_1 + \varkappa_2}, \qquad \frac{\mathbf{B}_2}{\mathbf{B}_1} = \frac{2\varkappa_1}{\varkappa_1 + \varkappa_2} \tag{22}$$

che fanno conoscere l'entità relativa degli effetti di riflessione e di trasparenza di cui sopra si è parlato. Per lo più si dà il nome di fattori *di riflessione* ϱ e *di trasparenza* τ ai quadrati dei moduli dei secondi membri:

$$\varrho = \left| \frac{\varkappa_1 - \varkappa_2}{\varkappa_1 + \varkappa_2} \right|^2, \qquad \tau = \left| \frac{2\varkappa_1}{\varkappa_1 + \varkappa_2} \right|^2,$$

in quanto tali quadrati misurano i rapporti fra l'energia associata ai campi $\mathbf{A}_1$ e $\mathbf{B}_2$ e quella associata a $\mathbf{B}_1$.

---

[1] Il caso ora trattato è l'analogo della chiusura di un tronco di linea con una linea infinita di diversa impedenza caratteristica, equivalente a quello della chiusura del tronco stesso su una impedenza diversa dalla sua impedenza caratteristica (V, 4).

In particolare, se si passa da un mezzo dielettrico ad uno di elevata conducibilità, sarà $|\varkappa_2| \gg |\varkappa_1|$ e quindi:

$$\varrho \cong 1\,, \qquad \tau \cong 0\,, \qquad \text{cioè} \qquad \mathrm{A}_1 \cong \mathrm{B}_1\,, \qquad \mathrm{B}_2 \cong 0\;;$$

si ritrova cioè il precedente caso *b*).

7. - Determinazione del campo elettromagnetico date le correnti e le cariche. — Gli esempi trattati sono sufficienti per rendere conto del fatto fondamentale, conseguenza delle equazioni di Maxwell, secondo cui i fatti elettromagnetici si propagano con una velocità finita, nel senso che, ove un tal fatto si manifesti in un certo luogo, esso, con modalità opportune, si ritrova poi a distanza in tempo successivo. Ma gli esempi stessi non ci consentono di apprezzare quali legami esistano, nello spazio e nel tempo, fra il campo elettromagnetico e gli elementi ai quali esso *può pensarsi dovuto*, cioè le cariche elettriche e le correnti elettriche.

In effetto le cariche e le correnti sono esse stesse determinate dal campo [1] secondo le leggi richiamate nei nn. prec., ma la ricerca accennata si presenta particolarmente interessante in quei casi, che frequentemente ricorrono nella pratica, in cui in qualche modo si può ritenere nota la distribuzione nello spazio e nel tempo dello scalare ϱ e del vettore $\vec{u}$ rappresentativi della densità (cubica) di carica e della densità (superficiale) di corrente.

Se, per semplificare, prescindiamo dallo spazio occupato dagli organi sede dei campi impressi, e supponiamo omogeneo il mezzo, si tratta in sostanza di determinare i due vettori $\vec{F}$ ed $\vec{H}$ soddisfacenti alle equazioni

$$\text{(23)} \qquad \operatorname{rot}\vec{H} = \varepsilon\frac{\partial\vec{F}}{\partial t} + \vec{u}\,, \quad \operatorname{rot}\vec{F} = -\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\,, \quad \varepsilon\operatorname{div}\vec{F} = \varrho\,, \quad \operatorname{div}\vec{H} = 0\,,$$

essendo $\varrho(P,t)$, $\vec{u}(P,t)$ funzioni note del punto P e del tempo t, generalmente esistenti in una regione limitata di spazio. Tali ϱ ed $\vec{u}$, a causa della solenoidalità della corrente totale $\vec{u} + \varepsilon\dfrac{\partial\vec{F}}{\partial t}$, necessariamente sono fra loro legate dalla relazione

$$\text{(24)} \qquad \frac{\partial\varrho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{u} = 0\,.$$

Questo problema ammette un'unica soluzione se sono fissati i valori di $\vec{F}$ ed $\vec{H}$ e delle loro derivate rispetto al tempo per $t = 0$ e si suppone inoltre che sia $\vec{F} = 0$, $\vec{H} = 0$ all'infinito per ogni valore di t [2].

---

[1] Si allude qui al campo complessivo, comprendente anche i campi impressi a mezzo di generatori.

[2] Invero, se ne esistessero due, la loro differenza $\vec{F}'$, $\vec{H}'$ soddisferebbe alle equazioni

$$\operatorname{rot}\vec{H}' = \varepsilon\frac{\partial\vec{F}'}{\partial t}\,, \qquad \operatorname{rot}\vec{F}' = -\mu\frac{\partial\vec{H}'}{\partial t}\,, \qquad \operatorname{div}\vec{F}' = \operatorname{div}\vec{H} = 0\,,$$

ed alle condizioni

$$(\vec{F}')_{t=0} = (\vec{H}')_{t=0} = \left(\frac{\partial\vec{F}'}{\partial t}\right)_{t=0} = \left(\frac{\partial\vec{H}'}{\partial t}\right)_{t=0} = 0\;; \qquad \vec{F}' = \vec{H}' = 0 \ \text{all'infinito.}$$

Per trovarla, cominciamo coll'osservare che, per la quarta delle (23), si può scrivere

$$\vec{H} = \text{rot}\, \vec{U}',$$

essendo $\vec{U}'(P, t)$ un vettore da determinarsi, il quale, come si vede sostituendo nelle prime due equazioni, soddisfa alle

$$\text{rot rot}\, \vec{U}' = \varepsilon \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} + \vec{u}, \qquad \text{rot}\left(\vec{F} + \mu \frac{\partial \vec{U}'}{\partial t}\right) = 0,$$

e, al pari di $\vec{H}$, sarà nullo all'infinito, mentre per $t = 0$ saranno da considerarsi noti i valori di esso e della sua derivata rispetto al tempo.

La seconda delle precedenti permette di scrivere (App., B, 3, formola (12)):

$$\vec{F} = -\frac{1}{\varepsilon} \text{grad}\, \varphi - \mu \frac{\partial \vec{U}'}{\partial t},$$

dove φ è uno scalare funzione di P e di t che, in virtù della prima, deve soddisfare a:

$$\text{rot rot}\, \vec{U}' + \text{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{U}'}{\partial t^2} - \vec{u} = 0,$$

cioè, posto $\varepsilon\mu = \frac{1}{c^2}$, a

$$\text{grad}\left(\text{div}\, \vec{U}' + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = \Delta \vec{U}' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{U}'}{\partial t^2} + \vec{u}. \tag{25}$$

Se ora, col solito significato dei simboli, poniamo

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\varrho^*}{r} d\tau, \qquad \vec{U} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{u}^*}{r} d\tau, \tag{26}$$

essendo gli integrali estesi alle regioni occupate dalle cariche e dalle correnti, ed

$$\vec{U}' = \vec{U} + \vec{U}_0,$$

si avrà, per le (30) e (32) di App., B, 6:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\varrho, \qquad \Delta \vec{U} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} = -\vec{u},$$

$$\Delta \vec{U}' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{U}'}{\partial t^2} = -\vec{u} + \Delta \vec{U}_0 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{U}_0}{\partial t^2},$$

Applicando rot ai due membri delle prime e confrontando con la $\frac{\partial}{\partial t}$ della seconda, se ne ricaverebbe

$$\text{rot rot}\, \vec{F}' = -\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{F}'}{\partial t^2},$$

che, tenuto conto della terza, può scriversi:

$$\Delta \vec{F}' - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{F}'}{\partial t^2} = 0.$$

Da questa e dalle precedenti, tenuto conto di quanto esposto in App., B, 6, si deduce $\vec{F}' = 0$. Ed analogamente si dimostra essere $\vec{H}' = 0$.

ed inoltre, per la (36') di App., B, 6:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{U} + \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{u} \times \vec{n}}{r} dS = 0 ,$$

nonchè $\vec{U}_0 = 0$ all'infinito ed $(\vec{U}_0)_{t=0} = \left(\frac{\partial \vec{U}_0}{\partial t}\right)_{t=0} = 0$.

Sostituendo nella (25), questa si riduce a

$$\text{grad div } \vec{U}_0 = \Delta \vec{U}_0 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{U}_0}{\partial t^2} . \tag{27}$$

Uguagliando le div dei due membri, si ha che lo scalare $f = \operatorname{div} \vec{U}_0$ soddisfa a

$$\Delta f = \Delta f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \qquad \text{cioè} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 ,$$

nonchè alle $(f)_{t=0} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{t=0} = 0$. È dunque $f = 0$, cioè $\operatorname{div} \vec{U}_0 = 0$, quindi il vettore $\vec{U}_0$, in virtù della (27) stessa, soddisfa all'equazione

$$\Delta \vec{U}_0 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{U}_0}{\partial t^2} = 0 ,$$

oltre alle suddette condizioni ai limiti, per cui (App., B, 6), è $\vec{U}_0 = 0$.

Si conclude dunque che la soluzione cercata è fornita dalle formole:

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{F} &= -\frac{1}{\varepsilon} \text{grad } \varphi - \mu \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon}\left(-\text{grad } \varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}\right), \\ \vec{H} &= \text{rot } \vec{U} . \end{aligned} \right. \tag{28}$$

Più generalmente, potrà darsi il caso che le cariche elettriche siano riferibili, oltre che ad una distribuzione tridimensionale caratterizzata dalla densità cubica ϱ, anche ad una bidimensionale localizzata su certe superficie S e caratterizzata da una certa densità superficiale σ, funzione dei punti di S. Per lo più tali S saranno le superficie che delimitano le regioni sede di ϱ.

In tal caso alla terza delle (23) si aggiunge la

$$\delta(\varepsilon \vec{F} \times \vec{n}) = \sigma ,$$

dove, essendo $\vec{n}$ normale unitaria ad S, il simbolo a primo membro rappresenta la discontinuità della componente normale di $\varepsilon \vec{F}$ nel passaggio attraverso ad S (cfr. n. 3); e correlativamente, alla equazione (24) si aggiunge la

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \delta(\vec{u} \times \vec{n}) = 0 ,$$

la quale, data la precedente definizione di σ, esprime semplicemente il fatto che la componente normale della corrente totale $\vec{u} + \frac{\partial(\varepsilon \vec{F})}{\partial t}$ è continua attraverso S.

Il lettore potrà senza difficoltà verificare, con procedimento del tutto analogo al precedente, che anche in questo caso si perviene alle formole (28). La sola differenza sta in ciò, che in queste il potenziale scalare non deve intendersi rappre-

sentato dalla prima delle (26), ma dalla espressione

$$\varphi = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\varrho^*}{r}\,d\tau + \frac{1}{4\pi}\int \frac{\sigma^*}{r}\,dS. \tag{26'}$$

I termini $-\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{grad}\varphi$ e $\operatorname{rot}\vec{U}$ che figurano nelle (28) sono formalmente identici a quelli con i quali si calcolano il campo elettrostatico ed il campo magnetico relativi a date distribuzioni di cariche e di correnti stazionarie. La sola differenza sta in ciò, che, mentre nel caso stazionario i potenziali φ ed $\vec{U}$ si costruiscono mediante i valori costanti delle cariche e delle correnti, nel caso presente in cui queste variano col tempo, i valori di esse da utilizzarsi per la valutazione del campo in un certo istante sono quelli che si riferiscono ad uno stato anteriore delle cariche e delle correnti stesse, l'anticipo essendo al solito misurato dal tempo occorrente ad un mobile animato di velocità c per coprire la distanza fra il punto in cui si calcola il campo e quello in cui è situato l'elemento attivo (1).

Interpretazione analoga può darsi a quella parte del campo elettrico rappresentata dal secondo termine della espressione di $\vec{F}$ e che ovviamente corrisponde al contributo dovuto all'induzione elettromagnetica. Si deve però osservare che di questo non esiste mai l'analogo nel caso stazionario — in quanto che in presenza di cariche e correnti invariabili nel tempo non si hanno fenomeni di induzione — e così l'espressione $-\mu\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}$ costruita mediante il potenziale *ritardato* colma la lacuna accennata a tal proposito al n. 3.

Da ciò fra l'altro discende la conseguenza che le valutazioni di induttanza propria e mutua fatte al n. 2 mediante l'integrale di Neumann sono a considerarsi approssimative, e precisamente, siccome in esse non è tenuto alcun conto del ritardo, deve ritenersi che la validità di quelle formole sia limitata ai casi in cui può considerarsi infinitamente piccolo il tempo di propagazione. Ciò a rigore non può farsi che per circuiti o parte di circuiti infinitamente poco estesi ed infinitamente poco lontani, o, approssimativamente, anche per circuiti di dimensioni e distanze relativamente grandi, purchè però le variazioni delle correnti siano sufficientemente lente. Quest'ultima circostanza si può ritenere sensibilmente verificata nel caso delle frequenze industriali, e pertanto la ordinaria tecnica delle basse frequenze può praticamente trattarsi come se alla velocità spettasse valore infinito, sostituendo cioè ai potenziali ritardati gli ordinari.

Ma se una tale semplificazione può pensarsi lecita alle basse frequenze industriali, non è invece neppur lontanamente ammissibile nel caso delle elevate frequenze in giuoco nelle applicazioni radiotecniche. Per queste si impone l'uso delle formole esatte or ora stabilite e la conseguente revisione di alcune delle nozioni fondamentali.

Così, come si è detto, le nozioni di induttanza propria e mutua debbono venire profondamente modificate, non solo, ma non possono più darsi se non con riferimento alla legge secondo cui varia il campo magnetico (cioè la corrente).

---

(1) Ciò del resto comprende, come caso particolare, le formole (1) e (3), perchè in presenza di fatti invariabili nel tempo, i potenziali ritardati coincidono coi potenziali ordinari.

In particolare, nel caso di variazioni sinusoidali, l'effetto induttivo di ogni parte del circuito sulle altre parti del circuito stesso, o sugli elementi di un altro circuito, si verificherà con ritardo, il che porta di conseguenza che ad es. la f. e. m. d'autoinduzione e in un elemento circuitale non sarà in generale in quadratura con la corrente i dell'elemento stesso, in quanto che, anche se le correnti in tutti gli altri elementi dello stesso circuito fossero in un medesimo istante le stesse, le f. e. m. che ciascuna di esse determina nell'elemento considerato, avranno fasi svariate in relazione ai ritardi dovuti alle varie distanze da quello, per cui in definitiva la f. e. m. e avrà in generale anche una componente in fase od in opposizione con i. In questo secondo caso il fenomeno di induzione dà luogo anche ad un effetto dissipativo (uscita energetica) come se l'elemento del circuito presentasse resistenza. In ciò consiste essenzialmente l'effetto di radiazione energetica e la conseguente nozione di resistenza di radiazione.

Queste considerazioni debbono particolarmente essere tenute presenti per una esatta valutazione del significato da attribuirsi alle costanti fondamentali r, l, g, c dei circuiti a costanti distribuite, quando siano eccitati con frequenze elevate.

8. - **Campo elettromagnetico dovuto ad una distribuzione di dipoli.** — Un caso particolare di distribuzioni di cariche e di correnti che interessa specialmente le applicazioni radiotecniche è quello che scaturisce dalle considerazioni seguenti.

Chiamiamo *dipolo elementare* (elettrico) un prisma infinitamente piccolo sulle cui basi esistono due cariche elettriche opposte q e $-q$ in generale variabili col tempo. Definiamo poi *momento* di tale dipolo il vettore che ha per grandezza il prodotto qh della carica q per l'altezza h del prisma, per direzione e senso quelli dell'asse percorso dalla carica negativa alla positiva.

Per un aggregato continuo di dipoli elementari, situati in una regione τ, che generalmente sarà occupata da un mezzo conduttore, potremo definire lo stato elettrico assegnando, in funzione del punto generico P del mezzo stesso e del tempo, il vettore ***densità*** di momento $\vec{p}$ inteso come rapporto fra la somma dei momenti dei dipoli esistenti in un elemento $d\tau$ di volume ed il volume $d\tau$ stesso.

Si vede subito che, se si considera un tubo del vettore $\vec{p}$ e di questo un tronco tanto piccolo da potersi ritenere contenente un solo dipolo, il prodotto di p per l'area della sezione normale equivale alla carica del dipolo stesso.

Ad una distribuzione siffatta si accompagna un sistema di cariche e di correnti, di cui vogliamo calcolare le rispettive densità ϱ ed $\vec{u}$.

Quanto a quest'ultima, è evidentemente

$$\vec{u} = \frac{\partial \vec{p}}{\partial t}. \tag{29}$$

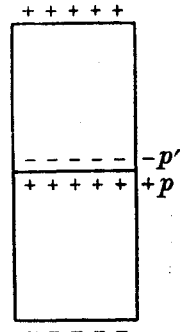



Fig. 439

Per calcolare ϱ, osserviamo che se $\vec{p}$, $\vec{p}'$ sono i valori di $\vec{p}$ relativi a due dipoli contigui (fig. 439), sulla areola dS che li separa si trova concentrata una carica misurata in valore e segno da $(p - p')\, dS$.

Ciò premesso, consideriamo un elemento di volume $d\tau$ costituito da un tronco infinitesimo di un tubo di $\vec{p}$, avente lunghezza δl e sezione normale dS. Il flusso

di $\vec{p}$ da esso uscente si riduce ovviamente a quello relativo alle basi, ed il suo valore è $\delta p dS$, essendo δp la variazione che il modulo di $\vec{p}$ subisce nel passaggio dalla base negativa alla positiva (cioè nel senso concordante con quello del vettore $\vec{p}$). Tale flusso equivale quindi alla carica concentrata entro $d\tau$ mutata di segno, talchè, per la definizione stessa di div, si ha:

$$\varrho = -\operatorname{div}\vec{p} \quad (29')$$ (1).

Se ora costruiamo il potenziale vettore ritardato $\vec{P}$ relativo alla distribuzione $\vec{p}$, cioè poniamo

$$\vec{P} = \frac{1}{4\pi}\int_\tau \frac{\vec{p}^*}{r}\,d\tau\,, \quad (30)$$

essendo l'integrale esteso al campo τ di esistenza di $\vec{p}$, fra questo vettore, detto *vettore di Hertz*, ed i potenziali ritardati φ ed $\vec{U}$ relativi a ϱ ed $\vec{u}$ sussistono le seguenti relazioni (formole (33) e (34) di App., B, 6):

$$\varphi = -\operatorname{div}\vec{P}\,, \qquad \vec{U} = \frac{\partial\vec{P}}{\partial t}\,,$$

per cui, sostituendo nelle (28), queste assumono l'aspetto notevole

$$\left\{\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{1}{\varepsilon}\left(\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{P} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{P}}{\partial t^2}\right)\\ \vec{H} &= \operatorname{rot}\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}\,; \end{aligned}\right. \quad (31)$$

mentre il vettore $\vec{P}$ (App. B, 6, formola (32)) soddisfa alla consueta equazione alle derivate parziali caratteristica dei potenziali ritardati, cioè (in coordinate cartesiane):

$$\Delta\vec{P} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{P}}{\partial t^2} = \left\{\begin{array}{ll} -\vec{p} & (\text{entro } \tau)\\ 0 & (\text{fuori di } \tau)\,. \end{array}\right. \quad (32)$$

Le formole (31) mettono in evidenza la diretta dipendenza del campo elettromagnetico $\vec{F}$, $\vec{H}$ dalla distribuzione $\vec{p}$ cui esso può intendersi dovuto, e ne consentono il calcolo effettivo non appena si sia costruito il vettore di Hertz relativo alla distribuzione stessa.

Siccome, in virtù della (21) di App., B e della (32), il fattore che moltiplica $\frac{1}{\varepsilon}$ al secondo membro dell'espressione di $\vec{F}$ equivale a $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{P} - \vec{p}$, ed il vettore $\vec{p}$ è nullo fuori dello spazio occupato dalla distribuzione $\vec{p}$, la prima delle (31) può anche scriversi:

$$\vec{F} = \frac{1}{\varepsilon}(\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{P} - \vec{p})\,, \quad (31')$$

$$\vec{F} = \frac{1}{\varepsilon}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{P}\,, \quad (31'')$$

la prima valida dovunque, la seconda soltanto nei punti esterni alla regione τ.

(1) Dalle (29), (29') segue, come era da attendersi, che ϱ ed $\vec{u}$ soddisfano alla relazione fondamentale (24).

Per lo più in pratica accade che è nota a priori la distribuzione $\vec{u}$ della corrente di conduzione, mentre l'applicazione delle formole (31') e (32') richiede la conoscenza della distribuzione $\vec{p}$. Questa allora si calcola agevolmente mediante la (29), dalla quale si deduce immediatamente:

$$\vec{p} = \int \vec{u}\, dt \text{ [1]}.$$

Si potrebbe invece dalla corrente $\vec{u}$ dedurre la distribuzione ϱ dalle cariche mediante la $\frac{\partial \varrho}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{u}$ ed applicare poi le (18) dopo aver costruito il potenziale scalare φ definito dalla (26).

Sorge allora spontanea la domanda: è indifferente seguire l'una o l'altra via oppure no?

A prima vista, parrebbe doversi rispondere affermativamente; ma un esame più accurato della questione mostra che in generale così non è. Più precisamente, come ora vedremo, bisogna, per la costruzione di φ, ricorrere alla espressione completa (26') dopo avere proceduto alla valutazione di una certa densità superficiale σ.

Di tale necessità possiamo renderci conto in modo intuitivo al modo seguente. Supponiamo che tutta la distribuzione di cui si tratta si riduca a due dipoli elementari $\vec{p}d\tau$, $\vec{p}'d\tau$ consecutivi, che schematicamente localizzeremo in due prismetti AB, BC di basi dS, con gli assi diretti secondo i vettori $\vec{p}$ e $\vec{p}'$, che per semplicità supporremo paralleli (fig. 440). Questi due dipoli, nel loro complesso equivalgono a due cariche *terminali*, l'una $-pdS$ su A, l'altra $+p'dS$ su C, più una terza carica *interna* $(p-p')dS$, e a tali tre elementi risulta riferito il campo calcolato con le (31). Siccome la corrente vale $\frac{d}{dt}(pdS)$ in AB, $\frac{d}{dt}(p'dS)$ in BC, il computo della carica, fatto mediante la divergenza della corrente, si commisura alla differenza delle correnti nei due elementi, e pertanto conduce soltanto alla considerazione della carica interna $(p-p')dS$. Segue quindi che occorrerà tener conto a parte delle cariche terminali che col computo precedente rimangono trascurate.

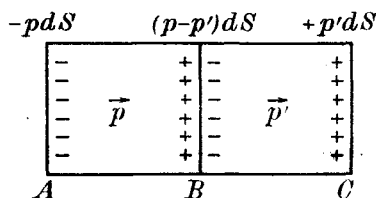



Fig. 440

Per arrivare alla valutazione precisa che ci occorre, si pensi che ad un insieme

[1] L'integrale scritto non rappresenta, a dir vero, un vettore ben determinato, a causa della costante arbitraria che nasce dall'integrazione. Trattandosi di una costante rispetto al tempo, cioè di una funzione arbitraria del posto, la distribuzione dipolare corrispondente ad un dato sistema di correnti variabili risulta così determinata soltanto a meno di una distribuzione di tipo stazionario. Siccome però a questa corrisponde un campo elettrostatico fisso, la indeterminazione predetta è del tutto inessenziale. È infatti fisicamente chiaro che, ai fini dello studio del campo elettromagnetico dovuto a fatti che si svolgono, a partire da un dato istante, con una certa legge di variazione nel tempo, è indifferente che il mezzo in cui questi si manifestano sia elettricamente neutro, oppure sede di una elettrizzazione qualunque, preesistente e perdurante senza variare nel tempo.

qualunque di dipoli elementari corrisponde sempre una carica totale nulla, perchè tanto avviene per ogni singolo dipolo. Invece la carica totale Q corrispondente alla densità ϱ sopra calcolata in base alla div $\vec{u}$ — che chiameremo *divergenza cubica* di $\vec{u}$ — vale

$$Q = \int \varrho d\tau = -\int \operatorname{div} \vec{p} d\tau ,$$

e questa espressione può anche non essere nulla.

D'altra parte, il teorema della divergenza insegna che l'integrale scritto equivale all'integrale superficiale

$$Q' = -\int \vec{p} \times \vec{n} \, dS \ ;$$

dunque, per esaurire il sistema di cariche connesso al dato sistema di dipoli, occorre considerare, insieme alla Q, anche la $-Q'$. Ora, questa, come l'espressione precedente indica, è riferibile ad una distribuzione a due dimensioni localizzata sulla superficie S contorno di τ e la densità superficiale σ che la caratterizza è data dalla espressione

$$\sigma = \vec{p} \times \vec{n} = \int \vec{u} \times \vec{n} \, dt$$

ottenuta integrando rispetto al tempo la componente normale di $\vec{u}$, che potremo chiamare *divergenza superficiale* di $\vec{u}$ (1). È chiaro pertanto che anche di tale distribuzione si dovrà tener conto nella formazione del potenziale scalare φ che figura nella (28).

In definitiva, possiamo concludere che se, per un dato sistema di correnti conduttive, si scrivono le (31) con

$$\vec{p} = \int \vec{u} \, dt ,$$

esse coincidono con le (28), purchè in queste con φ si intenda l'espressione (26′) calcolata con

$$\varrho = -\int_\tau \operatorname{div} \vec{u} \, dt , \qquad \sigma = \int_S \vec{u} \times \vec{n} \, dt .$$

Naturalmente, dall'ultimo termine si potrà prescindere nel solo caso in cui sia $\vec{u} \times \vec{n} = 0$ per ogni punto della superficie S che delimita l'ambiente τ sede delle correnti $\vec{u}$ generatrici del campo. Questo è quanto avviene quando attra-

---

(1) In effetto, quando, come in questo caso, una distribuzione $\vec{p}$ viene considerata come disposta su una sola delle due pagine di una superficie S, il prodotto scalare $\vec{p} \times \vec{n}$ presenta i caratteri di una divergenza superficiale, in quanto il suo prodotto per dS misura il flusso di $\vec{p}$ uscente da un volume infinitesimo $d\tau$ racchiudente dS. Per convincersene basta pensare ad un $d\tau$ foggiato a prisma con le basi parallele a dS ed altezza infinitesima ed osservare che la componente normale $\vec{p} \times \vec{n}$ è da considerarsi nulla dalla parte opposta alla pagina considerata.

verso S non entra e non esce corrente; per contro ciò non si verifica quando τ sia occupato da un conduttore comunicante con altri sia per via metallica (correnti di conduzione), sia per via dielettrica (correnti di spostamento), questo ultimo caso presentandosi ad es. fra due elementi del contorno costituenti complessivamente le armature di un condensatore.

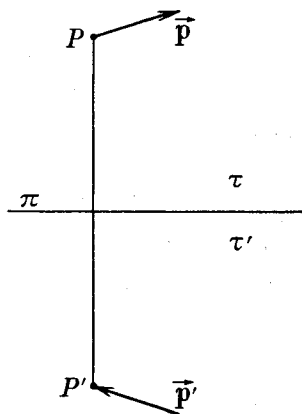
9. - Applicazione del principio delle immagini. — Osserveremo infine che il principio delle immagini (I, 9) può estendersi al caso attuale nel modo seguente. Se la distribuzione $\vec{p}$ è situata tutta nel semispazio τ posto da una parte di un piano π, mentre l'altro semispazio τ' è occupato da un mezzo di conduttività infinitamente grande, il campo elettrico $\vec{F}$ ad essa dovuto è necessariamente nullo sul piano π e nel semispazio τ' (1). Siccome però, come si è visto, alla superficie di separazione π la componente tangenziale di $\vec{F}$ è continua, segue che tal componente ha necessariamente valore nullo su π e pertanto il vettore $\vec{F}$ ha direzione normale al piano π stesso. Si potrebbe poi dimostrare che questa circostanza, unitamente alle equazioni fondamentali ed alle solite condizioni ai limiti, determina univocamente i vettori $\vec{F}$, $\vec{H}$ in tutto il semispazio τ.

Ammesso ciò, per determinare questi vettori, si consideri la distribuzione dipolare $\vec{p}'$ disposta simmetricamente a $\vec{p}$ rispetto a π, ma avente in punti corrispondenti segno opposto a quello di $\vec{p}$, cioè tale che, essendo P' l'immagine speculare del punto generico P di τ rispetto a π, il vettore $\vec{p}'$ relativo a P' sia l'immagine speculare del vettore opposto al vettore p relativo a P (fig. 441).

Fig. 441

Orbene, andiamo a dimostrare che il campo elettromagnetico $\vec{F}$, $\vec{H}$ dovuto alla distribuzione effettiva $\vec{p}$, essendo il semispazio τ' occupato dal mezzo conduttore supposto, coincide in ogni punto di τ con quello che ivi si avrebbe qualora l'intero spazio fosse omogeneo con τ e contenesse le due distribuzioni $\vec{p}$ e $\vec{p}'$.

Invero, detti $\vec{F}_1$, $\vec{H}_1$; $\vec{F}_2$, $\vec{H}_2$ i campi che le due distribuzioni, singolarmente considerate, determinerebbero nell'intero spazio, sarà ovviamente $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, $\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$. D'altra parte, detta $\vec{u}$ la densità di corrente dovuta a $\vec{p}$, per ogni punto di τ i vettori $\vec{F}_1$, $\vec{H}_1$ soddisfano le equazioni

$$\operatorname{rot} \vec{H}_1 = \varepsilon \frac{\partial \vec{F}_1}{\partial t} + \vec{u}, \qquad \operatorname{rot} \vec{F}_1 = -\mu \frac{\partial \vec{H}_1}{\partial t},$$

(1) Al n. 6, *a*) si è visto che nel caso sinusoidale il campo elettrico si attenua tanto più rapidamente entro il mezzo conduttore quanto maggiore è la conduttività. Nel caso generale, basta pensare che la densità di corrente $\gamma\vec{F}$ deve serbarsi finita, per concludere che, per $\gamma \to \infty$, il campo $\vec{F}$ tende a zero.

mentre per $\vec{F}_2$, $\vec{H}_2$ si ha:

$$\operatorname{rot} \vec{H}_2 = \varepsilon \frac{\partial \vec{F}_2}{\partial t}, \qquad \operatorname{rot} \vec{F}_2 = -\mu \frac{\partial \vec{H}_2}{\partial t},$$

in quanto che nei punti di τ non esiste alcun elemento della corrente cui sono dovuti $\vec{F}_2$, $\vec{H}_2$. Basta ora sommare membro a membro le precedenti per riconoscere che $\vec{F}$, $\vec{H}$ soddisfano in τ alle equazioni fondamentali relative alla sola distribuzione $\vec{p}$.

In secondo luogo, per ovvie ragioni di simmetria, i campi $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ hanno in ogni punto del piano π valori uguali e direzioni ugualmente inclinate rispetto a questo piano, talchè, tenendo conto dell'opposizione di segno, i sensi risultano simmetrici rispetto alla normale, quindi il vettore $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ è normale a π. Con ciò resta dimostrato l'asserto.